Hiperespacios de continuos localmente conexos

Karen Clemente Robles,
Dr. Fernando Macías Romero.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
BUAP

XI Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios.
5 de octubre 2016

Contenido

Continuos localmente conexos

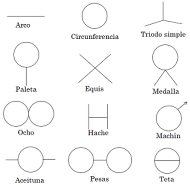
- Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.
- Un espacio topológico X es **localmente conexo** (lc) si para cada uno de sus puntos existe una base de vecindades de conjuntos abiertos conexos.

Ejemplos:

Continuos localmente conexos

- Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.
- Un espacio topológico X es **localmente conexo** (lc) si para cada uno de sus puntos existe una base de vecindades de conjuntos abiertos conexos.

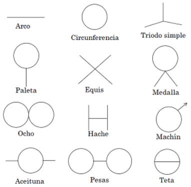
Ejemplos:

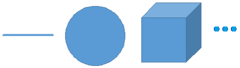


Continuos localmente conexos

- Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.
- Un espacio topológico X es **localmente conexo** (lc) si para cada uno de sus puntos existe una base de vecindades de conjuntos abiertos conexos.

Ejemplos:

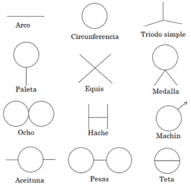


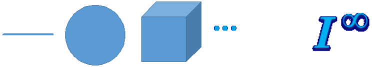


Continuos localmente conexos

- Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.
- Un espacio topológico X es **localmente conexo** (lc) si para cada uno de sus puntos existe una base de vecindades de conjuntos abiertos conexos.

Ejemplos:

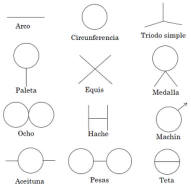


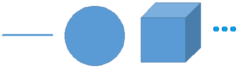


Continuos localmente conexos

- Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.
- Un espacio topológico X es **localmente conexo** (lc) si para cada uno de sus puntos existe una base de vecindades de conjuntos abiertos conexos.

Ejemplos:





I^{∞}

Hiperespacios de continuos

- Dado X un continuo no degenerado, los *hiperespacios* son ciertas familias de subconjuntos de X, con alguna característica particular.

$$2^X = \{A \subset X : \text{A es cerrado y no vacío}\}$$

Hiperespacios de continuos

- Dado X un continuo no degenerado, los *hiperespacios* son ciertas familias de subconjuntos de X, con alguna característica particular.

$$2^X = \{A \subset X : \text{A es cerrado y no vacío}\}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : \text{A es conexo}\}$$

Hiperespacios de continuos

- Dado X un continuo no degenerado, los *hiperespacios* son ciertas familias de subconjuntos de X, con alguna característica particular.

$$2^X = \{A \subset X : \text{A es cerrado y no vacío}\}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : \text{A es conexo}\}$$

Métrica de Hausdorff

Sean $A, B \in X$,
$H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$

Hiperespacios de continuos

- Dado X un continuo no degenerado, los *hiperespacios* son ciertas familias de subconjuntos de X, con alguna característica particular.

$$2^X = \{A \subset X : \text{A es cerrado y no vacío}\}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : \text{A es conexo}\}$$

Métrica de Hausdorff

Sean A, $B \in X$,
$H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$

Un poco de historia.

L. Vietoris (1891 – 2002) **y T. Wazewski** (1896 – 1972)

En 1923 prueban que; «La conexidad local de X es equivalente a la de 2^X y a la de $C(X)$ ».

S. Mazurkiewicz (1888 – 1945)

En 1931 prueba que; «Para cualquier continuo X lc, 2^X contiene un cubo de Hilbert ».

Un poco de historia.

L. Vietoris (1891 – 2002) **y T. Wazewski** (1896 – 1972)

En 1923 prueban que; «La conexidad local de X es equivalente a la de 2^X y a la de $C(X)$ ».

S. Mazurkiewicz (1888 – 1945)

En 1931 prueba que; «Para cualquier continuo X lc, 2^X contiene un cubo de Hilbert ».

