Modelos Universales Homotópicos en los n-ésimos Productos Simétricos de una Gráfica Finita

Marco A. Castillo Rubí
Enrique Castañeda Alvarado
Alfredo Cano Rodríguez
José Guadalupe Anaya Ortega

Facultad de Ciencias de la UAEMéx
XI Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios

Introducción

Un continuo es un espacio métrico conexo, compacto y no degenerado.

Introducción

Un continuo es un espacio métrico conexo, compacto y no degenerado.Dado un continuo X, y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$2^X = \{A \subset X : A \quad \text{es cerrado y no vacío}\}$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \quad \text{tiene a los más n puntos}\}$$

Introducción

Un continuo es un espacio métrico conexo, compacto y no degenerado.Dado un continuo X, y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$2^X = \{A \subset X : A \quad \text{es cerrado y no vacío}\}$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \quad \text{tiene a los más n puntos}\}$$

2^X-la métrica de Hausdorff.

Introducción

Un continuo es un espacio métrico conexo, compacto y no degenerado. Dado un continuo X, y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$2^X = \{A \subset X : A \quad \text{es cerrado y no vacío}\}$$

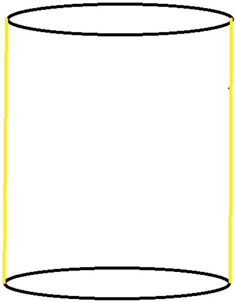
$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \quad \text{tiene a los más n puntos}\}$$

2^X-la métrica de Hausdorff.

$F_n(X)$ se llama n-ésimo producto simétrico de X.

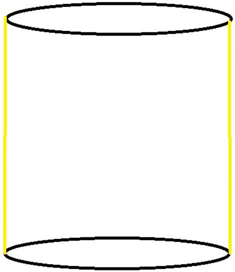
Homotopía

Intuitivamente, dos espacios son homotópicos si es posible deformar continuamente uno en el otro.



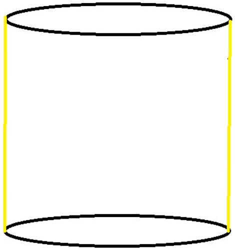
Homotopía

Intuitivamente, dos espacios son homotópicos si es posible deformar continuamente uno en el otro.



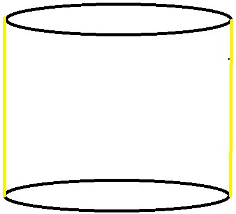
Homotopía

Intuitivamente,
dos espacios son homotópicos si es posible deformar continuamente uno en el otro.



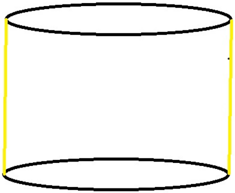
Homotopía

Intuitivamente, dos espacios son homotópicos si es posible deformar continuamente uno en el otro.



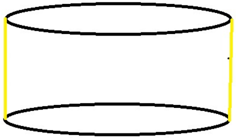
Homotopía

Intuitivamente, dos espacios son homotópicos si es posible deformar continuamente uno en el otro.



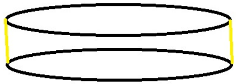
Homotopía

Intuitivamente,
dos espacios son homotópicos si es posible deformar continuamente uno en el otro.



Homotopía

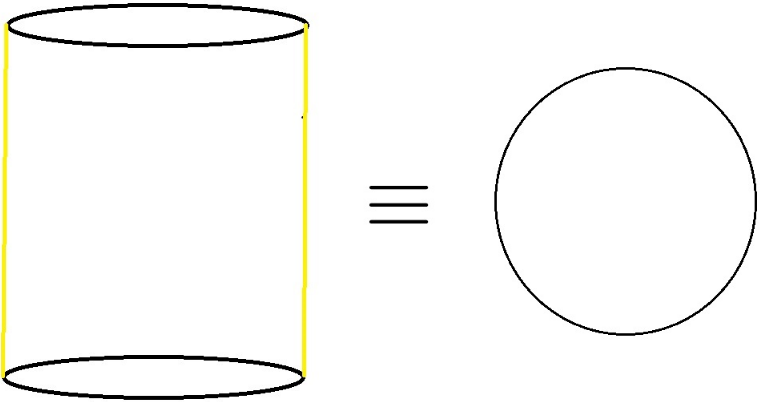
Intuitivamente, dos espacios son homotópicos si es posible deformar continuamente uno en el otro.



