El hiperespacio de los subcontinuos T-cerrados

Marco Antonio Ruiz Sánchez

Universidad Autónoma del Estado de México

2016

Definición

Un **continuo** X es un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío. Un **subcontinuo** es un subconjunto de X el cual es un continuo.

Definición

Un **continuo** X es un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío. Un **subcontinuo** es un subconjunto de X el cual es un continuo.

La función T de Jones

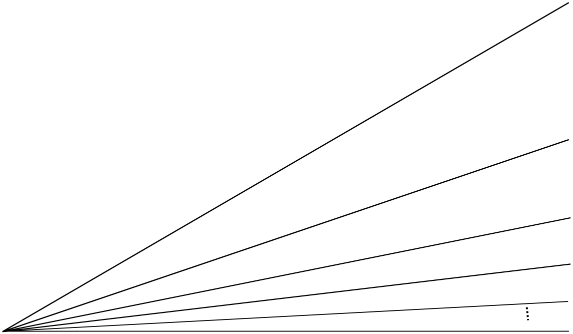
El profesor F. Burton Jones definió la función T para un continuo X como sigue: Si $A \subset X$, entonces

$$T(A) = \{x \in X : \text{para cada subcontinuo } W \text{ de } X \text{ tal que } x \in Int(W), \text{ tenemos que } W \cap A \neq \emptyset \}.$$

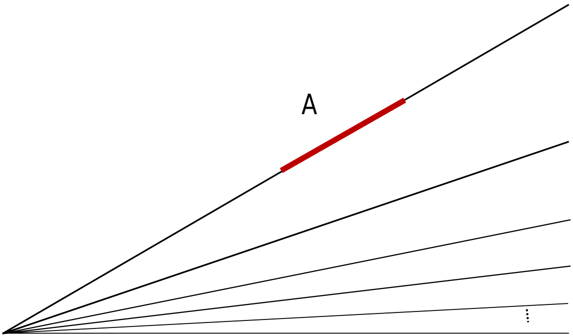
La función T de Jones

Si X es un continuo y $A \subset X$, entonces

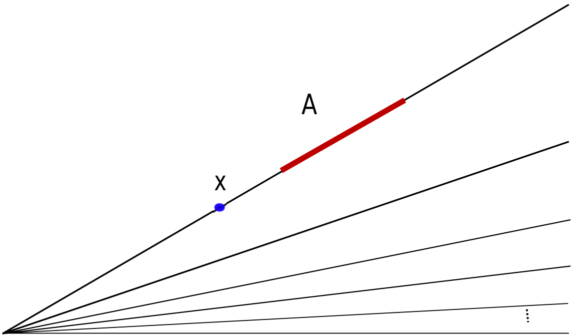
$$T(A) = X \setminus \{x \in X : \text{existe un subcontinuo } W \text{ de } X \text{ tal que } x \in Int(W) \subset W \subset X \setminus A\}.$$



