Sobre la clase $\mathcal{P}$

José Luis Suárez López
FCFM-BUAP

XI Taller Estudiantil Teoría de Continuos y sus Hipererspacios

Octubre 2016

Preliminares.

Preliminares.

Los hiperespacios son ciertas familias de subconjuntos de un espacio topológico, X, con alguna característica particular. Los más conocidos son:

$$2^X = \{F \subset X : F \text{ es no vacío y cerrado en } X\}$$

$$C(X) = \{F \in 2^X : F \text{ es conexo}\}.$$

En particular, cuando X es un continuo, a $C(X)$ se le conoce como el hiperespacios de subcontinuos del continuo X.

Teorema

Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es un continuo.

El hiperespacio $C(p, X)$.

El hiperespacio $C(p, X)$.

Definición

Sean X un continuo y A un subcontinuo propio de X.
Definimos $C(A, X) = \{B \in C(X) : A \subset B\}$.

El hiperespacio $C(p, X)$.

Definición

Sean X un continuo y A un subcontinuo propio de X.
Definimos $C(A, X) = \{B \in C(X) : A \subset B\}$.

En particular nos interesan estos hiperespacios cuando $A = \{p\}$ con $p \in X$.
Es decir, los hiperespacios de la forma $C(\{p\}, X) = \{B \in C(X) : p \in B\}$,
los cuales denotaremos sólo por $C(p, X)$.

Teorema

Si X un continuo, entonces $C(p, X)$ es un continuo para cada $p \in X$.

La prueba del teorema anterior se sigue de los siguientes dos hechos:

- Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ tal que $p \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces si el límite de esta sucesión existe también contiene al punto p, de tal manera que $C(p, X)$ es cerrado en $C(X)$.
- Podemos probar usando arcos ordenados que $C(p, X)$ es arco-conexo y así $C(p, X)$ es conexo.

Lema

Sean X un continuo y $A \in C(X) \setminus \{X\}$. Entonces $C(A, X)$ es una arco con extremos A y X, si y sólo si, cualesquiera par de elementos de $C(A, X)$ se pueden comparar, es decir, si $B, B^{'} \in C(A, X)$ se tiene que $B \subset B^{'}$ o $B^{'} \subset B$.

Teorema

Sean X un arco con extremos a y b. Consideremos $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:

a) Si $p \in \{a, b\}$, entonces $C(p, X)$ es un arco.

b) Si $p \notin \{a, b\}$, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda.

Teorema

Sean X un arco con extremos a y b. Consideremos $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:

a) Si $p \in \{a, b\}$, entonces $C(p, X)$ es un arco.

b) Si $p \notin \{a, b\}$, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda.

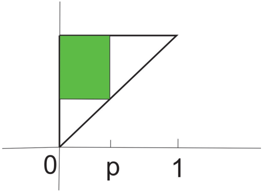


Figura: $C(p, [0, 1])$.

Teorema

Si X es una curva cerrada simple, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda para cada $p \in X$.

Teorema

Si X es una curva cerrada simple, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda para cada $p \in X$.

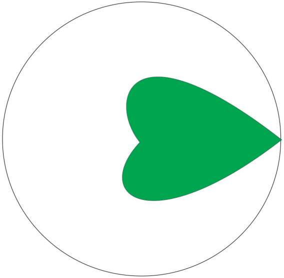


Figura: $C(p, S^1)$.

Definición

Sea X un continuo. Decimos que X es **descomponible** si puede ser escrito como la unión de dos de sus subcontinuos propios. En caso contrario diremos que X es **indescomponible**.

Definición

Sea X un continuo. Decimos que X es **descomponible** si puede ser escrito como la unión de dos de sus subcontinuos propios. En caso contrario diremos que X es **indescomponible**.

Definición

Un continuo X es hereditariamente descomponible (indescomponible) si cada uno de subcontinuos propios, no degenerados es descomponible (indescomponible).

Lema

Sea X un continuo. Entonces X es hereditariamente indescomponible si, y sólo si, $C(p, X)$ es un arco para cada $p \in X$.