Un poco de historia.

M. Wojdyslawski (1918 – 1942)

- En 1938, ¿Si X es un continuo lc, entonces 2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert?
- En 1939, prueba que; «Dado un continuo X, es lc si y solo si, 2^X y $C(X)$ son retractos absolutos».

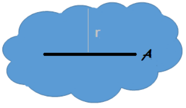
Métrica convexa

Teorema

Todo continuo localmente conexo admite una métrica convexa.

d-bola cerrada generalizada en X centrada en A de radio r

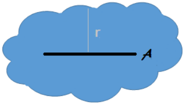
Sean (X, d) un espacio métrico, $r > 0$ y $A \in 2^X$.



$$C_d(r, A) = \{x \in X : d(x, A) \leq r\}$$

d-bola cerrada generalizada en X centrada en A de radio r

Sean (X, d) un espacio métrico,
$r > 0$ y $A \in 2^X$.



$$C_d(r, A) = \{x \in X : d(x, A) \leq r\}$$

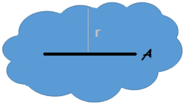
Teorema

- X un continuo con métrica convexa d
- $r > 0$, fijo y A, $B \in 2^X$

$$H_d[C_d(r, A), C_d(r, B)] \leq H(A, B)$$

d-bola cerrada generalizada en X centrada en A de radio r

Sean (X, d) un espacio métrico,
$r > 0$ y $A \in 2^X$.



$$C_d(r, A) = \{x \in X : d(x, A) \leq r\}$$

Teorema

- X un continuo con métrica convexa d
- $r > 0$, fijo y $A,\ B \in 2^X$

$$H_d[C_d(r, A), C_d(r, B)] \leq H(A, B)$$

Teorema

- X un continuo con métrica convexa d
- Para cualquier $A \in C(X)$ y $r > 0$,

$$C_d(r, A) \in C(X)$$

Retracto absoluto

- Y espacio topológico
- A subconjunto cerrado de Y

A es un **retracto** de Y, si la función Id_A en A tiene una extensión continua a Y.

- X espacio normal

X es un **retracto absoluto** de Y, si para cada espacio normal Y y cada subconjunto cerrado B de Y homeomorfo a X, B es un retracto de Y.

Teorema

Si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X y $C(X)$ son retractos absolutos.

Teorema

Todo retracto absoluto, es un factor del cubo de Hilbert.

$$Y \times I^{\infty} \approx I^{\infty}$$

Límite uniforme

- Sean X, Y espacios métricos,
- X con métrica acotada d,
  definimos $d_\infty(f,g) = \sup\{d(f(y),g(y)) : y \in Y\}$
- $f,g : X \to Y$ funciones continuas.
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$f : X \to Y$ es **el límite uniforme** de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si,
$\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$

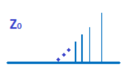
Límite uniforme

- Sean X, Y espacios métricos,
- X con métrica acotada d,
  definimos $d_\infty(f,g) = \sup\{d(f(y),g(y)) : y \in Y\}$
- $f, g : X \to Y$ funciones continuas.
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$f : X \to Y$ es **el límite uniforme** de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si,
$\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$

$Z-$conjuntos y $Z-$funciones

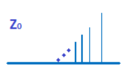
Dado X métrico y compacto y $A \subset X$, cerrado es un $Z-$**conjunto**.



Si Id_X es el límite uniforme de funciones continuas cuyas imágenes no intersectan al conjunto A.

$Z-$conjuntos y $Z-$funciones

Dado X métrico y compacto y $A \subset X$, cerrado es un $Z-$**conjunto**.

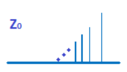


Si Id_X es el límite uniforme de funciones continuas cuyas imágenes no intersectan al conjunto A.

Sean X_1, X_2 espacios métricos compactos y $f : X_1 \to X_2$, es una $Z-$**función**,

$Z-$conjuntos y $Z-$funciones

Dado X métrico y compacto y $A \subset X$, cerrado es un $Z-$**conjunto**.



