# Conexidad Cíclica en $C_\epsilon(X)$

Roberto Carlos Mondragón Álvarez

Facultad de Ciencias, UAEMéx.

$X$ Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios
11 de Noviembre del 2015

# Conceptos

1. Un *Continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

# Conceptos

1. Un *Continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.
2. Un *Hiperespacio* de $X$ es una familia de subconjuntos de $X$ con alguna propiedad particular.

# Ejemplos de Hiperespacios

1. $2^X = \{A \subset X : A$ es no vacío y cerrado en $X\}$;

# Ejemplos de Hiperespacios

1. $2^X = \{A \subset X : A$ es no vacío y cerrado en $X\}$;
2. $C(X) = \{A \in 2^X : A$ es conexo$\}$.

# Conceptos

Dado un continuo $X$ y $\epsilon > 0$,

# Conceptos

Dado un continuo $X$ y $\epsilon > 0$,

$$C_\epsilon(X) = \{A \in C(X) : \text{diam}(A) \leq \epsilon\},$$

donde $\text{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$, y $d$ es la métrica de $X$.

## Teorema

Para cada continuo $X$ y $\epsilon > 0$, $C_\epsilon(X)$ es un continuo.

# Conceptos

Dados $x, y \in X$, un *arco* de $x$ a $y$ en $X$, es un encaje (función continua e inyectiva) $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

# Conceptos

Dados $x, y \in X$, un *arco* de $x$ a $y$ en $X$, es un encaje (función continua e inyectiva) $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

Una *curva cerrada simple* en $X$ que contiene a $x, y$, es un encaje $h : S^1 \to X$ tal que $x, y \in h(S^1)$, donde $S^1$ denota la circunferencia unitaria en el plano euclideano.

# Conceptos

Dados $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, un *arco ordenado* de $A$ a $B$ es una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$ siempre que $0 \leq s < t \leq 1$.

## Teorema

Si $A, B \in C(X)$ son tales que $A \subsetneq B$, entonces existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ de $A$ a $B$.

# Conceptos

Un continuo $X$ se dice que es:

*Cíclicamente conexo*, si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe una curva cerrada simple en $X$ que contiene a $x, y$.

# Conceptos

Un continuo $X$ se dice que es:

*Cíclicamente conexo*, si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe una curva cerrada simple en $X$ que contiene a $x, y$.

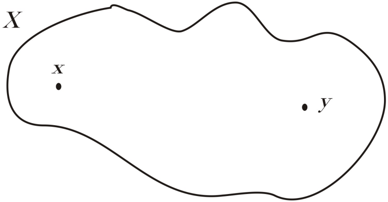



Figure: .

# Conceptos

Un continuo $X$ se dice que es:

*Cíclicamente conexo*, si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe una curva cerrada simple en $X$ que contiene a $x, y$.

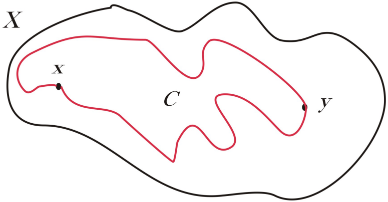



Figure: .

# Conceptos

*Encadenable por continuos*, si para cada $\epsilon > 0$ y cada par de puntos $x, y \in X$, existe una sucesión finita $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de subcontinuos de $X$ tal que $\text{diam}(A_i) < \epsilon$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $x \in A_1$, $y \in A_n$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i < n$.

# Conceptos

*Encadenable por continuos*, si para cada $\epsilon > 0$ y cada par de puntos $x, y \in X$, existe una sucesión finita $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de subcontinuos de $X$ tal que $\mathrm{diam}(A_i) < \epsilon$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $x \in A_1$, $y \in A_n$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i < n$.

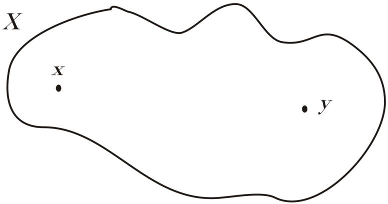



Figure: .

