R^3-continuos en hiperespacios

Luis Antonio Paredes Rivas

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Definición

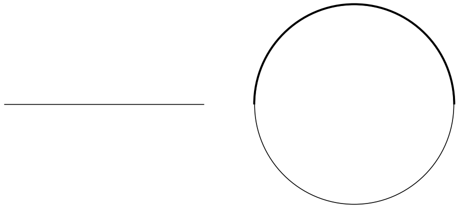
Un **continuo** *es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Si Y es un subespacio de un espacio topológico X y Y es un continuo, diremos que Y es un* **subcontinuo** *de X.*

Definición

Un **continuo** *es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Si Y es un subespacio de un espacio topológico X y Y es un continuo, diremos que Y es un* **subcontinuo** *de X.*

Definición

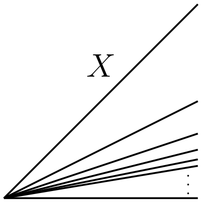
Sea X un continuo. Diremos que X es **unicoherente** *si para cada par de subcontinuos A y B de X, tales que $X = A \cup B$, se cumple que el conjunto $A \cap B$ es conexo. Un continuo X es* **hereditariamente unicoherente** *si cada subcontinuo de X es unicoherente.*



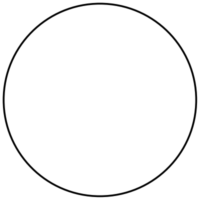
Espacios contráctiles

Definición

Un espacio topológico X es **contráctil** *si existen $x_0 \in X$ y una función continua $\varphi : X \times [0,1] \to X$ tal que $\varphi(x,0) = x$ y $\varphi(x,1) = x_0$ para toda $x \in X$.*



X es contráctil

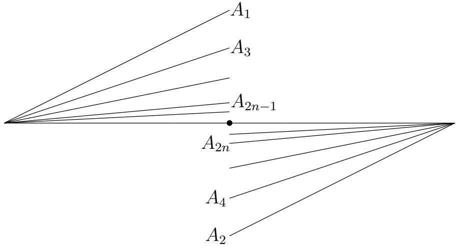


S^1 no es contráctil

Definición

Dados un continuo X y una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos no vacíos de X, definimos su **límite inferior**, *al que denotaremos por* $\operatorname{Li} A_n$, *como:*

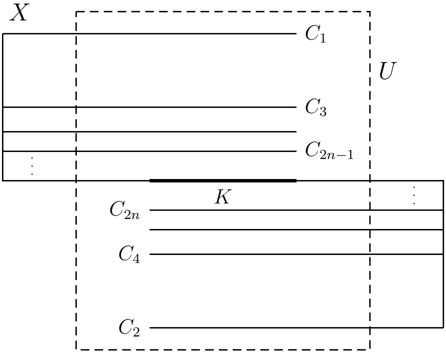
$\operatorname{Li} A_n = \{x \in X :$ *para cada subconjunto abierto U de X, con $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geqslant N$*$\}$.



R^3-continuos

Definición

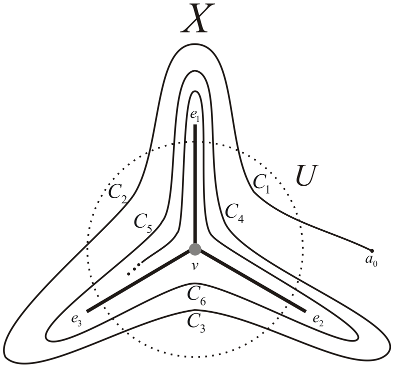
*Sean X un continuo y K un subcontinuo propio de X. Diremos que K es un R^3-**continuo de** X si existe un subconjunto abierto y propio U de X tal que $K \subset U$ y existe una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de componentes de U que satisface que $\operatorname{Li} C_n = K$.*



R^3-continuos

Definición

Sean X un continuo y K un subcontinuo propio de X. Diremos que K es un R^3-**continuo de** X *si existe un subconjunto abierto y propio U de X tal que $K \subset U$ y existe una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de componentes de U que satisface que* $\operatorname{Li} C_n = K$.



Hiperespacios

Definición

Sea X un espacio topológico. A las familias de subconjuntos de X con alguna característica en especial se les llama **hiperespacios** *de X. Los hiperespacios que consideraremos en esta plática son:*

- $2^X = \{A \subset X : A \text{ es compacto y no vacío}\}$,
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$,
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$ *y*
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

R^3-continuos y contractilidad

Teorema

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si X contiene un R^3-continuo, entonces X, 2^X, $F_n(X)$ y $C_n(X)$ no son contráctiles.

