LISTA DE EJERCICIOS. MINICURSO FUNCIONES CONTINUAS ENTRE HIPERESPACIOS

Félix Capulín Pérez

1. Ejercicios

Definición 1.1. Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ y $r : X \to A$ una función continua. Decimos que r es una **retracción** si $r\mid_A$ es la función identidad sobre A. En tal caso al conjunto A se le llama un **retracto** de X.

1. Pruebe que el conjunto A es cerrado

Definición 1.2. Un espacio topolgíco X es **arco-conexo** si para cualquier par de puntos $a, b \in X$, existe un arco en X cuyos extremos son a y b.

Definición 1.3. Un espacio X es **conexo por trayectorias** si para cada $x, y \in X$, existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = 1$ y $f(1) = y$. A esta función se le llama una **trayectoria** que va de x a y.

Es fácil ver que arcoconexo implica conexo por trayectorias.

2. Dé un ejemplo de un espacio conexo por trayectorias no arcoconexo.

3. ¿ Bajo qué condiciones para X se tiene que conexo por trayectorias implica arcoconexo?

4. Probar que ser conexo por trayectorias es una propiedad invariante en espacios topológicos y ser arcoconexo es una propiedad invariante entre continuos.

Definición 1.4. Sea X un continuo arco-conexo. Diremos que X es **uniformemente arco-conexo**, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que cada arco $ab = A$ en X contiene k puntos $a = a_1, a_2, ..., a_k = b$ que dividen a A en subarcos $a_j a_{j+1}$ cada uno de ellos con diámetro menor que ε.

Definición 1.5. Sea X un continuo conexo por trayectorias. Diremos que X es **uniformemente conexo por trayectorias**, si existe una familia $P = \{f : [0,1] \to X\}$ de trayectorias tal que para cada par de puntos x y y de X existe una trayectoria $f \in P$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada trayectoria $f \in P$ hay k números $0 = t_0, t_1, ..., t_k = 1$, tal que para cada $i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$ tenemos que el diámetro de $f([t_{t-1}, t_i])$ es menor que ε.

Es fácil ver que uniformemente arcoconexo implica uniformemente conexo por trayectorias.

5. Probar que en dendroides, ser uniformemente conexo por trayectorias es equivalente a ser uniformemente arco-conexo.

6. Dar un ejemplo de un continuo uniformemente conexo por trayectorias que no sea uniformemente arcoconexo.

7. Probar que ser uniformemente arcoconexo es invariante bajo funciones continuas entre dendroides

8. Dé un ejemplo en donde se muestre que es escencial (en el ejercicio anterior) que el contradominio sea un dendroide.

9. (Kuperberg)Probar que ser uniformemente conexo por trayectorias es invariante bajo funciones continuas entre continuos.

DEFINICIÓN 1.6. Sean f y g funciones continuas de X en Y. Decimos que f es **homotópica** a g ($f \simeq g$) si y sólo si existe una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para toda $x \in X$. A la función H la llamaremos una **homotopía** entre f y g.

DEFINICIÓN 1.7. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **contráctil** si existe una homotopía entre la función identidad y una función constante p. Dicha homotopía es llamada una **contracción**.

10. Probar que la contractibilidad es preservada bajo retracciones, esto es, si X es un espacio contráctil y existe una retracción de X a un subespacio A de X, entonces A es contráctil.

DEFINICIÓN 1.8. Sea X un continuo y $H(X)$ un hiperespacio de X. Una selección para $H(X)$ es una función continua $s : H(X) \to X$ tal que $s(A) \in A$ para todo $A \in H(X)$.

11. Dar una selección para el abanico armónico.

12. Dar una función continua de $C(X)$ sobre X, si X es la Çhafaldrana".

—Para probar que si existe una selección $s : F_2(X) \to X$ entonces X es el intervalo $[0,1]$, se define un orden en X de la siguiente manera: para puntos $p, q \in X$, diremos que $p < q$ si $s(\{p,q\}) = p$. Y para cada $p \in X$ se definen los conjuntos $[\leftarrow, p] = \{q \in X : q < p\}$ y $[p, \to] = \{q \in X : p < q\}$.
13. Si se demuestran los siguientes incisos es fácil ver entonces que $X = [0,1]$. Sea $p \in X$.
a) Los conjuntos $[\leftarrow, p]$ y $[p, \to]$ son conjuntos cerrados, su unión es X y su intersección es el conjunto $\{p\}$.
b) Los conjuntos $[\leftarrow, p]$ y $[p, \to]$ son subcontinuos de X.
c) El orden es transitivo.
d) Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Definamos una función $f : X \to [0,1]$ por $f(p) = \mu([\leftarrow, p])$. Probar que f es continua. Sugerencia: pruebe la continuidad por sucesiones.
e) f es inyectiva.

DEFINICIÓN 1.9. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **g-contráctil** si existe una función continua f sobre X y una homotopía entre f y una función constante p.

15. Dé un ejemplo de un continuo g-contráctil que no sea contráctil.