FUNCIONES CONTINUAS ENTRE HIPERESPACIOS

FÉLIX CAPULÍN PÉREZ

No cabe duda que las funciones continuas juegan un papel muy importante dentro de muchas áreas de la Matemática y en la Topología no son la excepción. Por ejemplo, dada una propiedad P que satisface un espacio topológico, para un topólogo siempre es importante determinar si P es preservada bajo funciones continuas, o simplemente busca determinar que tipo de espacios topológicos son imagen continua de otro(s). Por mencionar algunos casos, sabemos que la compacidad y la conexidad se preservan bajo funciones continuas o todo espacio métrico compacto no vacío es imagen continua del conjunto de Cantor o todo continuo de Peano es imagen continua del intervalo cerrado unitario (Teorema de Hanh-Mazurkiewicz). Dentro de la Teoría de continuos e hiperespacios existe un número importante de preguntas relacionadas a este tema. Por ejemplo las siguientes preguntas generales son muy naturales de plantearse. Dado un continuo X, ¿bajo qué condiciones existen funciones continuas entre sus hiperespacios? o dicho de otra manera, ¿qué hiperespacios son imagen continua de otros? O una pregunta más compleja es: ¿qué hiperespacios son retractos de otros hiperespacios?

Se sabe que una de las primeras recopilaciones sobre la Teoría de Retractos fue hecha en 1967 por Borsuk, misma que resume en su libro Theory of Retracts [1]; Borsuk realizó un estudio sistemático, de lo que se tenía hasta ese momento y sin duda hoy en día es básica en varias ramas de la Topología.
Las siguientes preguntas aparecen en la literatura y han sido la base para la generación de una cantidad importante de resultados relacionados al tema:

Dado un continuo X :

Pregunta 1. (Nadler Jr.)¿Cuándo existe una función continua de X sobre $C(X)$? (Ver [27, Pregunta 4.6, p. 189]) O ¿Cuándo existe una función continua de X sobre 2^X?

Pregunta 2. (Nadler Jr.) ¿Cuándo es X la imagen continua de 2^X o de $C(X)$? (Ver [31, 3.1, p. 193]).

Pregunta 3. (Nadler Jr.) ¿Qué condiciones suficientes y necesarias se necesitan para que X sea un retracto de 2^X o de $C(X)$? (Ver [29, p.413] y [28, Pregunta 6.2, p. 270]).

Dado que una selección en algún hiperespacio $\mathcal{H}(X)$ es un caso particular de una retracción de $\mathcal{H}(X)$ sobre X entonces se puede plantear la siguiente pregunta.

Pregunta 4. ¿Cuándo existe una selección para $\mathcal{H}(X)$?

En particular en [27, Pregunta 5.6, p. 197] se plantea la siguiente pregunta.

Pregunta 5. ¿Cuándo existe una selección para $C(X)$?

Otra pregunta importante relacionada a la existencia de funciones continuas entre hiperespacios es la siguiente:

Pregunta 6. ¿Bajo que condiciones para X existen retracciones o funciones continuas entre algunos de sus hiperespacios?

El objetivo de este minicurso es mencionar algunos resultados relacionados con funciones continuas y/o retracciones entre hiperespacios de continuos basándonos en las preguntas anteriores.

Si X es un continuo se puede notar que las preguntas 2. y 3. tienen sentido haciendo la siguiente consideración. Dado que el hiperespacio $F_1(X)$ es un subespacio de 2^X y este es homeomorfo a X, entonces el continuo X puede considerarse como subespacio de 2^X (o encajado, siendo estrictos); por lo que asumiremos en este trabajo que $X \subset \mathcal{H}(X) \subset 2^X$ para cada hiperespacio $\mathcal{H}(X)$ de X considerado aquí.

En la literatura podemos encontrar una cantidad importante de respuestas parciales para cada una de las preguntas anteriores, así como resultados que caracterizan a cierta clase de continuos bajo la relación que guardan con sus hiperespacios y ciertas clases de funciones entre ellos. Por ejemplo, en relación a la pregunta 1., Nadler en [28, Capítulo IV] muestra ciertas condiciones que deben satisfacer los continuos para la existencia de funciones continuas de un continuo X a los hiperespacios $C(X)$ y 2^X. Con respecto a la preguntas 2. y 3., en [31] se dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de funciones continuas de 2^X o de $C(X)$ sobre X; la existencia de este tipo de funciones implica que X es débilmente encadenable en el sentido de [23] o equivalentemente a que X sea imagen continua del pseudoarco y que sea la unión de dos subcontinuos propios cada uno de los cuales es arcoconexo [31, Teorema 3.2, p. 193]. Por otra parte se sabe que cuando X es encadenable (tipo círculo) tales funciones existen si y sólo si X es un arco (una curva cerrada simple, respectivamente) [31, 3.3, p. 193]. Si X es g-contráctil, entonces existen funciones continuas de 2^X sobre X [31, Teorema 3.4, p. 193].

