La función $\mathcal{T}$ y $\mathcal{J}$

Tania Gricel Benitez López

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemerita Universidad Autónoma de Puebla

Noviembre 2015

Introducción

En 2010 J. Prajs propone un nuevo Teorema de descomposición para continuos homogéneos, pero ésta es utilizando la aposindesis mutua.

Definición 1

Sea X un continuo y L un subcontinuo de X, decimos que L es un continuo *amplio* si para cada abierto U de X tal que $L \subset U$, existe un subcontinuo M tal que $L \subset Int(M) \subset M \subset U$.

Definición 2

Sea X un continuo y K un subcontinuo de X, K es *filamento* si existe una vecindad U de K tal que la componente de U que contiene a K tiene interior vacío.

Ejemplo:

Consideremos al abanico armónico X y llámemos L_0 al arco límite.

Notemos que L_0 un subcontinuo amplio de X y obsérvese que los subcontinuos filamento son cualquier subcontinuo propio de L_0 que no contenga a v.

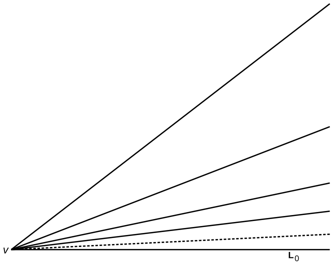


Figura : Abanico armónico

Ejemplo: Consideremos $W = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1 \right\}$ y $X = Cl_{\mathbb{R}^2}(W)$. X es conocido como la curva sinoidal del topólogo. Llamemos $M = \{0\} \times [0,1]$ a la barra límite.

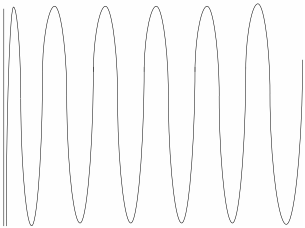


Figura : Curva sinoidal del topólogo

Definición 3

Sea X espacio métrico y compacto. Definimos,
$\mathcal{J} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dado por:

$$\mathcal{J}(A) = \{x \in X | \, \forall \text{ continuo amplio } W \text{ de } X \text{ tal que } x \in W \text{ y } W \cap A \neq \emptyset\}$$

para cada $A \subset X$.

Observación 1

En general, cuando trabajemos con la función $\mathcal{J}$ lo haremos con el complemento. Esto es, dado X espacio métrico, compacto y $A \subset X$ tenemos que:

$$\mathcal{J}(A) = X \backslash \{x \in X | \, \exists \text{ un continuo amplio } W \text{ de } X \text{ t.q. } x \in W \subset X \backslash A\}.$$

Sea X el cono sobre el conjunto de Cantor. Denotemos a B como la base del cono y v el vértice.

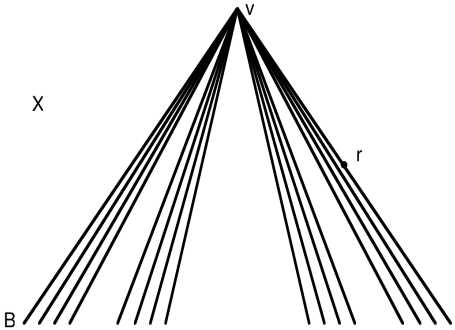


Figura : Abánico de Cantor

Definición 4

Sea X espacio métrico y compacto. Definimos,
$\mathcal{T} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dado por:

$$\mathcal{T}(A) = \{x \in X | \; \forall \text{ subcontinuo } W \text{ de } X \text{ tal que } x \in Int(W) \text{ y } W \cap A \neq \emptyset\}$$

para cada $A \subset X$.

Observación 2

En general, cuando trabajemos con la función $\mathcal{T}$ lo haremos con el complemento. Esto es, dado X espacio métrico, compacto y $A \subset X$ tenemos que:

$$\mathcal{T}(A) = X \backslash \{x \in X | \; \exists \text{ un continuo } W \text{ de } X \text{ t.q. } x \in \mathrm{Int(W)} \subset \mathrm{W} \subset X \backslash A\}$$

Algunas propiedades de $\mathcal{T}$ son:

- (1) Si $A \subset X$, entonces $\mathcal{T}(A)$ siempre es un cerrado de X.
- (2) $\mathcal{T}$ es idempotente.
- (3) Si A es un subcontinuo de X , entonces $\mathcal{T}(A)$ es un subcontinuo de X.