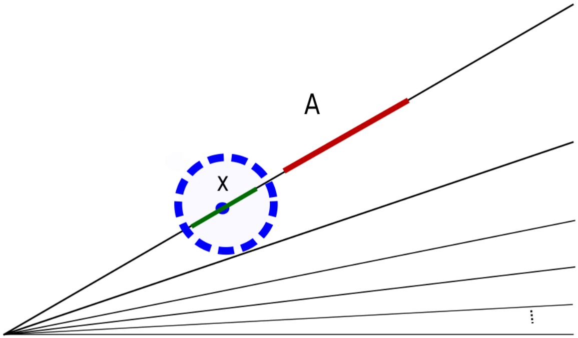
Preliminares



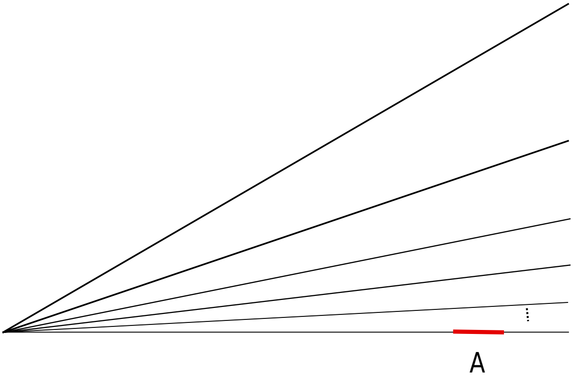
Preliminares



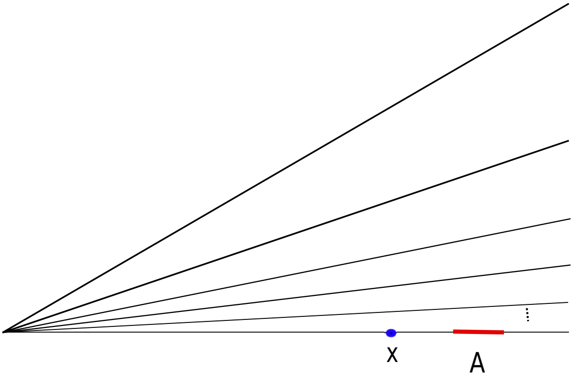
Preliminares

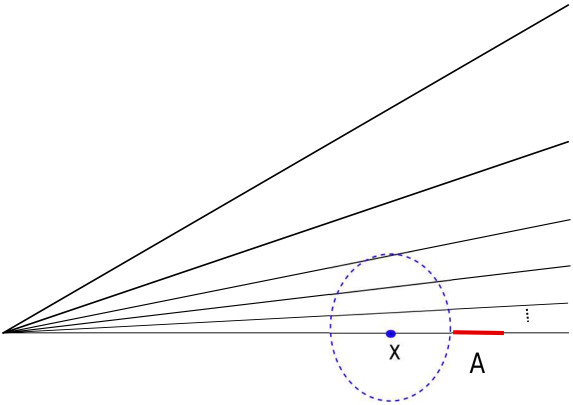


Preliminares

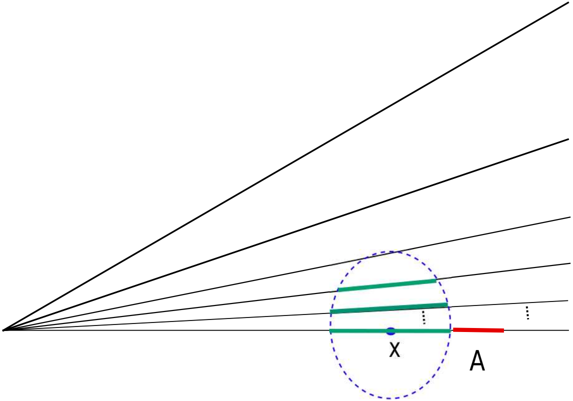


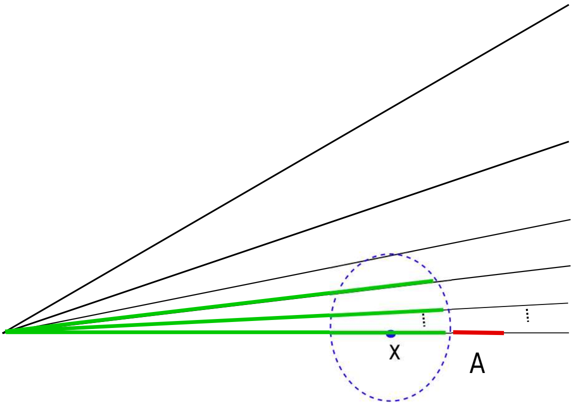
Preliminares



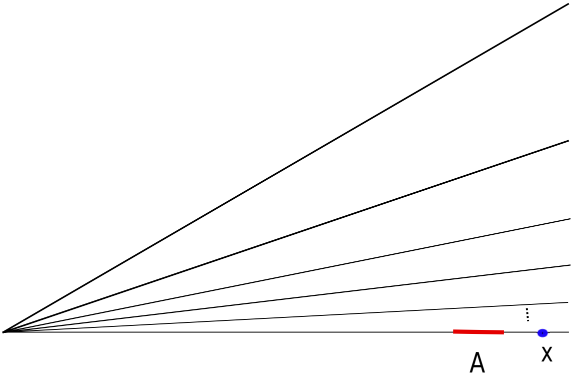

X
A

Preliminares

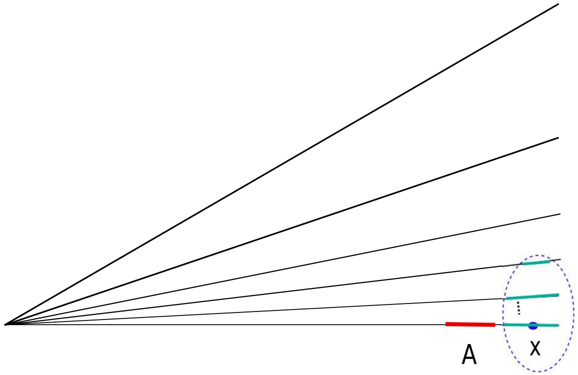



X
A

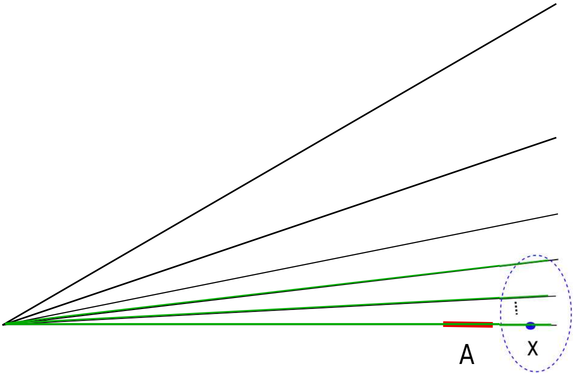
Preliminares



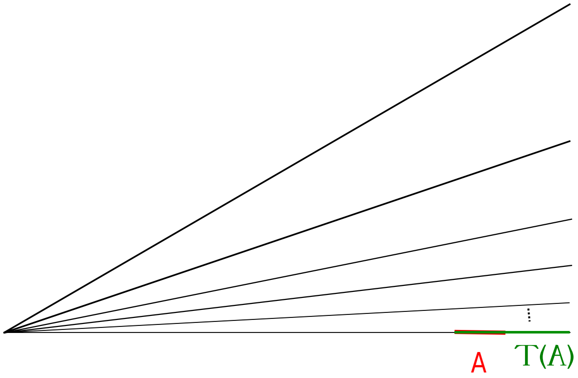
Preliminares



Preliminares



Preliminares



Propiedades

Sea X un continuo. Sean A, B subconjuntos de X, entonces

Propiedades