Consideremos las siguientes condiciones para un continuo X:

(I) X contiene R^3-continuos,

(II) 2^X contiene R^3-continuos y

(III) $C_n(X)$ contiene R^3-continuos para alguna $n \in \mathbb{N}$.

(IV) $F_n(X)$ contiene R^3-continuos para alguna $n \in \mathbb{N}$.

R^3-continuos en hiperespacios

Consideremos las siguientes condiciones para un continuo X:

(I) X contiene R^3-continuos,

(II) 2^X contiene R^3-continuos y

(III) $C_n(X)$ contiene R^3-continuos para alguna $n \in \mathbb{N}$.

(IV) $F_n(X)$ contiene R^3-continuos para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Nos interesa conocer si alguna de las condiciones anteriores implica otra.

Teorema (W. J. Charatonik)

Si K es un R^3-continuo de un continuo X, entonces 2^K es un R^3-continuo de 2^X.

R^3-continuos en hiperespacios

Teorema (W. J. Charatonik)

Si K es un R^3-continuo de un continuo X, entonces 2^K es un R^3-continuo de 2^X.

Teorema

Si K es un R^3-continuo de un continuo X, entonces $F_n(K)$ es un R^3-continuo de $F_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo (A. Illanes)

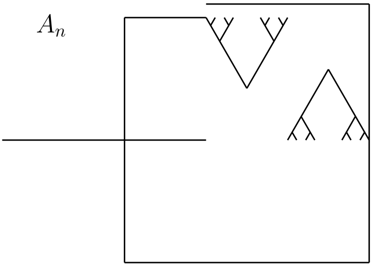
Existe subcontinuo X de $\mathbb{R}^3$ que cumple lo siguiente:

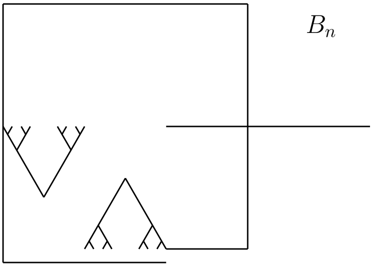
1. *X no contiene R^3-continuos y*
2. *$C(X)$ contiene un R^3-continuo.*

Ejemplo (A. Illanes)

Existe subcontinuo X de $\mathbb{R}^3$ que cumple lo siguiente:

1. *X no contiene R^3-continuos y*
2. *$C(X)$ contiene un R^3-continuo.*





R^3-continuos en hiperespacios

Ejemplo

Existe subcontinuo X de $\mathbb{R}^3$ que cumple lo siguiente:

1. X *no contiene* R^3*-continuos,*
2. $C_n(X)$ *contiene un* R^3*-continuo para toda* $n \in \mathbb{N}$*,*
3. 2^X *no contiene* R^3*-continuos y*
4. $F_n(X)$ *no contiene* R^3*-continuos para ninguna* $n \in \mathbb{N}$*.*

Ejemplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un continuo X_n tal que:

1. X_n *no contiene* R^3*-continuos,*
2. $C_k(X_n)$ *contiene un* R^3*-continuo para cada* $k \leqslant n$*,*
3. $C_m(X_n)$ *no contiene* R^3*-continuos para toda* $m > n$*,*
4. 2^{X_n} *no contiene* R^3*-continuos y*
5. $F_m(X_n)$ *no contiene* R^3*-continuos para ninguna* $m \in \mathbb{N}$*.*

Teorema (A. Illanes)

Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Si X no contiene R^3-continuos, entonces:

1. 2^X *no contiene* R^3*-continuos y*
2. $C(X)$ *no contiene* R^3*-continuos.*

Teorema (A. Illanes)

Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Si X no contiene R^3-continuos, entonces:

1. 2^X *no contiene R^3-continuos y*
2. $C(X)$ *no contiene R^3-continuos.*

Teorema

Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Si X no contiene R^3-continuos, entonces $C_n(X)$ no contiene R^3-continuos para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

Referencias

- *B. S. Baik, K. Hur, C.J. Rhee, R^i-sets and contractibility, J. Korean Math. Soc. 34 (1997) 309-319.*
- *W. J. Charatonik, R^i-continua and hyperspaces, Top. Appl. 23 (1986) 207-216.*
- *S. T. Czuba, R^i-continua and contractibility of dendroids, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. 27 (1979) 299-302.*
- *A. Illanes, R^3-continua in hyperspaces, Houston J. Math. 20 (1994) 529-538.*
- *L. Paredes-Rivas, P. Pellicer-Covarrubias, On strong size levels, Top. Appl. 160 (2013) 1816-1828.*

Gracias por su atención