Consideremos el siguiente continuo:

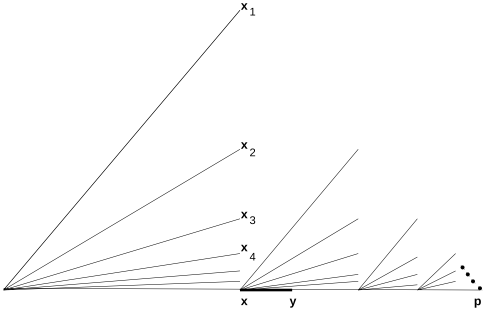


Figura : Continuo X

Observemos que $\mathcal{J}(\{p\}) = \{p\}$ y $\mathcal{J}(\{0\}) = [0, p) \times \{0\}$.

Del ejemplo anterior se sigue que en general $\mathcal{J}$ no es cerrada.

Definición 5

Sea X un continuo. Decimos que X tiene la *propiedad de Kelley en a* si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $b \in \mathcal{V}_\delta^d(a)$ y para todo $A \in C(X)$ con $a \in A$, existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $\mathcal{H}(A, B) < \varepsilon$. A δ se le llama *el número de Kelley*. Decimos que X *tiene la propiedad de Kelley*, si la tiene en todos sus puntos.

Proposición 1

Sea X un continuo con la propiedad de Kelley. Entonces para cada subcontinuo A de X, se tiene que A es un subcontinuo amplio o filamento.

Proposición 2

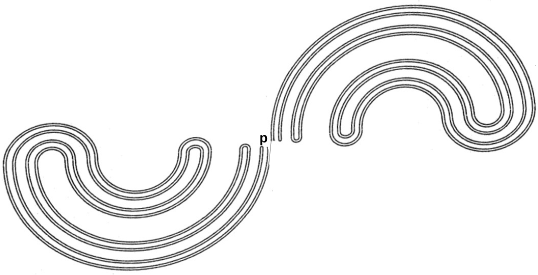
Sean X un continuo con la propiedad de Kelley y $A \subset X$ cerrado. Entonces se cumple que:

- $\mathcal{J}(A)$ es cerrado.
- $\mathcal{J}$ es idempotente.

Proposición 3

Sean X un continuo con la propiedad de Kelley y A un subconjunto cerrado de X. Entonces $\mathcal{T}(A) = \mathcal{J}(A)$.

Si X no tiene la propiedad de Kelley se puede decir algo al respecto. Consideremos el siguiente ejemplo:
Sean X_1 y X_2 dos continuos de Knaster y formamos un nuevo continuo $X = X_1 \cup X_2$ tal que $X_1 \cap X_2 = \{p\}$, donde p denota el punto extremo de X_1 y X_2.



Consideremos el círculo de Varsovia. Sea $M = \{0\} \times [0, 1]$. Observemos que si $A \in 2^X$ y $A \cap M \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{T}(A) = A \cup M$. Similarmente $\mathcal{J}(A) = A \cup M$. Por otra parte, notemos que si $A \cap M = \emptyset$, entonces $\mathcal{T}(A) = A$. Similarmente $\mathcal{J}(A) = A$. Así, en este ejemplo vemos que las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{J}$ coinciden en los subconjuntos cerrados de X.

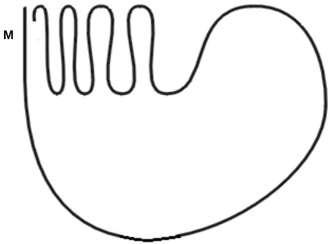


Figura : Círculo de Varsovia

12. J. R. Prajs, *Mutually aposyndetic decomposition of homogeneous continua*, Canad. J. Math. 62 (2010), no. 1, 182–201.

GRACIAS