Sea X un continuo. Sean A, B subconjuntos de X, entonces

1. $A \subset T(A)$,

Propiedades

Propiedades

Sea X un continuo. Sean A, B subconjuntos de X, entonces

1. $A \subset T(A)$,
2. Si $A \subset B$, entonces $T(A) \subset T(B)$,

Propiedades

Propiedades

Sea X un continuo. Sean A, B subconjuntos de X, entonces

1. $A \subset T(A)$,
2. Si $A \subset B$, entonces $T(A) \subset T(B)$,
3. $T(A)$ es cerrado en X,

Propiedades

Sea X un continuo. Sean A, B subconjuntos de X, entonces

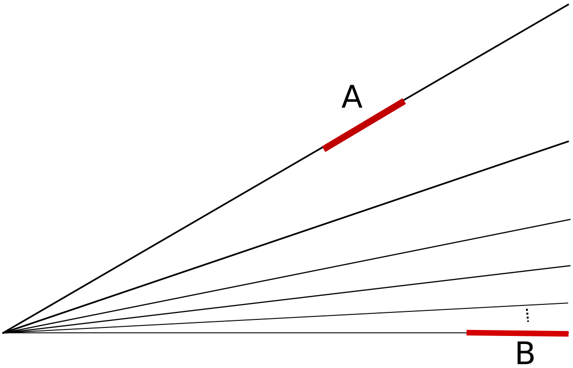
1. $A \subset T(A)$,
2. Si $A \subset B$, entonces $T(A) \subset T(B)$,
3. $T(A)$ es cerrado en X,
4. Si A es un subcontinuo, entonces $T(A)$ es también un subcontinuo de X.

