Sobre la invarianza y coinvarianza de la T-aditividad de la función de Jones

Angela Martínez Rodríguez

Enrique Castañeda Alvarado
Félix Capulín Pérez
Norberto Ordoñez Ramirez

Universidad Autónoma del Estado de México

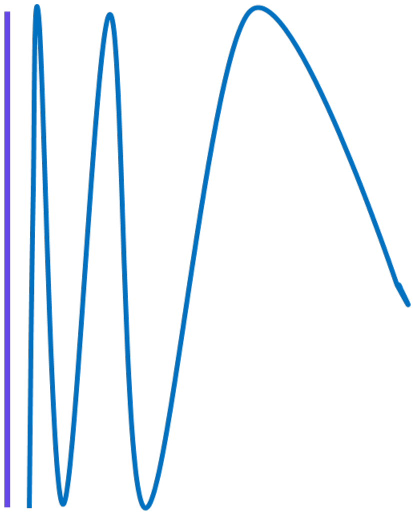
6 de octubre de 2016

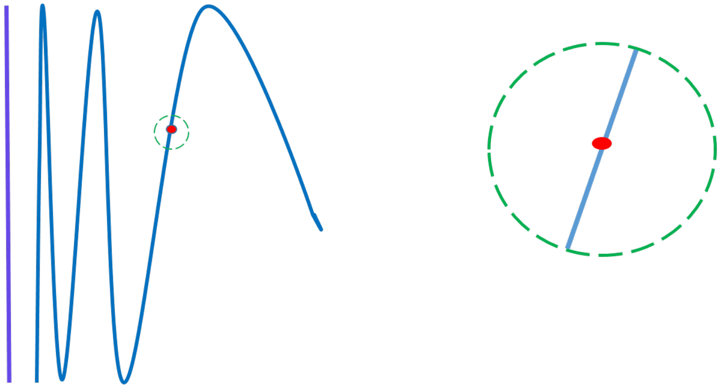
Dado X un continuo definimos la función T de Jones del conjunto potencia de X en si mismo como:

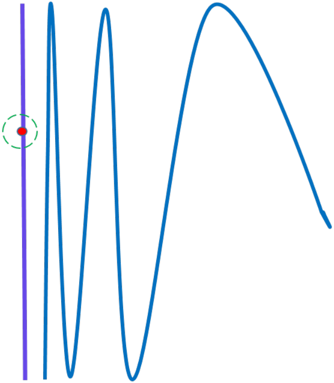
$$T(A) = \{x \in X : \text{para cada } W \text{ subcontinuo de } X \text{ tal que } x \in int(W),\ \ W \cap A \neq \emptyset\}.$$

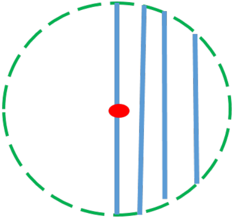
Dado X un continuo definimos la función T de Jones del conjunto potencia de X en si mismo como:

$$T(A) = \{x \in X : \text{para cada } W \text{ subcontinuo de } X \text{ tal que } x \in int(W),\ W \cap A \neq \emptyset\}.$$









Sea X un continuo y $A, B \subset X$

- $A \subset T(A)$
- $T(A)$ es siempre cerrado.
- $T(\emptyset) = \emptyset$.
- Si A es un subcontinuo de X entonces $T(A)$ también lo es.
- Si $A \subset B$, $T(A) \subset T(B)$.
- $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$.

Sea X un continuo y $A, B \subset X$

- $A \subset T(A)$
- $T(A)$ es siempre cerrado.
- $T(\emptyset) = \emptyset$.
- Si A es un subcontinuo de X entonces $T(A)$ también lo es.
- Si $A \subset B$, $T(A) \subset T(B)$.
- $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$.

Sea X un continuo y $A, B \subset X$

- $A \subset T(A)$
- $T(A)$ es siempre cerrado.
- $T(\emptyset) = \emptyset$.
- Si A es un subcontinuo de X entonces $T(A)$ también lo es.
- Si $A \subset B$, $T(A) \subset T(B)$.
- $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$.

Sea X un continuo y $A, B \subset X$

- $A \subset T(A)$
- $T(A)$ es siempre cerrado.
- $T(\emptyset) = \emptyset$.
- Si A es un subcontinuo de X entonces $T(A)$ también lo es.
- Si $A \subset B$, $T(A) \subset T(B)$.
- $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$.