Homotopía

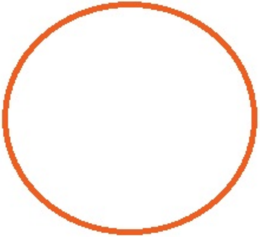
Intuitivamente, dos espacios son homotópicos si es posible deformar continuamente uno en el otro.

Homotopía



Homotopía

$\equiv$



Homotopía

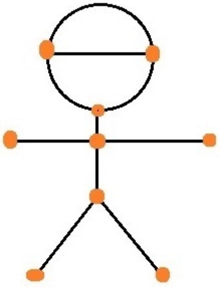
$$\text{Toro} \setminus \{\text{ punto}\} \equiv \text{figura del ocho}$$

Homotopía

Si T es un árbol en $G \quad \Rightarrow \quad G \equiv G/T$

Homotopía

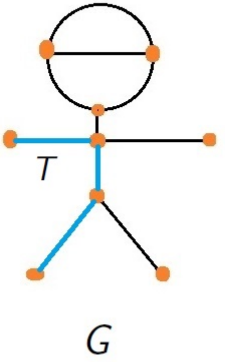
Si T es un árbol en $G \quad \Rightarrow \quad G \equiv G/T$



G

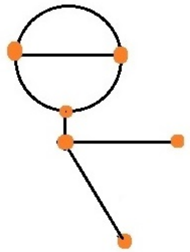
Homotopía

Si T es un árbol en G $\quad\Rightarrow\quad$ $G \equiv G/T$



Homotopía

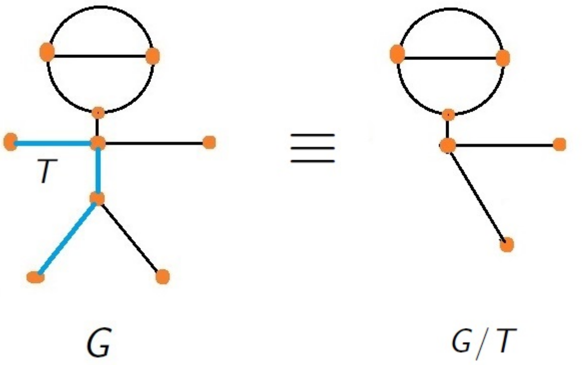
Si T es un árbol en $G \quad \Rightarrow \quad G \equiv G/T$



G/T

Homotopía

Si T es un árbol en $G \quad \Rightarrow \quad G \equiv G/T$

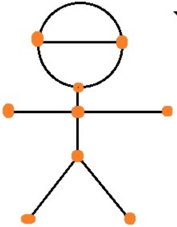


Gráficas finitas

La característica de Euler de una gráfica finita G

$$\chi(G) = V(G) - E(G)$$

Gráficas finitas

$\chi\Big($  $\Big) = 9 - 10$

$$= -1$$

Gráficas finitas

Propiedades:

$$\text{Si } G_1 \approx G_2 \quad \Rightarrow \quad \chi(G_1) = \chi(G_2)$$

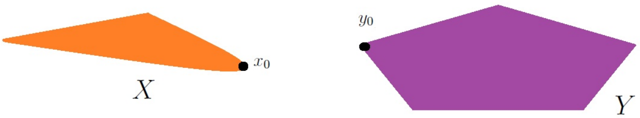
Gráficas finitas

Propiedades:

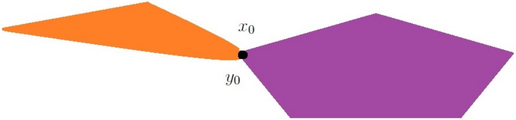
$$\text{Si } G_1 \approx G_2 \quad \Rightarrow \quad \chi(G_1) = \chi(G_2)$$

$$\text{Si } G_1 \equiv G_2 \quad \Rightarrow \quad \chi(G_1) = \chi(G_2)$$

Wedge

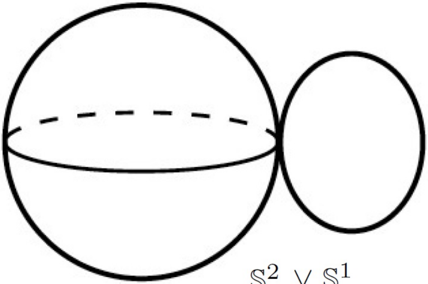


Wedge



$X \vee Y$

Wedge



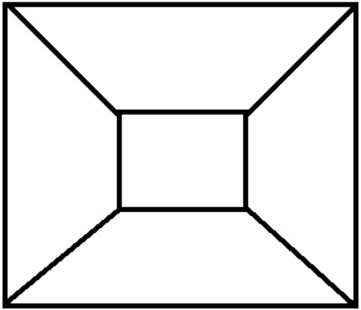
$\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$

Gráficas finitas

Decimos que un árbol T en una gráfica finita G es máximal si contiene todos los vértices de G

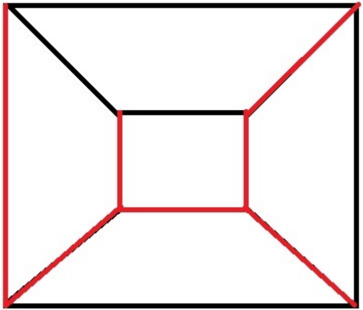
Gráficas finitas

Decimos que un árbol T en una gráfica finita G es máximal si contiene todos los vértices de G



Gráficas finitas

Decimos que un árbol T en una gráfica finita G es máximal si contiene todos los vértices de G



Gráficas finitas

Si T un árbol máximal en G

Gráficas finitas

Si T un árbol máximal en G

$$\Rightarrow \quad G \equiv G/T$$

Gráficas finitas

Si T un árbol máximal en G

$$\Rightarrow \quad G \equiv G/T$$

$$\Rightarrow \quad \chi(G) \;=\; \chi(G/T)$$

Gráficas finitas

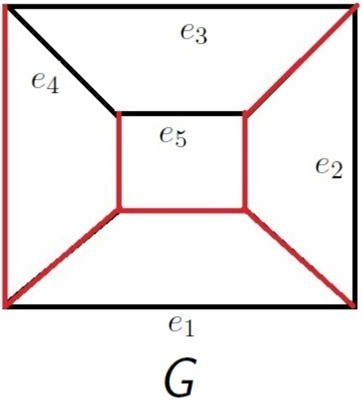
Si T un árbol máximal en G

$$\Rightarrow \quad G \equiv G/T$$

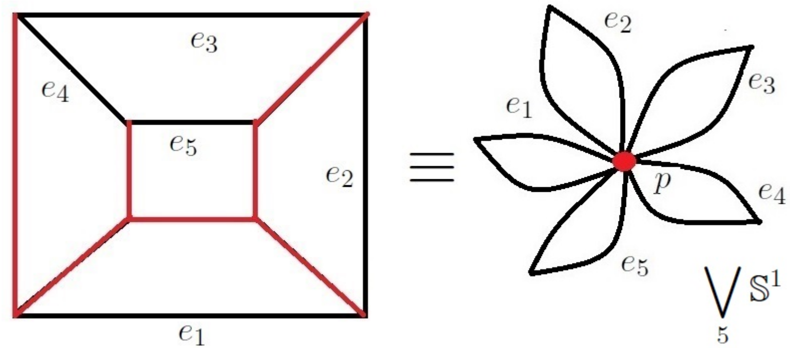
$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \chi(G) &= \chi(G/T) \\ V(G) - E(G) &= 1 - r \end{aligned}$$

donde r es el número de aristas que no están en T.