Conjuntos T-cerrados

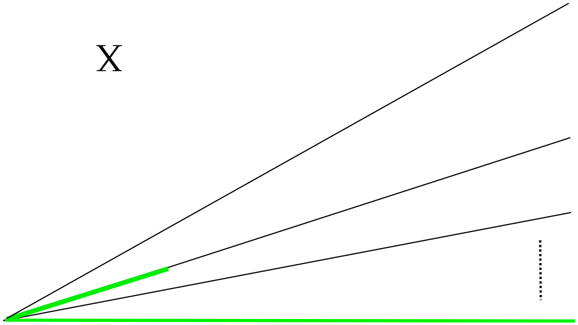
Definición

Dado un continuo X, un subconjunto A de X es un conjunto T-**cerrado** si $T(A) = A$.

Ejemplos



Ejemplos



Hiperespacio T-cerrado

El Hiperespacio de los subcontinuos T-cerrados

Dado un continuo X, consideramos el siguiente hiperespacio

$$C_T(X) = \{A \in C(X) : A \text{ es } T\text{-cerrado } \}.$$

Hiperespacio T-cerrado

Continuo descomponible

Un continuo es descomponible si puede ser escrito como la unión de dos subcontinuos propios. Decimos que es indescomponible si no es descomponible.

Hiperespacio T-cerrado

Continuo descomponible

Un continuo es descomponible si puede ser escrito como la unión de dos subcontinuos propios. Decimos que es indescomponible si no es descomponible.

Teorema

Sea X un continuo. X es indescomponible si y sólo si $T(p) = X$ para cada $p \in X$.

Hiperespacio T-cerrado

Continuo descomponible

Un continuo es descomponible si puede ser escrito como la unión de dos subcontinuos propios. Decimos que es indescomponible si no es descomponible.

Teorema

Sea X un continuo. X es indescomponible si y sólo si $T(p) = X$ para cada $p \in X$.

Corolario

$T(A) = X$ para cada subconjunto de X.

Continuo descomponible

Un continuo es descomponible si puede ser escrito como la unión de dos subcontinuos propios. Decimos que es indescomponible si no es descomponible.

Teorema

Sea X un continuo. X es indescomponible si y sólo si $T(p) = X$ para cada $p \in X$.

Corolario

$T(A) = X$ para cada subconjunto de X.

Ejemplo

Si X es un continuo indescomponible, entonces $C_T(X) = \{X\}$.

Localmente conexo

Sea X un continuo, decimos que X es localmente conexo si para cada punto $x \in X$ y cada abierto U de X con $x \in U$, existe un abierto conexo V tal que $x \in V \subset U$.

Ejemplo

X es localmente conexo si y sólo si $C_T(X) = C(X)$.

Ejemplo

Sean $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de continuos indescomponibles que cumplen:

1. $Y_n \to \{P\}$,
2. $Y_n \cap Y_m \neq \emptyset$ si y sólo si $|m - n| \leq 1$,
3. $|Y_n \cap Y_{n+1}| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$,
4. $Z_n \to \{P\}$,
5. $Z_n \cap Z_m \neq \emptyset$ si y sólo si $|m - n| \leq 1$,
6. $|Z_n \cap Z_{n+1}| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$,
7. $(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n) = \emptyset$

