Propiedades dinámicas que se preservan bajo límites inversos

José María Villagómez Quintos

Facultad de Ciencias, UNAM

XI Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios, 2016

Definiciones

Sea X un espacio compacto métrico y sea $f : X \longrightarrow X$ una función continua. Un punto $x \in X$, se dice que es:

- **Punto Fijo** de f si $f(x) = x$
- **F(f)** $= \{x \in X : f(x) = x\}$
- **Punto Periódico** de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$
- **P(f)** $= \{x \in X : \textit{existe } n \in \mathbb{N} \textit{ que cumple que } f^n(x) = x\}$

- **Punto Recurrente** de f, si para todo U abierto con $x \in U$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$
- **R(f)** $= \{x \in X : x \textit{ es punto recurrente de } f\}$
- Dado un punto $x \in X$ y $f : X \longleftrightarrow X$ la **órbita** de f en el punto x que se denota como:

$$\mathbf{Orb(f,x)} = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \cdots\}$$

- **Punto** ω - **límite** de f si es punto de acumulación de la órbita de algún punto $x \in X$
- $\omega(\mathbf{f}) = \{x \in X : x\, es\, un\, punto\, \omega - límite\, de\, f\}$

- **Punto No vagabundo** de f si $\forall U$ abierto con $x \in U$, $\exists y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(y) \in U$
- $\mathbf{\Omega(f)} = \{x \in X : x \textit{ es un punto no vagabundo de } f\}$

- **Punto Casi periódico** de f si $\forall U$ abierto con $x \in U$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\{f^{n+i}(x) | i \in \{0, 1, \cdots, N\}\} \cap U \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- **AP(f)** $= \{x \in X : x \text{ es un punto casi periódico de } f\}$

- **Punto Encadenablemente Recurrente** si $\forall\varepsilon > 0$ existe una sucesión de puntos, $x_0 = x, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = x$, tal que $|f(x_i) - x_{i+1}| < \varepsilon$ para $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$
- **CR(f)** $= \{x \in X : x \textit{ es encadenablemente recurrente de } f\}$.

Definiciones

- Sea X espacio compacto métrico y sea $f : X \longrightarrow X$ función continua. Definimos el **límite inverso** de X y f como:

$$\{\tilde{x} = (x_0, x_1, \cdots) : f(x_{i+1}) = x_i\} = \varprojlim(X, f),$$

con la métrica $\hat{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}$, donde d es la métrica de X.

- Definimos un homeomorfismo **recorrimiento (shift)** $\sigma_f : \varprojlim(X, f) \longrightarrow \varprojlim(X, f)$ como:

$$\sigma_f((x_0, x_1, \cdots)) = (f(x_0), x_0, x_1, \cdots).$$

Teorema

Para cualquier función continua, las siguientes propiedades se cumplen:

1. Sea $x \in X$ y sea $\tilde{x} \in \varprojlim(X, f)$ tal que $\tilde{x} = (x, x_1, \cdots)$; entonces $\omega(\tilde{x}, \sigma) = \varprojlim(\omega(x, f), f)$
2. $CR(\sigma) = \varprojlim(CR(f), f)$
3. $R(\sigma) = \varprojlim(R(f), f)$
4. $AP(\sigma) = \varprojlim(AP(f), f)$
5. Cuando f es suprayectiva, $\Omega(\sigma) = \varprojlim(\Omega(f), f)$.

ShiaHai Li (1991) [3]

Referencias I

[1] An introduction to Chaotic Dynamical Systems
Devaney R. L.
Second Edition.
Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989.

[2] Sistemas Dinámicos Discretos
King, J. E., Méndez, H.
1ª reimpresión.
UNAM, Facultad de Ciencias, 2015.

[3] Dynamical Properties of the Shift Map on the Inverse Limit Space
S.-H. Li
Contemporary Mathematics
Journal of American Mathematical Society, Vol. 117, 1991.