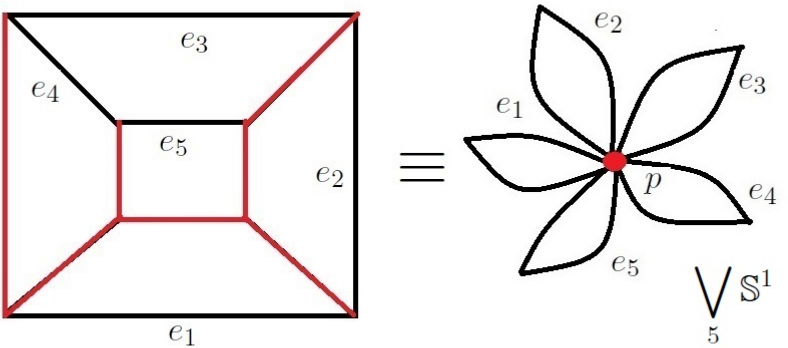
Gráficas finitas



Gráficas finitas



Gráficas finitas



$$\begin{aligned} V(G) - E(G) &= 1 - r \\ 8 - 12 &= 1 - 5 \end{aligned}$$

Gráficas finitas

$$V(G) - E(G) = 1 - r$$

despejando

Gráficas finitas

$$V(G) - E(G) = 1 - r$$

despejando

$$r = 1 - V(G) + E(G)$$

Gráficas finitas

Teorema:

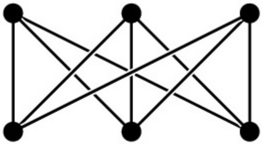
Sea G es una gráfica finita, entonces

$$G \equiv \bigvee_{r} \mathbb{S}^1$$

donde

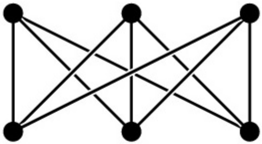
$$r = 1 - V(G) + E(G)$$

Ejemplo



$K_{3,3}$

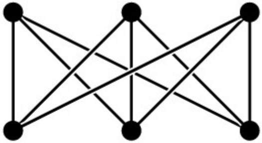
Ejemplo



$K_{3,3}$

$$V(G) = 6, \qquad E(G) = 9,$$

Ejemplo

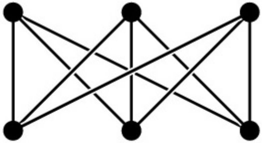


$K_{3,3}$

$V(G) = 6, \qquad E(G) = 9$, entonces

$$r = 1 - 6 + 9 = 4$$

Ejemplo



$K_{3,3}$

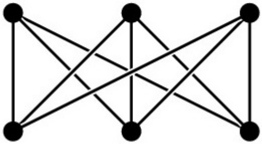
$V(G) = 6, \qquad E(G) = 9$, entonces

$$r = 1 - 6 + 9 = 4$$

Por lo tanto

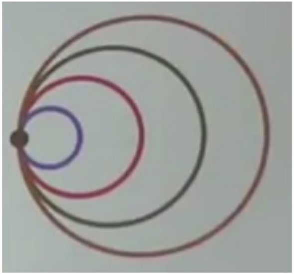
$$K_{3,3} \equiv \bigvee_{4} \mathbb{S}^1$$

Ejemplo



$K_{3,3}$

$$\equiv$$



$$\bigvee_4 \mathbb{S}^1$$

Clasificación

Teorema:

$$\text{Si} \quad X \equiv Y \quad \Rightarrow \quad F_n(X) \equiv F_n(X)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Clasificación

Teorema:

$$\text{Si} \quad X \equiv Y \quad \Rightarrow \quad F_n(X) \equiv F_n(X)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Clasificación

Teorema:
Sea G es una gráfica finita, entonces

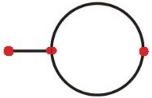
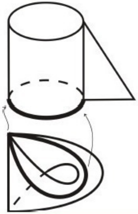
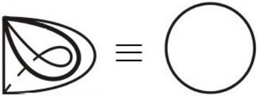
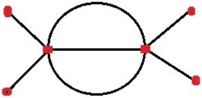
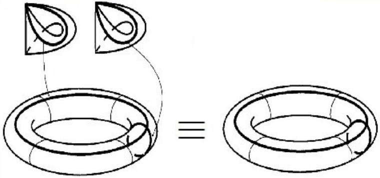
$$F_n(G) \equiv F_n\Big(\bigvee_r \mathbb{S}^1\Big)$$

donde

$$r = 1 - V(G) + E(G),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Clasificación