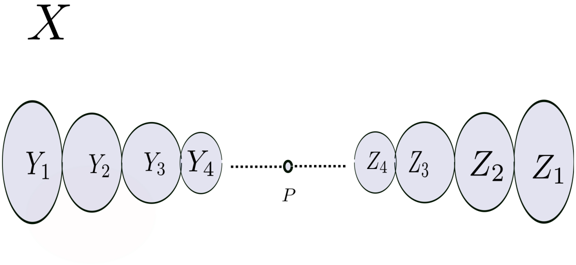
Ejemplo

Sean $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de continuos indescomponibles que cumplen:

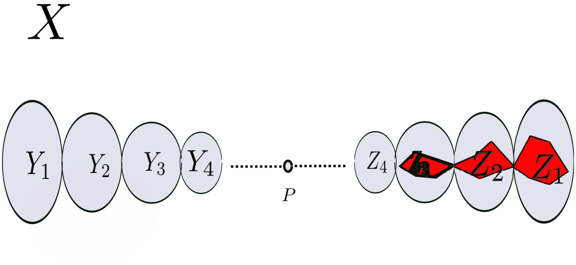
1. $Y_n \to \{P\}$,
2. $Y_n \cap Y_m \neq \emptyset$ si y sólo si $|m - n| \leq 1$,
3. $|Y_n \cap Y_{n+1}| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$,
4. $Z_n \to \{P\}$,
5. $Z_n \cap Z_m \neq \emptyset$ si y sólo si $|m - n| \leq 1$,
6. $|Z_n \cap Z_{n+1}| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$,
7. $(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n) = \emptyset$

consideramos el continuo definido por $X = (\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n) \cup \{P\}$.

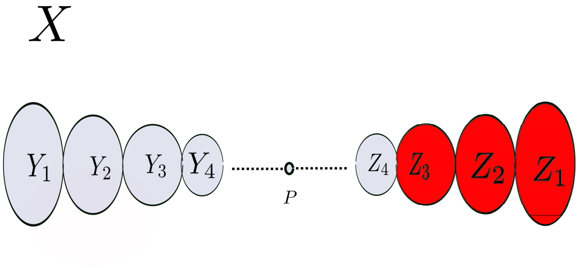
Ejemplo



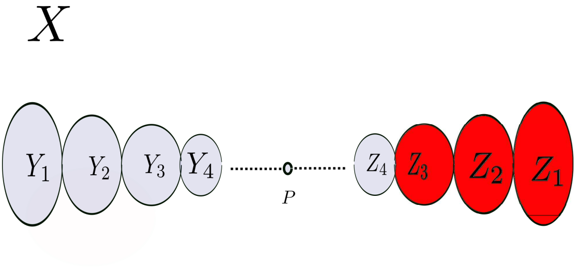
Ejemplo



Ejemplo



Ejemplo



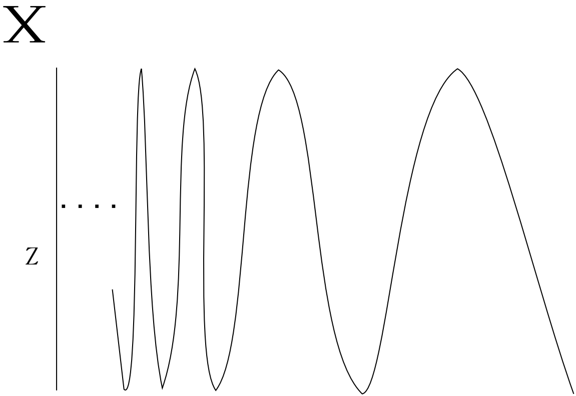
$C_T(X)$

$C_T(X) = \{\{P\}, \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \cup \{P\}, \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \cup \{P\}\}$

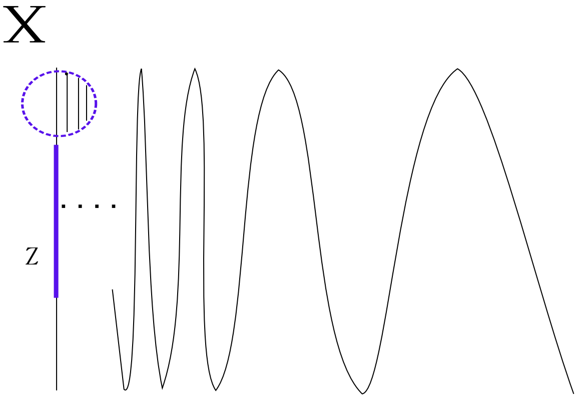
Definición

Una compactación del rayo $R = (0, 1]$ es un espacio compacto X que contiene una copia topológica R' de R la cual es un subconjunto denso en X. Al conjunto $Z = X \setminus R'$ lo llamamos el residuo de la compactación.

