$HS_n(X)$ y funciones universales

Miguel Angel Lara Mejía

Facultad de Ciencias, UAEMéx

Octubre de 2016

En *On the hyperspace suspension of a continuum*, Escobedo, López y Macías muestran que la función inducida en el hiperespacio suspensión de una función continua entre continuos cuya imagen tiene semimargen suprayectivo cero es universal. En esta platica se busca extender el resultado para el n-ésimo hiperespacio suspensión.

Definición

Un continuo es un espacio métrico compacto conexo y no vacío.

Definición

Sean X un continuo y n un entero positivo. Consideremos los siguientes hiperespacios.

- $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$,
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$.
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos }\}$.

Definición

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $HS_n(X)$ el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$. Dicho espacio es llamado n-ésimo hiperespacio suspensión.

Definición

Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. La función $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ dada por $C_n(f)(A) = f(A)$ es la inducida por f.

Definición

Definimos la función inducida

$$HS_n(f) : HS_n(X) \to HS_n(Y)$$

por

$$HS_n(f)\left(\rho_X^{n,m}(A)\right) = \rho_Y^{n,m}(C_n(f)(A))$$

donde $\rho_X^{n,m} : C_n(X) \to HS_n(X)$ es la proyección natural.

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{C_n(f)} & C_n(Y) \\ \rho_X^{n,m} \downarrow & & \downarrow \rho_Y^{n,m} \\ HS_n(X) & \xrightarrow[HS_n(f)]{} & HS_n(Y) \end{array}$$

Definición

Una función continua $f : X \to Y$ entre continuos es llamada universal si para cada función continua $g : X \to Y$, existe un punto $x \in X$ tal que $g(x) = f(x)$.

1. Toda función universal es suprayectiva.
2. Si $f : X \to Y$ es una función universal entonces Y tiene la propiedad del punto fijo.
3. Toda función suprayectiva de un continuo sobre $[0, 1]$ es universal.

Definición

Un continuo X tiene semimargen suprayectivo cero si para cada subcontinuo de Z de $X \times X$ tal que $\pi_1(Z) = X$, $Z \cap \Delta_X \neq \emptyset$.

1. Todo continuo encadenable tiene semimargen suprayectivo cero.

Definición

Una función de tamaño para $C_n(X)$ es una función continua $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ tal que $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$ y $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$ para todo $A, B \in C_n(X)$.

Definición

Una función de Whitney es una función de tamaño que satisface que $\mu(A) < \mu(B)$ si $A \subset B$ y $A \neq B$ para todo $A, B \in C_n(X)$.

Definición

Una función $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ es de tamaño fuerte si

1. $\mu(A) = 0$ para todo $A \in F_n(X)$
2. $\mu(A) < \mu(B)$ si $A \subset B$, $A \neq B$ y $B \notin F_n(X)$.

Las funciones de tamaño fuerte son monótonas y abiertas.
La restricción de una función de tamaño fuerte a $C(X)$ es una función de Whitney.

Sea Y un continuo con semimargen suprayectivo cero. Si $f : X \to Y$ es una función continua de un continuo X sobre Y, entonces la función inducida $HS_n(f) : HS_n(X) \to HS_n(Y)$ es universal.