Sea X un continuo y $A, B \subset X$

- $A \subset T(A)$
- $T(A)$ es siempre cerrado.
- $T(\emptyset) = \emptyset$.
- Si A es un subcontinuo de X entonces $T(A)$ también lo es.
- Si $A \subset B$, $T(A) \subset T(B)$.
- $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$.

Sea X un continuo y $A, B \subset X$

- $A \subset T(A)$
- $T(A)$ es siempre cerrado.
- $T(\emptyset) = \emptyset$.
- Si A es un subcontinuo de X entonces $T(A)$ también lo es.
- Si $A \subset B$, $T(A) \subset T(B)$.
- $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$.

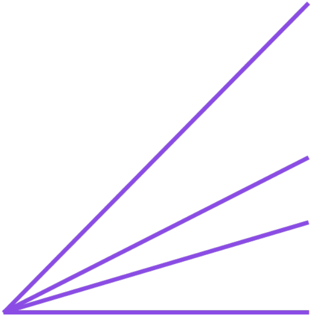
Sea X un continuo y $A, B \subset X$

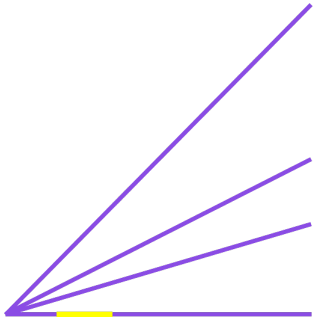
- $A \subset T(A)$
- $T(A)$ es siempre cerrado.
- $T(\emptyset) = \emptyset$.
- Si A es un subcontinuo de X entonces $T(A)$ también lo es.
- Si $A \subset B$, $T(A) \subset T(B)$.
- $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$.

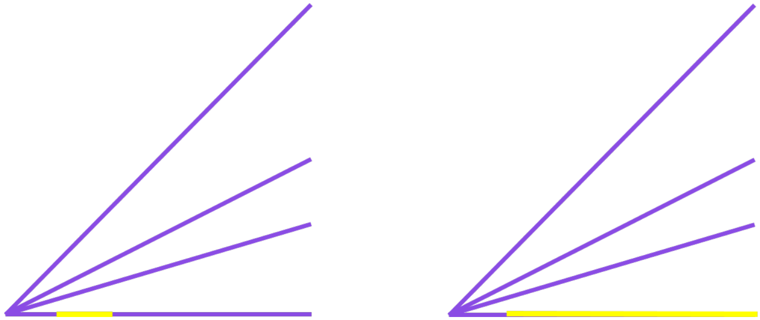
Definición

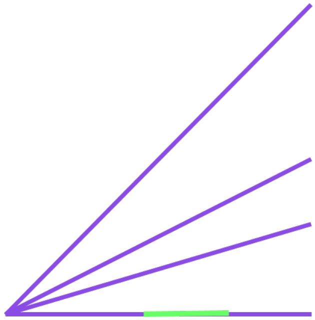
Decimos que X es T-aditivo si para cualesquiera A y B subconjuntos cerrados de X, $T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$.

