Continuos débilmente unicoherentes

Mayer Y. Palacios Arenas

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Facultad de Ciencias

Continuos

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo diferente del vacío.

Continuo unicoherente

Un continuo X es *unicoherente*, si para cualesquier par de subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Continuos

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo diferente del vacío.

Continuo unicoherente

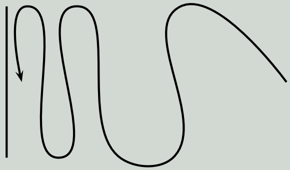
Un continuo X es *unicoherente*, si para cualesquier par de subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Ejemplos de continuos unicoherentes y no unicoherentes

$[0, 1]$

Ejemplos de continuos unicoherentes y no unicoherentes

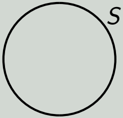
$[0, 1]$



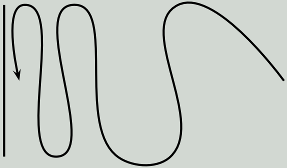
Curva del topólogo

Ejemplos de continuos unicoherentes y no unicoherentes

$[0, 1]$



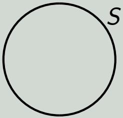
S^1



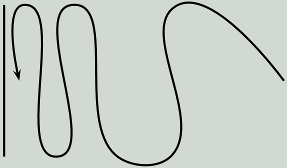
Curva del topólogo

Ejemplos de continuos unicoherentes y no unicoherentes

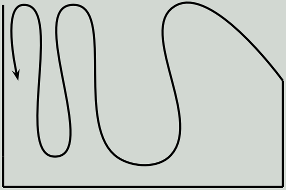
$[0,1]$



S^1



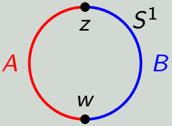
Curva del topólogo

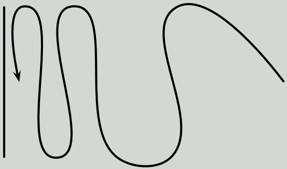


Círculo de Varsovia

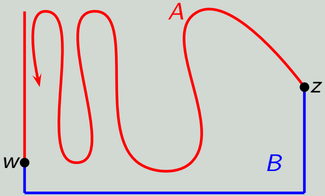
Ejemplos de continuos unicoherentes y no unicoherentes

$[0,1]$





Curva del topólogo



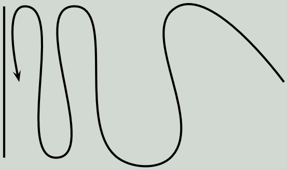
Círculo de Varsovia

Continuos débilmente unicoherentes

Un continuo X es *débilmente unicoherente*, si para cualesquier par de subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$ e $\mathrm{Int}(A \cap B) \neq \emptyset$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Ejemplos

