Suavidad en Continuos

Rodrigo Zúñiga Trejo
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Octubre 2016

Introducción

En esta plática ilustraremos con ejemplos las definiciones de suavidad y suavidad por arcos, así como algunos hechos conocidos de estas dos propiedades.

En esta plática X siempre denotará un continuo (métrico, conexo, compacto y no vacío).

Definición

Se dice que un continuo X es conexo por arcos (arco conexo), si para cualesquiera dos puntos z y p de X, existe una función continua $\sigma : [0,1] \to X$ tal que $\sigma(0) = z$ y $\sigma(1) = p$.

En esta plática X siempre denotará un continuo (métrico, conexo, compacto y no vacío).

Definición

Se dice que un continuo X es conexo por arcos (arco conexo), si para cualesquiera dos puntos z y p de X, existe una función continua $\sigma : [0,1] \to X$ tal que $\sigma(0) = z$ y $\sigma(1) = p$.

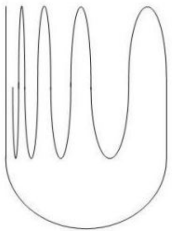


Figura: Círculo de Varsovia

En esta plática X siempre denotará un continuo (métrico, conexo, compacto y no vacío).

Definición

Se dice que un continuo X es conexo por arcos (arco conexo), si para cualesquiera dos puntos z y p de X, existe una función continua $\sigma : [0,1] \to X$ tal que $\sigma(0) = z$ y $\sigma(1) = p$.

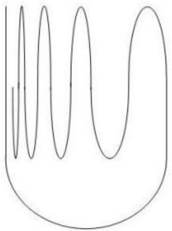


Figura: Círculo de Varsovia

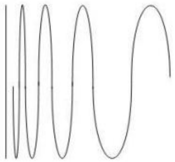


Figura: Continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$

En esta plática X siempre denotará un continuo (métrico, conexo, compacto y no vacío).

Definición

Se dice que un continuo X es conexo por arcos (arco conexo), si para cualesquiera dos puntos z y p de X, existe una función continua $\sigma : [0,1] \to X$ tal que $\sigma(0) = z$ y $\sigma(1) = p$.

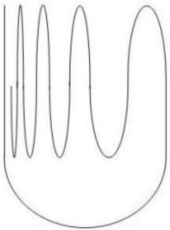


Figura: Círculo de Varsovia

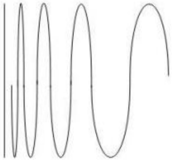


Figura: Continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$

Diremos que X es únicamente arco conexo, si para cualesquiera $z, p \in X$ existe exactamente un arco entre p y z.

Suavidad por arcos

Definición

Sea X únicamente arco conexo. Diremos que X es suave por arcos en un punto p de X si para toda sucesión $\{z_n\}_{n\in N}$ de puntos de X que convergen a $z \in X$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} pz_n = pz$.

Suavidad por arcos

Definición

Sea X únicamente arco conexo. Diremos que X es suave por arcos en un punto p de X si para toda sucesión $\{z_n\}_{n\in N}$ de puntos de X que convergen a $z \in X$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} pz_n = pz$.

Diremos que X es suave por arcos si existe un punto $p \in X$ tal que X es suave por arcos en p.

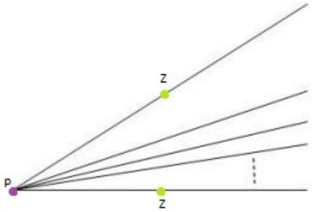


Figura: Abanico armónico

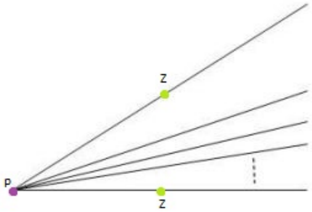
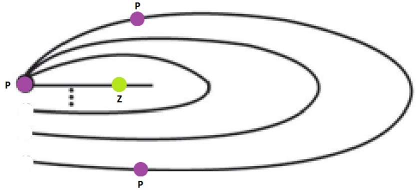


Figura: Abanico armónico



Suavidad

Definición

Un continuo X es suave en un punto p, con respecto a un punto z, si para cada sucesión $\{z_n\}_{n\in N}$ de puntos en X que convergen a $z \in X$ y cada subcontinuo K de X que contiene a p y z, existe una sucesión $\{K_n\}_{n\in N}$ de subcontinuos de X, con p y z_n elementos de K_n, que convege a K.