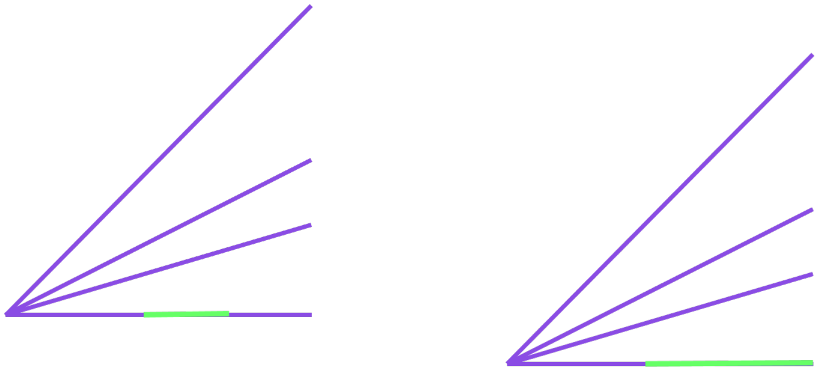
Ejemplo de un espacio T-aditivo

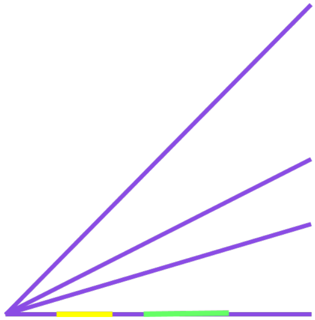


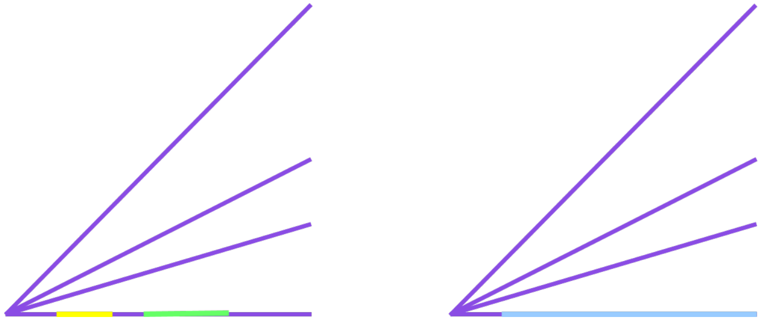




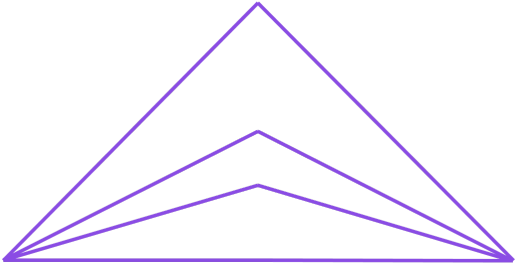


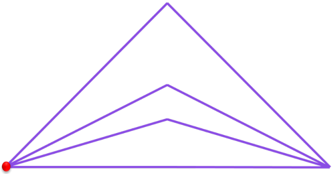


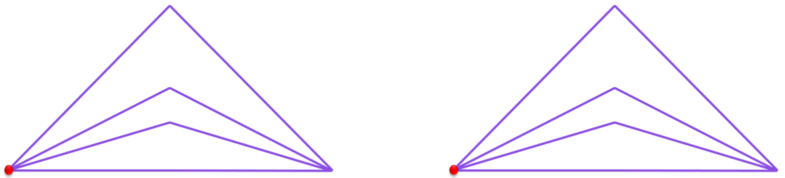


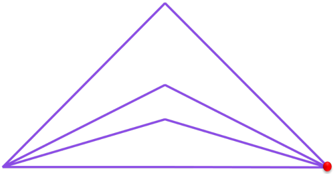


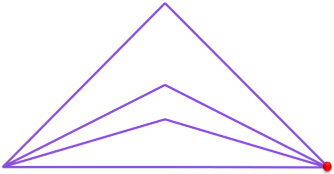
Ejemplo de un espacio no T-aditivo

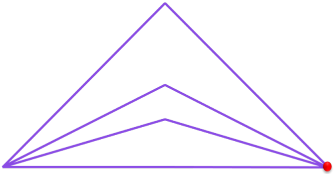


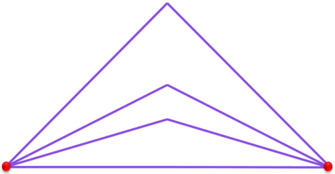


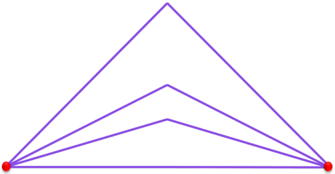


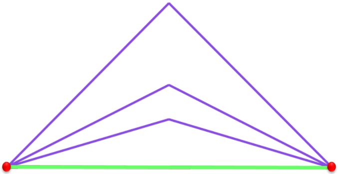












Espacios T-aditivos

Algunos espacios T-aditivos son:

- Continuos localmente conexos.
- Continuos hereditariamente unicoherentes.
- Continuos débilmente irreducibles.
- Continuos irreducibles.
- Continuos indescomponibles.

Algunos espacios T-aditivos son:

- Continuos localmente conexos.
- Continuos hereditariamente unicoherentes.
- Continuos débilmente irreducibles.
- Continuos irreducibles.
- Continuos indescomponibles.