$[0, 1]$

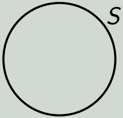


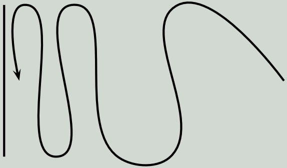
Curva del topólogo

Ejemplos

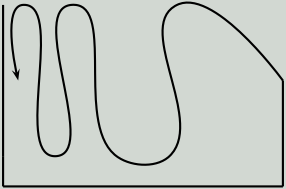
$[0, 1]$

S^1





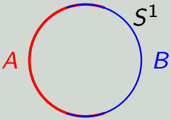
Curva del topólogo

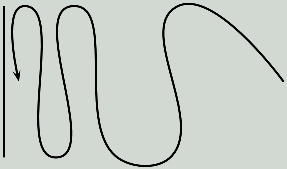


Círculo de Varsovia

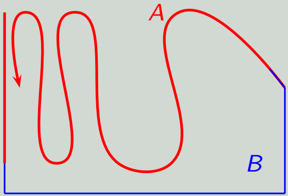
Ejemplos

$[0, 1]$



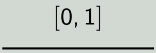


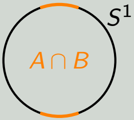
Curva del topólogo

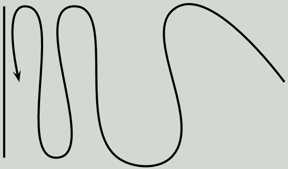


Círculo de Varsovia

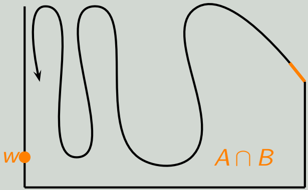
Ejemplos





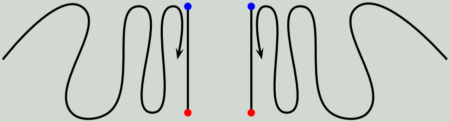


Curva del topólogo

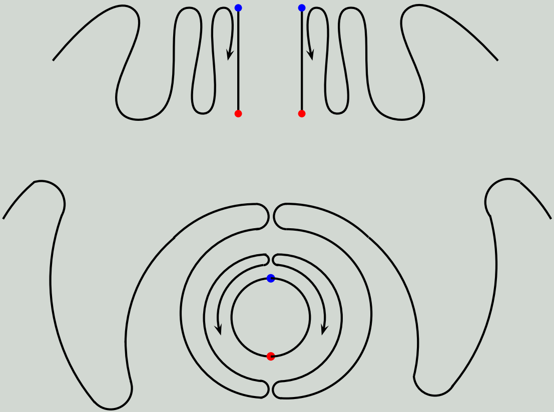


Círculo de Varsovia

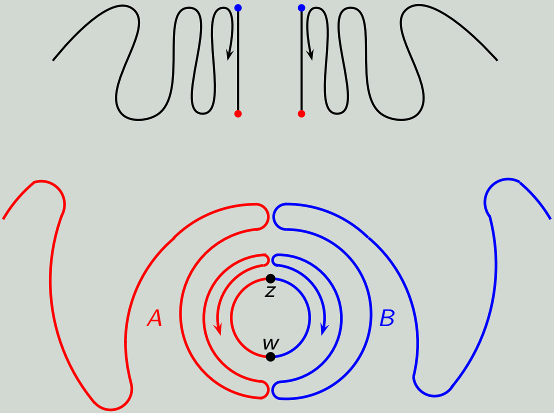
Ejemplo de un continuo débilmente unicoherente que no es unicoherente



Ejemplo de un continuo débilmente unicoherente que no es unicoherente



Ejemplo de un continuo débilmente unicoherente que no es unicoherente



Teorema [J. Camargo y H. Villanueva]

Si X es un continuo débilmente unicoherente y localmente conexo entonces X es unicoherente.

Pregunta

¿Si X es débilmente unicoherente y arcoconexo, entonces X es unicoherente?

Teorema [J. Camargo y H. Villanueva]

Si X es un continuo débilmente unicoherente y localmente conexo entonces X es unicoherente.

Pregunta

¿Si X es débilmente unicoherente y arcoconexo, entonces X es unicoherente?

Pregunta

¿Si X es débilmente unicoherente y aposindético, entonces X es unicoherente?

Pregunta

¿Si X es un continuo débilmente unicoherente y mutuamente aposindético, entonces X es unicoherente?

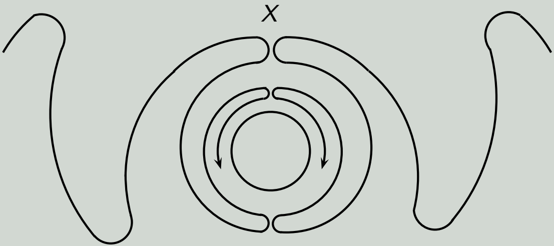
Pregunta

¿Si X es débilmente unicoherente y aposindético, entonces X es unicoherente?