Suavidad

Definición

Un continuo X es suave en un punto p, con respecto a un punto z, si para cada sucesión $\{z_n\}_{n\in N}$ de puntos en X que convergen a $z \in X$ y cada subcontinuo K de X que contiene a p y z, existe una sucesión $\{K_n\}_{n\in N}$ de subcontinuos de X, con p y z_n elementos de K_n, que convege a K.

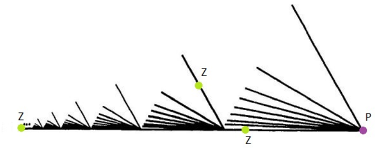
- Diremos que X es suave en un punto p si X es suave en p con respecto a cada punto $z \in X$.

Suavidad

Definición

Un continuo X es suave en un punto p, con respecto a un punto z, si para cada sucesión $\{z_n\}_{n\in N}$ de puntos en X que convergen a $z \in X$ y cada subcontinuo K de X que contiene a p y z, existe una sucesión $\{K_n\}_{n\in N}$ de subcontinuos de X, con p y z_n elementos de K_n, que convege a K.

- Diremos que X es suave en un punto p si X es suave en p con respecto a cada punto $z \in X$.



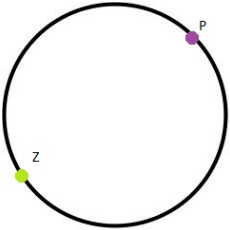


Figura: Circunferencia

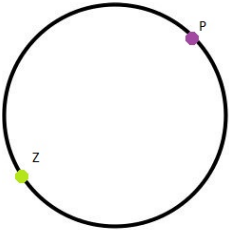
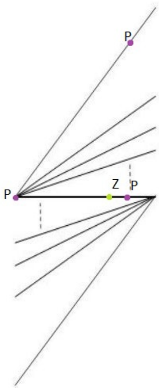


Figura: Circunferencia



- ¿Qué se puede decir acerca de suavidad y suavidad por arcos?

- ¿Qué se puede decir acerca de suavidad y suavidad por arcos?
- Suavidad no implica suavidad por arcos.

- ¿Qué se puede decir acerca de suavidad y suavidad por arcos?
- Suavidad no implica suavidad por arcos.
- Suavidad por arcos sí implica suavidad.

Proposición

Si X es suave por arcos en un punto p, entonces X es localmente conexo en p.

Proposición

Si X es suave por arcos en un punto p, entonces X es localmente conexo en p.

Recordemos que X es localmente conexo en un punto x, si para toda vecindad U de X, existe V abierto y conexo en X tal que $x \in V \subset U$.

Proposición

Si X es suave por arcos en un punto p, entonces X es localmente conexo en p.

Recordemos que X es localmente conexo en un punto x, si para toda vecindad U de X, existe V abierto y conexo en X tal que $x \in V \subset U$.

Proposición

Si X es suave en un punto p, entonces X es localmente conexo en p.

Isabel Puga, Miriam Torres. Colloquium Mathematicae 113.2 (2008). *Ultrasmoothness in dendroids*, 319-331.

Janusz J. Charatonik, Wlodzimiers J. Charatonik. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 41.1 (2000). *Smoothness and property of Kelly*, 123-132.

T. Máckowiak Fundamenta Mathematicae 85.1 (1974) *On smooth continua*, 79-95.

¡Gracias!

Correo: ankh_rodri@live.com.mx