Espacios T-aditivos

Algunos espacios T-aditivos son:

- Continuos localmente conexos.
- Continuos hereditariamente unicoherentes.
- Continuos débilmente irreducibles.
- Continuos irreducibles.
- Continuos indescomponibles.

Algunos espacios T-aditivos son:

- Continuos localmente conexos.
- Continuos hereditariamente unicoherentes.
- Continuos débilmente irreducibles.
- Continuos irreducibles.
- Continuos indescomponibles.

Algunos espacios T-aditivos son:

- Continuos localmente conexos.
- Continuos hereditariamente unicoherentes.
- Continuos débilmente irreducibles.
- Continuos irreducibles.
- Continuos indescomponibles.

Sea f una función continua y suprayectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y, decimos que f es:

- Un **homeomorfismo** si f es inyectiva y la función inversa f^{-1} es continua.
- **Abierta** si la imagen bajo f de cada conjunto abierto de X en un conjunto abierto de Y es abierto.
- **Atómica** si para cualquier subcontinuo, K, de X tal que el conjunto $f(K)$ es no degenerado, se tiene que $f^{-1}(f(K)) = K$.

Algunas clases de funciones

Sea f una función continua y suprayectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y, decimos que f es:

- Un **homeomorfismo** si f es inyectiva y la función inversa f^{-1} es continua.
- **Abierta** si la imagen bajo f de cada conjunto abierto de X en un conjunto abierto de Y es abierto.
- **Atómica** si para cualquier subcontinuo, K, de X tal que el conjunto $f(K)$ es no degenerado, se tiene que $f^{-1}(f(K)) = K$.

Sea f una función continua y suprayectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y, decimos que f es:

- Un **homeomorfismo** si f es inyectiva y la función inversa f^{-1} es continua.
- **Abierta** si la imagen bajo f de cada conjunto abierto de X en un conjunto abierto de Y es abierto.
- **Atómica** si para cualquier subcontinuo, K, de X tal que el conjunto $f(K)$ es no degenerado, se tiene que $f^{-1}(f(K)) = K$.

Algunas clases de funciones

Sea f una función continua y suprayectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y, decimos que f es:

- Un **homeomorfismo** si f es inyectiva y la función inversa f^{-1} es continua.
- **Abierta** si la imagen bajo f de cada conjunto abierto de X en un conjunto abierto de Y es abierto.
- **Atómica** si para cualquier subcontinuo, K, de X tal que el conjunto $f(K)$ es no degenerado, se tiene que $f^{-1}(f(K)) = K$.

Sea f una función continua y suprayectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y, decimos que f es:

- **monótona** si para cualquier punto $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es conexo.
- **Confluente** si para cualquier subcontinuo, Q, de Y y cualquier componente, K, de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(K) = Q$.
- **Ligera** si $f^{-1}(f(x))$ es totalmente disconexo, para cualquier punto x de X.

Sea f una función continua y suprayectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y, decimos que f es:

- **monótona** si para cualquier punto $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es conexo.
- **Confluente** si para cualquier subcontinuo, Q, de Y y cualquier componente, K, de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(K) = Q$.
- **Ligera** si $f^{-1}(f(x))$ es totalmente disconexo, para cualquier punto x de X.

Sea f una función continua y suprayectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y, decimos que f es:

- **monótona** si para cualquier punto $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es conexo.
- **Confluente** si para cualquier subcontinuo, Q, de Y y cualquier componente, K, de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(K) = Q$.
- **Ligera** si $f^{-1}(f(x))$ es totalmente disconexo, para cualquier punto x de X.

Sea f una función continua y supráyectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y, decimos que f es:

- **monótona** si para cualquier punto $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es conexo.
- **Confluente** si para cualquier subcontinuo, Q, de Y y cualquier componente, K, de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(K) = Q$.
- **Ligera** si $f^{-1}(f(x))$ es totalmente disconexo, para cualquier punto x de X.

Definición

Diremos que la T-aditividad es **invariante** bajo funciones de la clase $\mathcal{C}$, si para cada $f : X \longrightarrow Y$ en la clase $\mathcal{C}$, si X es T-aditivo implica que Y es T-aditivo.

Definición

Diremos que la T-aditividad es **coinvariante** bajo funciones de la clase $\mathcal{C}$, si para cada $f : X \longrightarrow Y$ en la clase $\mathcal{C}$, si Y es T-aditivo implica que X es T-aditivo.