Pregunta

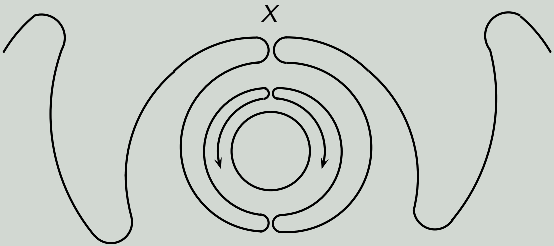
¿Si X es un continuo débilmente unicoherente y mutuamente aposindético, entonces X es unicoherente?

Observación



El continuo $X \times [0,1]$ es aposindético y no unicoherente.

Observación



El continuo $X \times [0,1]$ es aposindético y no unicoherente.

Continuos irreducibles

Un continuo X se dice *irreducible* si existen dos puntos $p, q \in X$ tales que para cualquier subcontinuo K de X, donde $\{p, q\} \subset K$, se tiene que $K = X$.

Teorema [J. Camargo y H. Villanueva]

Si X es un continuo irreducible entonces X es débilmente unicoherente.

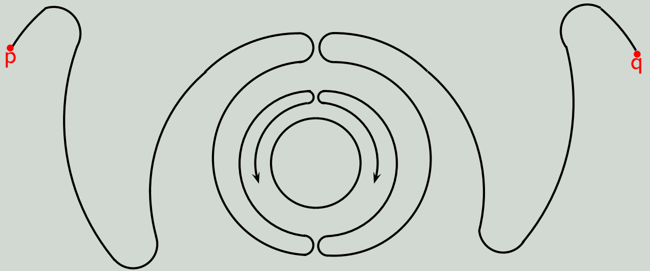
Continuos irreducibles

Un continuo X se dice *irreducible* si existen dos puntos $p, q \in X$ tales que para cualquier subcontinuo K de X, donde $\{p, q\} \subset K$, se tiene que $K = X$.

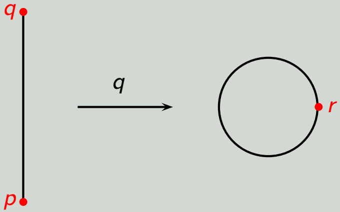
Teorema [J. Camargo y H. Villanueva]

Si X es un continuo irreducible entonces X es débilmente unicoherente.

Ejemplo



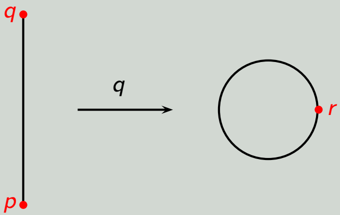
Ejemplo



Pregunta

Sea X un continuo débilmente unicoherente. ¿Qué condición o condiciones debe satisfacer una función continua y sobreyectiva entre continuos $f\colon X \to Y$, para obtener que Y sea débilmente unicoherente?

Ejemplo



Pregunta

Sea X un continuo débilmente unicoherente. ¿Qué condición o condiciones debe satisfacer una función continua y sobreyectiva entre continuos $f: X \to Y$, para obtener que Y sea débilmente unicoherente?

Definición

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, donde X y Y son continuos. Diremos que f es:

1. *Casimonótona*, si para cualquier subcontinuo con interior no vacío K de Y, $f^{-1}(K)$ es un continuo.

Definición

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, donde X y Y son continuos. Diremos que f es:

1. *Casimonótona*, si para cualquier subcontinuo con interior no vacío K de Y, $f^{-1}(K)$ es un continuo.
2. *Fuertemente libremente descomponible*, siempre que $Y = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de Y, entonces $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos de X.

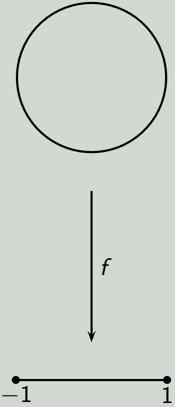
Definición

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, donde X y Y son continuos. Diremos que f es:

1. *Casimonótona*, si para cualquier subcontinuo con interior no vacío K de Y, $f^{-1}(K)$ es un continuo.
2. *Fuertemente libremente descomponible*, siempre que $Y = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de Y, entonces $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos de X.