En relación a la existencia de retracciones, se sabe, por ejemplo, que si una curva (continuo uno dimensional) X es un retracto de 2^X o de $C(X)$, entonces es un dendroide [14, p. 122]. Mas aún, en [9, Teorema 3.1, p. 9] se obtiene un resultado más fuerte, usando herramientas diferentes a las utilizadas en [14], basadas principalmente en representar a los hiperespacios 2^X y $C(X)$ como la intersección anidada de cubos de Hilbert; en este se prueba, no solo que el espacio es un dendroide, se prueba también que es uniformemente arco-conexo. Para cuando X es un continuo localmente conexo se sabe por [29, p. 413] y [27, Teorema 6.4, p. 270] que un continuo X localmente conexo es un retracto de 2^X si y sólo si X es un retracto absoluto y como consecuencia a este resultado se tiene que una curva X localmente conexa es un retracto de 2^X si y sólo si X es una dendrita.

Cuando se consideran continuos que no son locamente conexos la situación es más complicada, sin embargo, en la literatura existen diferentes resultados parciales y ejemplos los cuales describen varias situaciones importantes. Por ejemplo en [10] T.W. Curtis estudia retracciones de hiperespacios de compactificaciones de semirayos obteniendo varios resultados interesantes. Por otra parte Sam B. Nadler Jr. en su libro [28] analiza diversas condiciones y sus interrelaciones con respecto a retracciones de hiperespacios y presenta también varios ejemplos. En [3] se prueba que si existen retracciones de $C(X)$ o de $F_2(X)$ sobre X entonces X no es de Tipo N. Illanes en [15] construye un ejemplo de un continuo X el cual es un retracto de $C(X)$ pero no de 2^X.

Por otra parte, si para un hiperespacio $\mathcal{H}(X)$ de X podemos definir una retracción $s : \mathcal{H}(X) \to X$ tal que $s(A) \in A$ para cada $A \in \mathcal{H}(X)$, se dice que la función s es una selección para $\mathcal{H}(X)$ o que el hiperespacio $\mathcal{H}(X)$ es selectible. Algunos resultados relacionados con selecciones se pueden consultar en [32], [24], [25], [17], [9], y en el artículo expositorio [7] (en este último se dá un número considerable de referencias). Con respecto a lo anterior (Preguntas 4 y 5) podemos mencionar los siguientes resultados. Dado un continuo X, se tiene que, 2^X, $F_n(X)$, $C_n(X)$ ($n \in \mathcal{N}$, $n \geq 2$) son selectibles si y sólo si X es un arco (ver por ejemplo [16]). La prueba de esto se basa principalmente en probar el siguiente caso particular: $F_2(X)$, es selectible si y sólo si X es un arco, y como corolario se obtiene el resultado anterior. Con respecto a $C(X)$ se sabe que si hay selecciones para este hiperespacio, entonces el continuo es un dendroide. Maĉkowiak prueba en [24] que si un dendroide es selectible entonces tiene la propiedad de intersección doblada. En el mismo artículo, muestra un dendroide con dos puntos de ramificación teniendo la propiedad de interseccion doblada pero que no es selectible. En [4] se dá un ejemplo de un abanico que no es selectible pero tiene la propiedad de intersección doblada. Por otro lado, en [17] se construyen dos dendroides X_1 y X_2 (muy interesantes), tales que $C(X_1)$ es selectible, pero X_1 no es un retracto por deformación de $C(X_1)$ y $C(X_2)$ no es selectible, pero X_2 es un retracto de $C(X_2)$.

En [9, Corolario 4.3, p. 15] se dá una condición suficiente para que una retracción de 2^X sobre X restringida a $C(X)$ sea una selección para $C(X)$. En [9, Ejemplo 4.4] se construye un dendroide no contráctil que admite una retracción de 2^X sobre X cuya restricción en $C(X)$ es una selección.

Finalmente podemos mencionar los siguientes resultados: $C(X)$ es siempre imagen continua de 2^X (ver [31, Teorema 3.6, p. 194]). Goodykoontz, Jr. muestra en [13] y en [12], ejemplos de dendroides suaves no localmente conexos tal que uno de ellos satisface que $C(X)$ es un retracto de 2^X y el otro no.

En [14] se da una discusión de la existencia de retracciones, retracciones por deformación y retracciones fuertes por deformación entre $F_1(X)$, $C(X)$ y 2^X. Por ejemplo, existen continuos X no localmente conexos en todas las dimensiones que son retractos por deformación de 2^X [14, Proposición 2.10, p. 126].