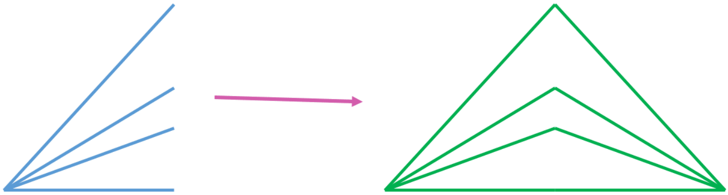
Definición

Diremos que la T-aditividad es **invariante** bajo funciones de la clase $\mathcal{C}$, si para cada $f : X \longrightarrow Y$ en la clase $\mathcal{C}$, si X es T-aditivo implica que Y es T-aditivo.

Definición

Diremos que la T-aditividad es **coinvariante** bajo funciones de la clase $\mathcal{C}$, si para cada $f : X \longrightarrow Y$ en la clase $\mathcal{C}$, si Y es T-aditivo implica que X es T-aditivo.

La T-aditividad no es invariante bajo funciones continuas y ligeras.



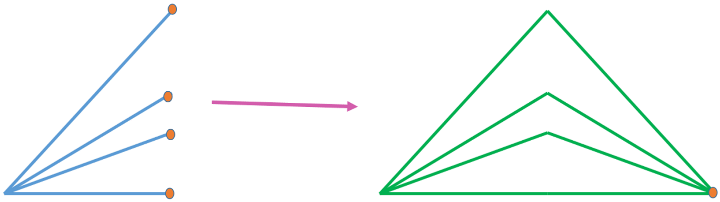
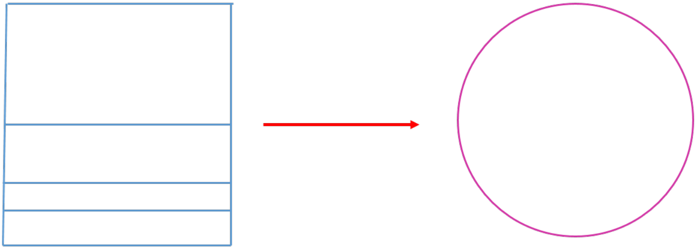
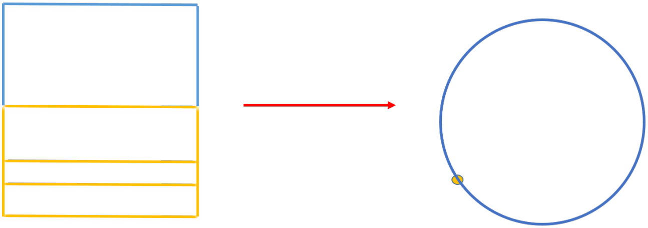


Figura: Notemos que f es continua y ligera.

La T-aditividad no es coinvariante bajo funciones continuas, monótonas y confluentes.





La T-aditividad es invariante bajo funciones monótonas

TEOREMA

La T aditividad es invariante bajo funciones monótonas.

La T-aditividad es invariante bajo funciones cuasi-monótonas

Definición

Una función entre continuos $f : X \longrightarrow Y$ es:

- **Casi-monótona** si para cualquier continuo Q de Y con interior no vacío, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es conexo.
- **Cuasi-monótona** para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío, se tiene que $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y para cada componente D de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(D) = Q$.

Definición

Una función entre continuos $f : X \longrightarrow Y$ es:

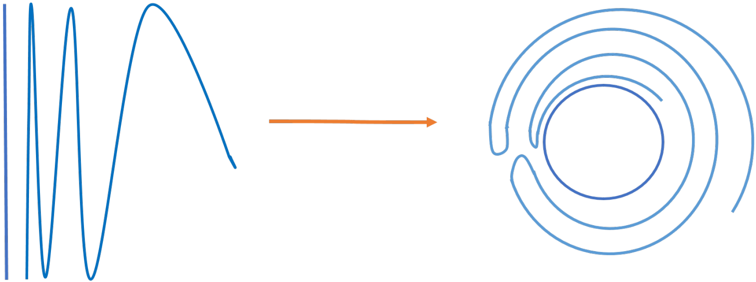
- **Casi-monótona** si para cualquier continuo Q de Y con interior no vacío, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es conexo.
- **Cuasi-monótona** para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío, se tiene que $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y para cada componente D de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(D) = Q$.