X	$F_2(X)$	r	$F_2\left(\bigvee_r \mathbb{S}^1\right)$
		1	
	?	2	

Clasificación

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$\mathcal{G}F_n = \left\{ F_n(G) : G \text{ es una gráfica finita} \right\}.$$

Clasificación

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$\mathcal{G}F_n = \Big\{ F_n(G) : G \text{ es una gráfica finita} \Big\}.$$

Definamos una relación de equivalencia

$$F_n(G_1) \sim F_n(G_2) \quad \Leftrightarrow \quad F_n(G_1) \equiv F_n(G_2).$$

Clasificación

Denotemos por

$$\left[F_n(G)\right]$$

la clase de equivalencia de $F_n(G)$

Clasificación

Denotemos por

$$\left[F_n(G)\right]$$

la clase de equivalencia de $F_n(G)$y por

$$\mathcal{G}F_n/\sim$$

el conjunto de clases de equivalencia

Clasificación

Teorema: Para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de clases de equivalencia $\mathcal{G}F_n/\sim$, lo podemos escribir como

$$\Big\{\big[F_n(\{p\})\big], \big[F_n(\mathbb{S}^1)\big], \big[F_n(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)\big], \big[F_n(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)\big], \dots\Big\},$$

Clasificación

Teorema: Para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de clases de equivalencia $\mathcal{G}F_n/\sim$, lo podemos escribir como

$$\Big\{\big[F_n(\{p\})\big], \big[F_n(\mathbb{S}^1)\big], \big[F_n(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)\big], \big[F_n(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)\big], \ldots\Big\},$$

y de forma natural tenemos la biyección

$$\varphi : \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathcal{G}F_n/\sim$$

definida por

$$\varphi(m) = \begin{cases} \big[F_n(\{p\})\big] & \text{si } m = 0 \\ \big[F_n(\bigvee_m \mathbb{S}^1)\big] & \text{si } m \neq 0. \end{cases}$$

Clasificación

Tenemos modelos universales homotópicos

$$\left[F_n(\{p\})\right] \;=\; \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = 1\right\}$$

Clasificación

Tenemos modelos universales homotópicos

$$
\begin{aligned}
\left[F_n(\{p\})\right] &= \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = 1\right\} \\
\left[F_n(\mathbb{S}^1)\right] &= \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = 0\right\}
\end{aligned}
$$

Clasificación

Tenemos modelos universales homotópicos

$$
\begin{aligned}
\left[F_n(\{p\})\right] &= \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = 1\right\} \\
\left[F_n(\mathbb{S}^1)\right] &= \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = 0\right\} \\
\left[F_n(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)\right] &= \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = -1\right\}
\end{aligned}
$$

Clasificación

Tenemos modelos universales homotópicos

$$
\begin{aligned}
\left[F_n(\{p\})\right] &= \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = 1\right\} \\
\left[F_n(\mathbb{S}^1)\right] &= \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = 0\right\} \\
\left[F_n(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)\right] &= \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = -1\right\} \\
\vdots \quad &= \quad \vdots
\end{aligned}
$$

Clasificación

Tenemos modelos universales homotópicos

$$
\begin{aligned}
\left[F_n(\{p\})\right] &= \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = 1\right\} \\
\left[F_n(\mathbb{S}^1)\right] &= \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = 0\right\} \\
\left[F_n(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)\right] &= \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = -1\right\} \\
\vdots \quad &= \quad \vdots \\
\left[F_n\left(\bigvee_r \mathbb{S}^1\right)\right] &= \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = r-1\right\}
\end{aligned}
$$