References

[1] K. Borsuk, *Theory of retracts*, PWN, Warszawa, 1967.

[2] F. Capulín, *Distintas funciones entre continuos y sus hiperesespacios*, Tesis Doctoral. UNAM 2006.

[3] F. Capulín y W. J. Charatonik, *Retractions from C(X) onto X and continua of type N*, Houston journal of mathematics, ISSN 0362-1588, Vol. 33, N 1, 2007, 261-272.

[4] , F. Capulín, F. Orozco-Zitli and L. Juarez-Villa *A nonselectible fan with the bend intersection property*, Q. and A. in Top. 33 (2015), 103-108.

[5] J. H. Case and R.E. Chamberlin, *Characterizations of tree-like continua*, Pacific J. Math. 10(1960), 73-84.

[6] J. J. Charatonik, *On acyclic curves. A survey of results and problems*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) vol. 1, (1995), 1-39.

[7] J. J. Charatonik, *On continuous selections for the hyperspace of subcontinua*, Topology (Pécs 1989),, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 55, North-Holland, Amsterdam, 1993, 91-100.

[8] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik y S. Miklos, *Confluent mappings of fans*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **301** (1990), 1-82.

[9] J. J. Charatonik, W.J. Charatonik, K. Omiljanowski y J.R. Prajs, *Hyperspaces retractions for curves*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **370** (1997), 1-34.

[10] D. W. Curtis, *A hyperspaces retraction theorem for a class of half-line compactifications*, Topology Proc. 11 (1986), 29-64.

[11] T. Czuba, *A new class of non Contractible Continua*, General Topology and its relations to modern Analysis and Algebra VI Proc. Six Prague topological Symposium 1986 (1988) 121-123.

[12] J. T. Goodykoontz, Jr., *A nonlocally connected continuum X such that $C(X)$ is a retract of* 2^X, Proc. Amer. Math. Soc. 91(1984) 319-322.

[13] J. T. Goodykoontz, Jr, $C(X)$ *is not necessarily a retract of* 2^X, Proc. Amer. Math. Soc 67 (1977), 177-178.

[14] J. T. Goodykoontz, Jr., *Some retractions and deformation retractions on* 2^X *and* $C(X)$, Topol. Appl. 21 (1985), 121-133.

[15] A. Illanes, *A continuum X which is a retract of $C(X)$ but not of* 2^X, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 199-200.

[16] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Soc. Mat. Mexicana, Aportaciones Matemáticas, 28, (2004).

[17] A. Illanes, *Two examples concerning hyperspace retraction*, Topol. Appl. 29 (1988), 67-72.

[18] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces*, M. Dekker, New York and Basel, 1999.

[19] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), 22-36.

[20] J. Krasinkiewicz, *Curves which are continuous images of tree-like continua are movable*, Fund. Math. 89 (1975), 233-260.
[21] W. Kuperberg *Uniformly pathwise connected continua*, Studies in Topology (Proc. Conf. Univ. North Carolina, Charlotte, N.=C. 1974); Academic Press, New York (1975), 315-324.
[22] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 2, Academic Press and PWN, 1968.
[23] A. Lelek, *On weakly chainable continua*, Fund. Math. 51 (1962), 271-282.
[24] T. Mackowiak, *Continuous Selections for C(X)*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. **26** (1978), 547-551.
[25] T. Mackowiak, *Contractible and nonselectible dendroids*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 33 (1985), 321-324.
[26] S. B. Nadler, Jr. *Continuum Theory An Introduction*, Marcel Dekker, Vol 158, New York, Basel and Hong Kong, (1992).
[27] S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces of sets. A text with research questions*, Soc. Mat. Mexicana, Aportaciones Matemáticas,33, (2006).
[28] S. B. Nadler, Jr, *Hyperspaces of sets*, Pure and Applied Math. Series 49 (Marcel Dekker, New York, 1978).
[29] S. B. Nadler, Jr., *Inverse limits and multicoherence*, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 411-414.
[30] S. B. Nadler, Jr. *Multicoherence Techniques applied to inverse limits*, Trans. Amer. Math. Soc., 157 (1971), 227-234.
[31] S. B. Nadler, Jr, *Some problems concerning hyperspaces*, Lectures Notes in Math. 375, Springer, 1974, 190-194.
[32] S. B. Nadler, Jr. y L.E. Ward, Jr., *Concerning continuous selections*, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), 369-374.
[33] A. D. Wallace, *Rigid selections and smooth dendroids*, Bull. Pol. Acad. Sci.,19 (1971), 1041-1044.
[34] M. Wojdyslawski, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, ibid. 32 (1939), 184-192.