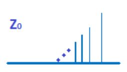
Si Id_X es el límite uniforme de funciones continuas cuyas imágenes no intersectan al conjunto A.

Sean X_1, X_2 espacios métricos compactos y $f : X_1 \to X_2$, es una $Z-$**función**,

Si $f(X_1)$ es un $Z-$conjunto en X_2.

$Z-$conjuntos y $Z-$funciones

Dado X métrico y compacto y $A \subset X$, cerrado es un $Z-$**conjunto**.

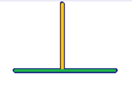


Si Id_X es el límite uniforme de funciones continuas cuyas imágenes no intersectan al conjunto A.

Sean X_1, X_2 espacios métricos compactos y $f : X_1 \to X_2$, es una $Z-$**función**,

Si $f(X_1)$ es un $Z-$conjunto en X_2.

Arco libre

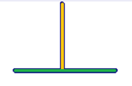


Sea X topológico.

El arco $A \subset X$, con puntos extremos p y q. Es un **arco libre** en X:

Si $A - \{p, q\}$ es un conjunto abierto en X.

Arco libre



Sea X topológico.

El arco $A \subset X$, con puntos extremos p y q. Es un **arco libre** en X:

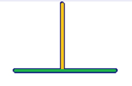
$$\text{Si } A - \{p, q\} \text{ es un conjunto abierto en } X.$$

Hiperespacios de contención

Sea X un continuo, $K \subset X$

$$2^X_K = \{A \in 2^X : K \subset A\}$$
$$C_K(X) = \{A \in C(X) : K \subset A\}$$

Arco libre



Sea X topológico.

El arco $A \subset X$, con puntos extremos p y q. Es un **arco libre** en X:

$$\text{Si } A - \{p, q\} \text{ es un conjunto abierto en } X.$$

Hiperespacios de contención

Sea X un continuo, $K \subset X$

$$2^X_K = \{A \in 2^X : K \subset A\}$$
$$C_K(X) = \{A \in C(X) : K \subset A\}$$

Teorema

- Sea X un continuo localmente conexo no degenerado.
- Si $K \subset X$ es cerrado y $K^o \neq \emptyset$

$$2^X_K \text{ es un } Z\text{−conjunto en } 2^X.$$

- Si K, no contiene arcos libres en X,

$$C_K(X) \text{ es un } Z\text{−conjunto en } C(X).$$

Curtis y Schori

Si X es un continuo localmente conexo no degenerado, entonces:

- 2^X es I^∞
- $C(X)$ es I^∞, cuando no existen arcos libres en X

Curtis y Schori

Si X es un continuo localmente conexo no degenerado, entonces:

- 2^X es I^∞
- $C(X)$ es I^∞, cuando no existen arcos libres en X
- $C(X) \times \mathrm{I}^\infty \approx I^\infty$

Curtis y Schori

Si X es un continuo localmente conexo no degenerado, entonces:

- 2^X es I^∞
- $C(X)$ es I^∞, cuando no existen arcos libres en X
- $C(X)\times \mathrm{I}^\infty \approx I^\infty$

Referencias

A. Illanes y S. B. Nadler, Jr.
Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances.
Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1999.

E. E. Moise
Grille descomposition and convesification theorems for compact metric locally connected continua
Bull. Amer. Math. Soc. 55, (1949), 1111-1121

K. Borsuk
Theory of Retracts
Monograe Matematyczne, Vol. 44, Polish Scientic Publishers, Warszawa, Poland, 1967.

Referencias

Lázaro Flores De Jesús
Continuos localmente Conexos
Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2015.

M. Wojdyslawski
Retractes absolus et hyperespaces des continus
Fund. Math. 32, 1939, 184-192.

Referencias

- **R. D. Edwards**
  Characterizing innite dimensional manifolds topologically
  Lecture Notes in Mathematics, Vol. 770, Séminaire Bourbaki (Ed. by A. Dold and B. Eckmann), Springer-Verlag, Berlin, 1980, 278-30.

- **S. B. Nadler Jr.**
  Hyperspaces of sets
  Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1978.


Gracias