Hiperespacios como imágenes continuas del cono sobre el conjunto de Cantor

José Luis Sosa Cárcamo

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Puebla, Puebla

5 de octubre de 2016

Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es el subespacio $\mathcal{C}$ de $[0, 1]$

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$$

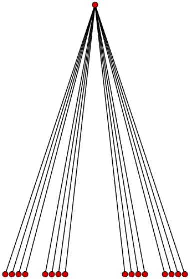
donde $C_1 = [0, 1] - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y, asumiendo que hemos definido de forma inductiva C_i, C_{i+1} es definido por la supresión en C_i del intervalo abierto tercio medio de cada componente de C_i.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Cono

El cono sobre Y, que denotamos por $Cone(Y)$, es el espacio cociente obtenido de $Y \times [0,1]$ por la contracción $Y \times \{1\}$ a un punto; en otras palabras, $Cone(Y)$ es el espacio cociente $Y \times [0,1]/_{\sim}$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia en $Y \times [0,1]$ dada por $(y_1, t_1) \sim (y_2, t_2)$ si y sólo si $(y_1, t_1) = (y_2, t_2)$ o $t_1 = 1 = t_2$. El punto $Y \times \{1\}$ de $Cone(Y)$ es llamado el vértice de $Cone(Y)$. El subconjutno $Y \times [0,1]$ de $Cone(Y)$ es llamado la base de $Cone(Y)$.

Cono de Cantor



Función de Whitney

Una función de Whitney es una función continua $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ que satisface las siguientes condiciones:

I) $\mu(\{p\}) = 0$ para cada $p \in X$
II) $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Continuo

Un continuo es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.

Hiperespacio

Un hiperespacio de X, es una familia de subconjuntos del conjunto potencia de X que cumple ciertas propiedades.

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : \text{A es un subconjunto cerrado y no vacío}\} \\ C(X) &= \{A \in 2^X : \text{A es conexo}\} \end{aligned}$$

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

- Mazurkiewicz, muestra que 2^X es una imagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor.

- Kelley, 1942, el resultado de Mazurkiewicz es extendido mostrando que no sólo 2^X sino también $C(X)$ es una imagen continua del abanico de Cantor.

2^X es una imagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor

Denotamos por M al conjunto de Cantor y tomamos ω una función de Whitney fija para 2^X.

Tomamos $S_X(\omega) = \{\sigma \in S(\omega) : \sigma(1) = X\}$

- $S_X(\omega)$ es un subconjunto cerrado de $S(\omega)$
- $S_X(\omega)$ es un espacio métrico compacto.

Existe $g : M \xrightarrow{sobre} S_X(\omega)$

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Definimos $f : M \times [0,1] \to 2^X$ como

$$f(z,t) = [g(z)](t) \text{ para cada } (z,t) \in M \times [0,1]$$

- La convergencia de $S_X(\omega)$ es convergencia uniforme.
- g es continua.
- f es continua.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Tomamos $A \in 2^X$. Así existe $\sigma \in S_X(w)$ tal que $\sigma(0) = A$ donde $g : M \to S_X(\omega)$.
Entonces existe $z_0 \in M$ tal que $g(z_0) = \sigma$. Así

$$f(z_0) = [g(z_0)](0) = \sigma(0) = A$$

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

f envía $M \times [0,1]$ sobre 2^X

$g(z) \in S_X(\omega)$, para cada $z \in M$
Usando la definición de f:

$$f(z,1) = X \text{ para cada } (z,1) \in M \times [0,1]$$

Tomamos $\upsilon : M \times [0,1] \xrightarrow{sobre} Cone(M)$ y $\psi : Cone(M) \to 2^X$ dada por $\psi(p) = f[\upsilon^{-1}(p)]$ para cada $p \in Cone(M)$

- Alejandro Illanes (2004). *Hiperespacios de continuos*. México: Sociedad Matemática Mexicana.
- Raul Escobedo, Sergio Macías y Héctor Méndez (2006). *Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios*. México: Sociedad Matemática Mexicana.
- Sam B. Nadler Jr. (1992). *Continuum theory: an introduction*. New York: M. Dekker.
- Sam B. Nadler Jr. (2006). *Hyperspaces of sets. A text with research questions*. México, D.F: Sociedad Matemática Mexicana.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Gracias

92.luissosa@gmail.com