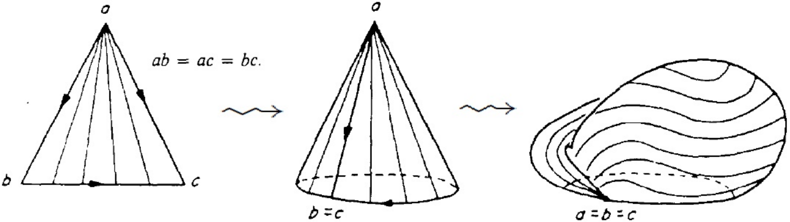
Ejemplo

K.Borsuk y S.Ulam mostraron que $F_2(I) \approx I^2$, $F_3(I) \approx I^3$, en general R.M. Schori mostró que $F_n(I) \cong cono\left(D^{n-2}\right) \times I$ donde $D^{n-2} = \{A \in F_n(I) : 0, 1 \in A\}$.

$$\begin{aligned} D^0 &\approx \text{punto} \\ D^1 &\approx \mathbb{S}^1 \\ D^2 &\approx \text{dunce hat} \end{aligned}$$

Ejemplo

Dunce hat



Ejemplo

$$[\{p\}] \;=\; [F_n(\{p\})]$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
[\{p\}] &= [F_n(\{p\})] \\
&= \left\{ F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = 1 \right\}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
[\{p\}] &= [F_n(\{p\})] \\
&= \left\{ F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = 1 \right\} \\
&= \left\{ F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : G \text{ es un árbol} \right\}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
[\{p\}] &= [F_n(\{p\})] \\
&= \left\{ F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = 1 \right\} \\
&= \left\{ F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : G \text{ es un árbol} \right\} \\
&= \left\{ F_n(I), F_n(m\text{-odo}), \ldots \right\}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$F_2(\mathbb{S}^1) \approx \text{Banda de Moebius}$$

Ejemplo

$$F_2(\mathbb{S}^1) \approx \text{Banda de Moebius} \equiv \mathbb{S}^1$$

Por lo tanto

$$[\mathbb{S}^1] = \left\{ F_2(G) \in \mathcal{G}F_2 : \chi(G) = 0 \right\}$$

Ejemplo

$$F_2(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

Ejemplo

$$F_2(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

Por lo tanto

$$[\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1] = \left\{ F_2(G) \in \mathcal{G}F_2 : \chi(G) = -1 \right\}$$

Ejemplo

$$F_3(\mathbb{S}^1) \approx \mathbb{S}^3$$

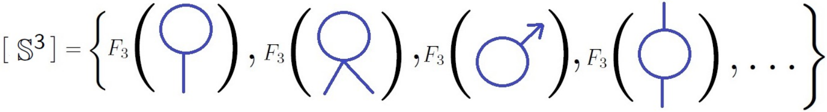
Ejemplo

$$F_3(\mathbb{S}^1) \approx \mathbb{S}^3$$

Por lo tanto

$$[\mathbb{S}^3] = \left\{ F_3(G) \in \mathcal{G}F_3 : \chi(G) = 0 \right\}$$

Ejemplo



Ejemplo

Naotsugu Chinen y Akira Koyama en 2010, mostraron

$$F_{2n+1}(\mathbb{S}^1) \equiv \mathbb{S}^{2n+1}$$

$$F_{2n}(\mathbb{S}^1) \equiv \mathbb{S}^{2n-1}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo

Para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$[\mathbb{S}^{2n+1}] = \left\{ F_{2n+1}(G) \in \mathcal{G}F_{2n+1} : \chi(G) = 0 \right\}$$

$$[\mathbb{S}^{2n-1}] = \left\{ F_{2n}(G) \in \mathcal{G}F_{2n} : \chi(G) = 0 \right\}$$

Problema

Para todo $n \geq 3$ y $r \geq 2$

$$F_n\Big(\bigvee_r \mathbb{S}^1\Big) \equiv \quad ?$$

N. Chinen and A. Koyama, *On the simmetric hyperespace of the circle*, Topology and its Applications. 157(2010), p. 2613-2621.

D. Handel, *Some homotopy properties of spaces of finite subsets of topological spaces*, Houston J. of Math. 26 (2000) 747-764

A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

G R A C I A S