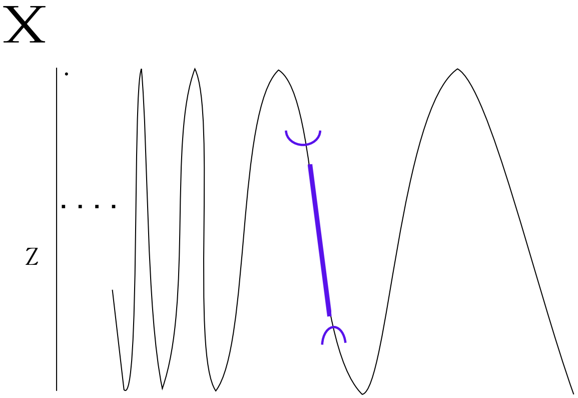
Ejemplo



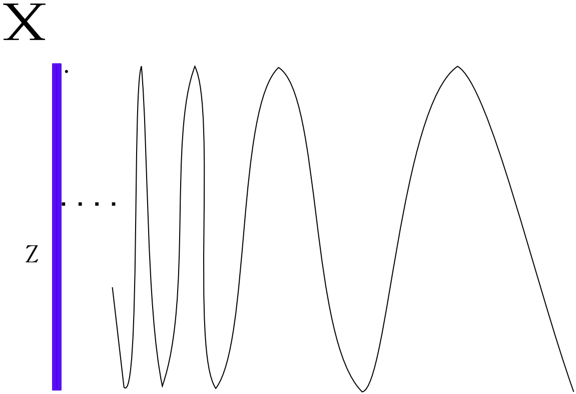
Ejemplo



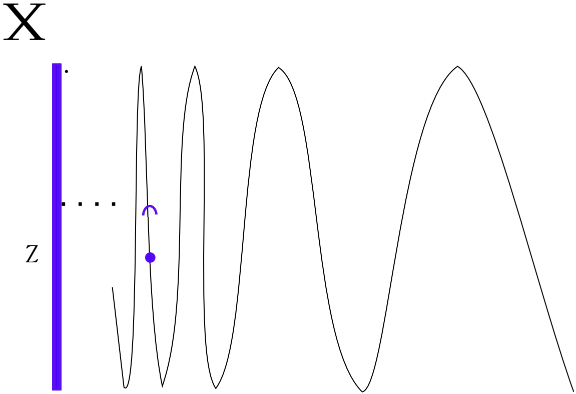
Ejemplo



Ejemplo



Ejemplo



Lema

Sea Z un continuo. Si X es una compactación de $R = (0, 1]$ con residuo Z, entonces

$$C_T(X) = C(R) \cup \{Z\} \cup \{A \in C(X) : A \text{ es homeomorfo a } X\}$$

Continuo de Elsa

Decimos que X es un continuo de Elsa, si X es la compactación del rayo R con residuo el arco J.

Continuo de Elsa

Decimos que X es un continuo de Elsa, si X es la compactación del rayo R con residuo el arco J.

Teorema

Si X es un continuo de Elsa, entonces $C_T(X)$ es denso en $C(X)$.

GRACIAS.

D. P. Bellamy, *Some Topics in Modern Continuo Theory, in Continua Docompositions Man- ifolds*, (R. H. Bing, W. T. Eaton And M. P. Starbird, eds.), University of Texas Press, (1983), 1-26

W. Lewis, *Continuous Curves of Pseudo-arcs*, Houston J. Math., **11** (1985), 91-99.