Rigidez de encajes sobre el producto de pseudoarcos

Emanuel Ramírez Márquez
María de Jesús López Toriz
Jorge Marcos Martínez Montejano

Facultad de Fiencias Físico Matemáticas
BUAP

6 octubre, 2016

Preliminares

Definición

Un continuo es *descomponible* si se puede expresar como la unión de dos de sus subcontinuos propios, en otro caso diremos que es *indescomponible*. Un continuo es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Teorema 1.1.

Sea X un continuo no degenerado. Si X es indescomponible, entonces X no es localmente conexo en ninguno de sus puntos.

Preliminares

Definición

Un continuo es *descomponible* si se puede expresar como la unión de dos de sus subcontinuos propios, en otro caso diremos que es *indescomponible*. Un continuo es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Teorema 1.1.

Sea X un continuo no degenerado. Si X es indescomponible, entonces X no es localmente conexo en ninguno de sus puntos.

Cadenas y continuos encadenables

Definición

Sea X un espacio métrico. Una *cadena* en X es una colección finita de conjuntos abiertos en X, $\mathcal{D} = \{D(1), \ldots, D(n)\}$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que $D(i) \cap D(j) \neq \emptyset$ si y sólo si $\mid i - j \mid \leq 1$, para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definición

Sean X un espacio métrico, $\mathcal{D} = \{D(1), \ldots, D(n)\}$, con $n \in \mathbb{N}$ una cadena en X y M un subconjunto de X. Decimos que $\mathcal{D}$ *cubre* a M si $M \subset \bigcup \mathcal{D}$,

Definición

Sean X un espacio métrico y $\mathcal{D}$ una cadena en X. Dado $\varepsilon > 0$ decimos que $\mathcal{D}$ es una ε-*cadena* si *malla*$(\mathcal{D}) < \varepsilon$.

Cadenas y continuos encadenables

Definición

Sea X un espacio métrico. Una *cadena* en X es una colección finita de conjuntos abiertos en X, $\mathcal{D} = \{D(1), \dots, D(n)\}$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que $D(i) \cap D(j) \neq \emptyset$ si y sólo si $\mid i - j \mid \leq 1$, para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Definición

Sean X un espacio métrico, $\mathcal{D} = \{D(1), \dots, D(n)\}$, con $n \in \mathbb{N}$ una cadena en X y M un subconjunto de X. Decimos que $\mathcal{D}$ *cubre* a M si $M \subset \bigcup \mathcal{D}$,

Definición

Sean X un espacio métrico y $\mathcal{D}$ una cadena en X. Dado $\varepsilon > 0$ decimos que $\mathcal{D}$ es una ε-*cadena* si *malla*$(\mathcal{D}) < \varepsilon$.

Cadenas y continuos encadenables

Definición

Sea X un espacio métrico. Una *cadena* en X es una colección finita de conjuntos abiertos en X, $\mathcal{D} = \{D(1), \ldots, D(n)\}$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que $D(i) \cap D(j) \neq \emptyset$ si y sólo si $\mid i - j \mid \leq 1$, para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definición

Sean X un espacio métrico, $\mathcal{D} = \{D(1), \ldots, D(n)\}$, con $n \in \mathbb{N}$ una cadena en X y M un subconjunto de X. Decimos que $\mathcal{D}$ *cubre* a M si $M \subset \bigcup \mathcal{D}$,

Definición

Sean X un espacio métrico y $\mathcal{D}$ una cadena en X. Dado $\varepsilon > 0$ decimos que $\mathcal{D}$ es una ε-*cadena* si *malla*$(\mathcal{D}) < \varepsilon$.

Cadenas y continuos encadenables

Definición

Un continuo es *encadenable* si para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena que lo cubre.

Definición

El pseudoarco P es un continuo encadenable y hereditariamente indescomponible.

Cadenas y continuos encadenables

Definición

Un continuo es *encadenable* si para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena que lo cubre.

Definición

El pseudoarco P es un continuo encadenable y hereditariamente indescomponible.

Cadenas y continuos encadenables

Teorema 2.1.

Sean X y Y continuos encadenables. Si A y B son subcontinuos de $X \times Y$ tales que $\pi_1(B) \subseteq \pi_1(A)$ y $\pi_2(A) \subseteq \pi_2(B)$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Rigidez de encajes

Definición

Sean X, Y, W y Z continuos. Decimos que un encaje $e : X \times Y \to W \times Z$ es *rígido* si se cumple una de las condiciones siguientes:

(*i*) existen encajes $e_X : X \to W$ y $e_Y : Y \to Z$ tales que para cada $(x, y) \in X \times Y$, $e((x, y)) = (e_X(x), e_Y(y))$, o

(*ii*) existen encajes $e_X : X \to Z$ y $e_Y : Y \to W$ tales que para cada $(x, y) \in X \times Y$, $e((x, y)) = (e_Y(y), e_X(x))$.

Rigidez de encajes

Definición

Sean X, Y, W y Z continuos. Decimos que un encaje $e : X \times Y \to W \times Z$ es *rígido* si se cumple una de las condiciones siguientes:

(i) existen encajes $e_X : X \to W$ y $e_Y : Y \to Z$ tales que para cada $(x, y) \in X \times Y$, $e((x, y)) = (e_X(x), e_Y(y))$, o

(ii) existen encajes $e_X : X \to Z$ y $e_Y : Y \to W$ tales que para cada $(x, y) \in X \times Y$, $e((x, y)) = (e_Y(y), e_X(x))$.

Rigidez de encajes

Definición

Sean X, Y, W y Z continuos. Decimos que un encaje $e : X \times Y \to W \times Z$ es *rígido* si se cumple una de las condiciones siguientes:

(*i*) existen encajes $e_X : X \to W$ y $e_Y : Y \to Z$ tales que para cada $(x, y) \in X \times Y$, $e((x, y)) = (e_X(x), e_Y(y))$, o

(*ii*) existen encajes $e_X : X \to Z$ y $e_Y : Y \to W$ tales que para cada $(x, y) \in X \times Y$, $e((x, y)) = (e_Y(y), e_X(x))$.

Rigidez de encajes

Teorema 3.1.

Sean X, Y, Z, W continuos, con W y Z hereditariamente indescomponibles y $e : X \times Y \to W \times W$ un encaje. Entonces e es rígido si y sólo si cada $(p, q) \in X \times Y$ existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $\pi_i(e(\{p\} \times Y))$ es degenerado y existe $j \in \{1, 2\}$ tal que $\pi_j(e(X \times \{q\}))$ es degenerado.

Rigidez de encajes

Teorema 3.2.

Sean X y Y continuos y P el pseudoarco. Si el producto $X \times Y$ se puede encajar en $P \times P$, entonces X y Y son homeomorfos a P.

Bibliografía

[1] D. P. Bellamy, J. M. Lysco, *Factorwise rigidity of the products of two pseudo-arcs*, Topology Proc. 8 (1983), 21-27.

[2] R. H. Bing, *A homogeneous indescomposable continua*, Duke Math. J. Vol 15 (1948), 729-742.

[3] M. E. Chacón-Tirado, A. Illanes, R. Leonel, *Factorwise rigidity of embeddings of products of pseudo-arcs*, Colloquium Math. vol.128, No.1, (2012), 7-12.

[4] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[5] W. Lewis, *The pseudo-arc*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 5 (1999), 25-77.