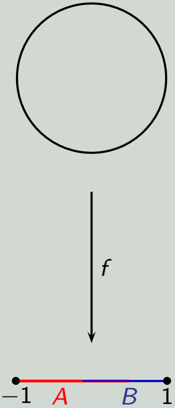
Función fuertemente libremente descomponible que no es casimonótona

Sea $f\colon S^1 \to [-1,1]$ la función definida por $f((x,y)) = x$.



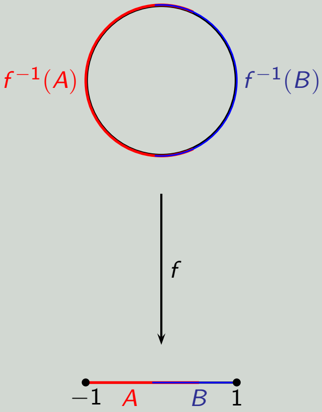
Función fuertemente libremente descomponible que no es casimonótona

Sea $f: S^1 \to [-1,1]$ la función definida por $f((x,y)) = x$.



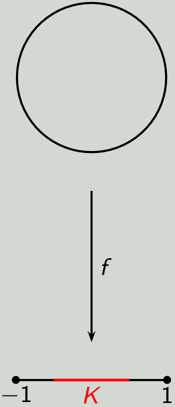
Función fuertemente libremente descomponible que no es casimonótona

Sea $f\colon S^1 \to [-1,1]$ la función definida por $f((x,y)) = x$.



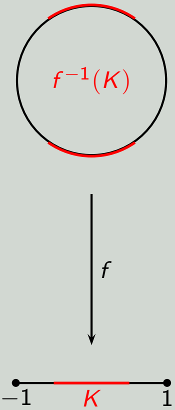
Función fuertemente libremente descomponible que no es casimonótona

Sea $f\colon S^1 \to [-1,1]$ la función definida por $f((x,y)) = x$.



Función fuertemente libremente descomponible que no es casimonótona

Sea $f\colon S^1 \to [-1,1]$ la función definida por $f((x,y)) = x$.



Teorema [J. Camargo y H. Villanueva]

Sea $f\colon X \to Y$ un función fuertemente libremente descomponible entre continuos. Si X es débilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente.

Corolario

Sea $f\colon X \to Y$ un función casimonótona entre continuos. Si X es débilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente.

Teorema [J. Camargo y H. Villanueva]

Sea $f : X \to Y$ un función fuertemente libremente descomponible entre continuos. Si X es débilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente.

Corolario

Sea $f : X \to Y$ un función casimonótona entre continuos. Si X es débilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente.

Corolario

Sea $f : X \to Y$ un función monótona entre continuos. Si X es débilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente.

Teorema [J. Camargo y H. Villanueva]

Sea $f : X \to Y$ un función fuertemente libremente descomponible entre continuos. Si X es débilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente.

Corolario

Sea $f : X \to Y$ un función casimonótona entre continuos. Si X es débilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente.

Corolario

Sea $f : X \to Y$ un función monótona entre continuos. Si X es débilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente.

Sea $\mathcal{F}$ una familia de continuos definida:

$$\mathcal{F} = \{X \mid \forall Y \text{ y } \forall\, f\colon X \to Y \text{ F.L.D., se tiene que } f \text{ es casimonótona}\}.$$

Teorema [J. Camargo y H. Villanueva]

Sea $f\colon X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible. Si X es débilmente unicoherente, entonces f es casimonótona.

Corolario

Sea $f\colon X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible. Si X es unicoherente o irreducible, entonces f es casimonótona.

Sea $\mathcal{F}$ una familia de continuos definida:

$$\mathcal{F} = \{X \mid \forall Y \text{ y } \forall\, f\colon X \to Y \text{ F.L.D., se tiene que } f \text{ es casimonótona}\}.$$

Teorema [J. Camargo y H. Villanueva]

Sea $f\colon X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible. Si X es débilmente unicoherente, entonces f es casimonótona.