La T-aditividad es invariante bajo funciones cuasi-monótonas

Definición

Una función entre continuos $f : X \longrightarrow Y$ es:

- **Casi-monótona** si para cualquier continuo Q de Y con interior no vacío, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es conexo.
- **Cuasi-monótona** para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío, se tiene que $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y para cada componente D de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(D) = Q$.



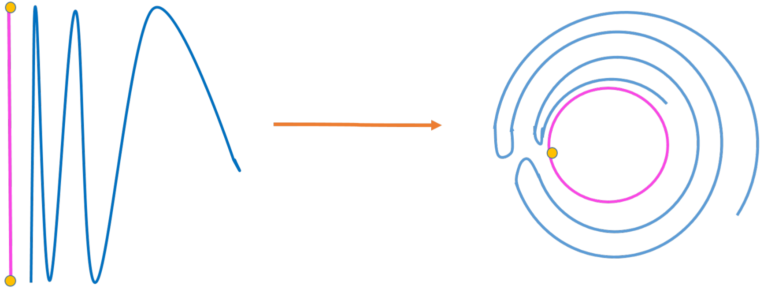
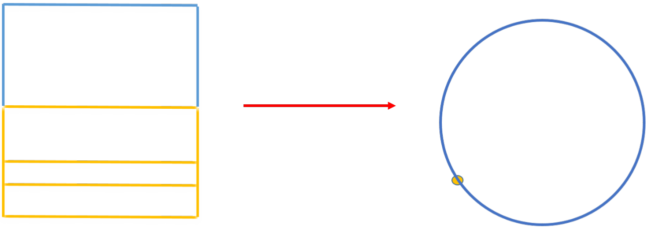


Figura: f es continua, casi-monónotona y cuasi-monótona

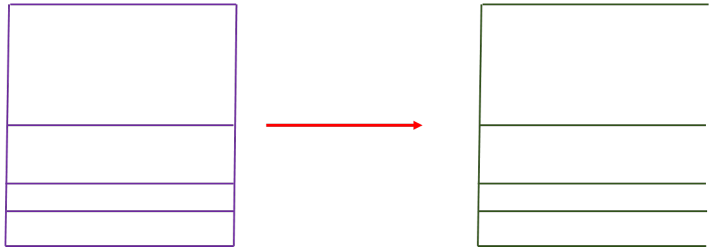
TEOREMA

La T aditividad es invariante bajo funciones cuasi-monótonas.

La T-aditividad no es coinvariante bajo funciones cuasi-monótonas



La T-aditividad no es coinvariante bajo funciones abiertas



La T-aditividad es invariante bajo funciones:

- monótonas
- homeomorfismos
- atómicas
- cuasi-monótonas
- hereditariamente confluentes
- casimonótonas

La T-aditividad es invariante bajo funciones:

- monótonas
- homeomorfismos
- atómicas
- cuasi-monótonas
- hereditariamente confluentes
- casimonótonas

La T-aditividad es invariante bajo funciones:

- monótonas
- homeomorfismos
- atómicas
- cuasi-monótonas
- hereditariamente confluentes
- casimonótonas

La T-aditividad es invariante bajo funciones:

- monótonas
- homeomorfismos
- atómicas
- cuasi-monótonas
- hereditariamente confluentes
- casimonótonas

La T-aditividad es invariante bajo funciones:

- monótonas
- homeomorfismos
- atómicas
- cuasi-monótonas
- hereditariamente confluentes
- casimonótonas

La T-aditividad es invariante bajo funciones:

- monótonas
- homeomorfismos
- atómicas
- cuasi-monótonas
- hereditariamente confluentes
- casimonótonas

La T-aditividad es invariante bajo funciones:

- monótonas
- homeomorfismos
- atómicas
- cuasi-monótonas
- hereditariamente confluentes
- casimonótonas

Referencias

- Sergio Macías, *Topics on Continua*, Taylor and Francis Group, 2005.
- Maćkowiak, *Continuous mappings on continua*, Dissertationes Math., 158, 1979.
- A. D. Wallace, *Quasi-monotone transformation*, Duke Math. J. 7, 1940, pp. 136-145.