Definición

Sean X un continuo y $a, b \in X$ distintos. Diremos que (X, a, b) es **arco-similar** si $C(p, X)$ es un arco para $p \in \{a, b\}$ y $C(p, X)$ es una $2-$celda siempre que $p \notin \{a, b\}$.

Definición

Sean X un continuo y $a, b \in X$ distintos. Diremos que (X, a, b) es **arco-similar** si $C(p, X)$ es un arco para $p \in \{a, b\}$ y $C(p, X)$ es una $2-$celda siempre que $p \notin \{a, b\}$.

Figura: Arco con extremos a y b.

Definición

Un continuo X es **círculo similar**, si para cada $p \in X$, $C(p, X)$ es una $2-$celda.

Definición

Un continuo X es **círculo similar**, si para cada $p \in X$, $C(p, X)$ es una $2-$celda.

Observación

La curva cerrada simple es círculo similar.

Definición

Sean X un continuo y $p \in X$. Diremos que p es un punto extremo del continuo X, si para cualesquiera $A, B \in C(p, X)$, tenemos que A y B son comparables.

Teorema

Sean X un continuo indescomponible tal que sus subcontinuos propios no degenerados son arcos, y $p \in X$. Tenemos que las siguientes condiciones se cumplen:

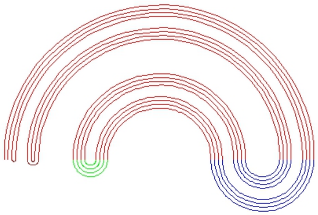
a) Si p es un punto extremo de X, entonces $C(p, X)$ es un arco.

b) Si p no es un punto extremo de X, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda.

Teorema

Sean X un continuo indescomponible tal que sus subcontinuos propios no degenerados son arcos, y $p \in X$. Tenemos que las siguientes condiciones se cumplen:

a) Si p es un punto extremo de X, entonces $C(p, X)$ es un arco.
b) Si p no es un punto extremo de X, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda.

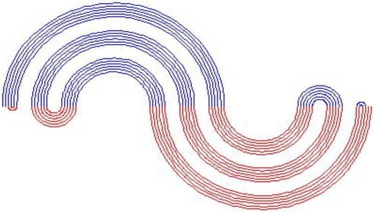


Corolario

Sea X un continuo indescomponible. Si X tiene exactamente dos puntos extremos, digamos a y b, y todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos, entonces X es arco similar.

Corolario

Sea X un continuo indescomponible. Si X tiene exactamente dos puntos extremos, digamos a y b, y todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos, entonces X es arco similar.



La clase $\mathcal{P}$

La clase $\mathcal{P}$

Definición

Un continuo X pertenece a la clase $\mathcal{P}$, si $C(p, X)$ es un arco o una 2$-$celda para cada $p \in X$, y el conjunto $\{p \in X : C(p, X) \text{ es un arco}\}$ es a lo más numerable.

La clase $\mathcal{P}$

Definición

Un continuo X pertenece a la clase $\mathcal{P}$, si $C(p,X)$ es un arco o una $2-$celda para cada $p \in X$, y el conjunto $\{p \in X : C(p,X) \text{ es un arco}\}$ es a lo más numerable.

Observación

Los continuos arco-similares y círculo similares están en la clase $\mathcal{P}$.

Teorema

Sea X un continuo. Entonces X es un arco si, y sólo si, X es arco similar y descomponible.

Teorema

Sea X un continuo. Entonces X es un arco si, y sólo si, X es arco similar y descomponible.

Teorema

Sea X un continuo. Entonces X es una curva cerrada simple si, y sólo si, X es círculo similar y descomponible.

Teorema

Sea X un continuo. Entonces X es arco similar si, y sólo si, X tiene exactamente dos puntos extremos, digamos a y b, y todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos.

Teorema

Sea X un continuo. Entonces X es círculo similar si, y sólo si, X no tiene puntos extremos y todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos.

Gracias por su atención.

Referencias

- A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.
- K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, Academic Press, New York, N. Y., 1966.
- K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.
- P. Pellicer-Covarrubias, *The hyperspaces* $C(p, X)$, Top. Proc., 27 (1) (2003), pág. 259-285.