Corolario

Sea $f\colon X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible. Si X es unicoherente o irreducible, entonces f es casimonótona.

Definición

Un abanico armónico es un espacio homeomorfo a
$F_H = \{t(1, 1/n) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 1] \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \cup ([0, 1] \times \{0\})$.

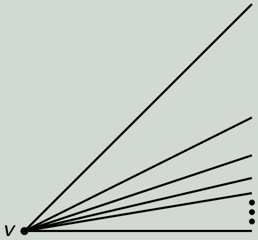
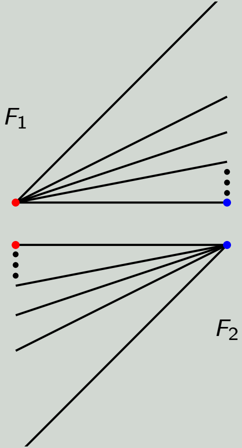


Figura: Abanico armónico

Continuo no débilmente unicoherente



Continuo no débilmente unicoherente

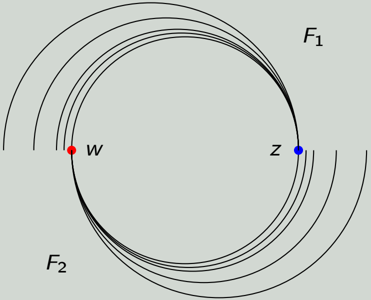


Figura: $X = F_1 \bigcup_g F_2$

Continuo no débilmente unicoherente

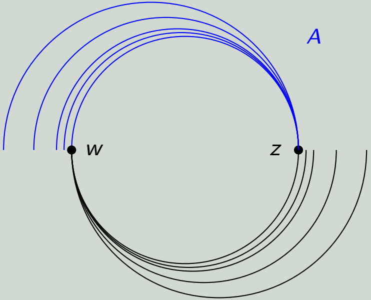


Figura: $X = F_1 \bigcup_g F_2$

Continuo no débilmente unicoherente

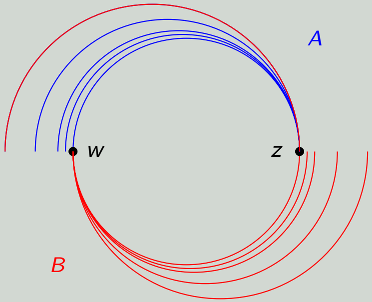


Figura: $X = F_1 \bigcup_g F_2$

Teorema [J. Camargo y H. Villanueva]

Sea $X = F_1 \bigcup_g F_2$ el continuo definido en el ejemplo anterior.
Toda función $f : X \to Y$ fuertemente libremente descomponible es casimonótona.

Pregunta

¿Qué condición o condiciones debe cumplir un continuo X para que toda función fuertemente libremente descomponible $f : X \to Y$ sea casimonótona?; es decir, para que este en $\mathcal{F}$?

Teorema [J. Camargo y H. Villanueva]

Sea $X = F_1 \bigcup_g F_2$ el continuo definido en el ejemplo anterior.
Toda función $f : X \to Y$ fuertemente libremente descomponible es casimonótona.

Pregunta

¿Qué condición o condiciones debe cumplir un continuo X para que toda función fuertemente libremente descomponible $f : X \to Y$ sea casimonótona?; es decir, para que este en $\mathcal{F}$?

Bibliografía

- Camargo J. and Macías S., it *On freely decomposable maps*, Topology Appl. 159 (2012), 891-899.
- Camargo J. and Villanueva H., *On weakly unicoherence on continua*, preprint.
- García A. and Illanes A., *A survey on unicoherence and related properties*, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México, 29 (1989), 17-67.
- Gordh G.R. Jr and Hughes C.B., *On freely decomposable mappings of continua*, Glas. Mat. Ser. III, 14 (34) (1979), 137-146.

Gracias por su atención