# Conceptos

*Encadenable por continuos*, si para cada $\epsilon > 0$ y cada par de puntos $x, y \in X$, existe una sucesión finita $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de subcontinuos de $X$ tal que $\text{diam}(A_i) < \epsilon$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $x \in A_1$, $y \in A_n$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i < n$.

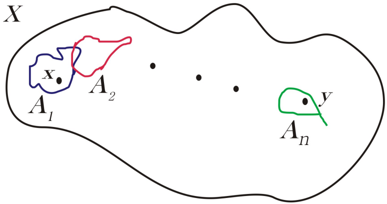



Figure: .

Si $X$ es arco-conexo, entonces $X$ es encadenable por continuos.

# Ejemplos

Continuo encadenable por continuos y no arco-conexo.

# Ejemplos

Continuo encadenable por continuos y no arco-conexo.

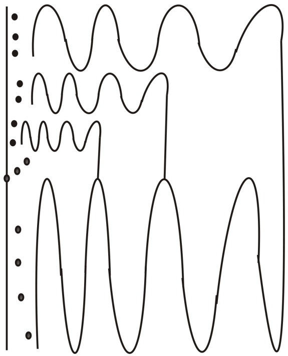


Figure: .

# Ejemplos

Continuo encadenable por continuos y no arco-conexo.

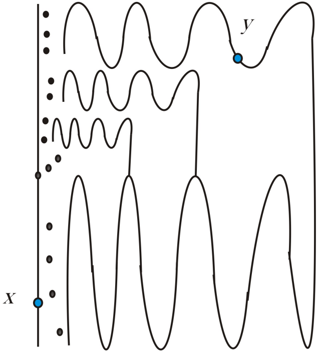



Figure: .

# Ejemplos

Continuo encadenable por continuos y no arco-conexo.

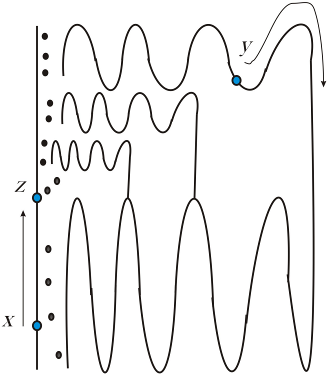



Figure: .

# Ejemplos

Continuo encadenable por continuos y no arco-conexo.

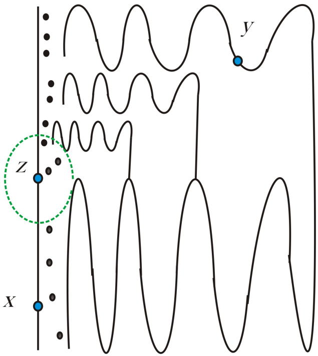



Figure: .

**Teorema 1.(M.E. Aguilera and A. Illanes,2012)**

Si $X$ es un continuo arco-conexo, entonces $C_\epsilon(X)$ es cíclicamente conexo para cada $\epsilon > 0$.

**Teorema 1.(M.E. Aguilera and A. Illanes,2012)**

Si $X$ es un continuo arco-conexo, entonces $C_\epsilon(X)$ es cíclicamente conexo para cada $\epsilon > 0$.

**Teorema 2.(M.E. Aguilera and A. Illanes,2012)**

Si $C_\epsilon(X)$ es encadenable por continuos para cada $\epsilon > 0$, entonces $X$ es encadenable por continuos.

**Corolario 3.**

Si $C_\epsilon(X)$ es cíclicamente conexo, entonces $X$ es encadenable por continuos.

**Corolario 3.**

Si $C_\epsilon(X)$ es cíclicamente conexo, entonces $X$ es encadenable por continuos.

**Problema.**

Si $X$ es un continuo encadenable por continuos, entonces $C_\epsilon(X)$ es cíclicamente conexo para cada $\epsilon > 0$?

Mostraremos que si $X$ es un continuo encadenable por continuos, entonces $C_\epsilon(X) - F_1(X)$ es cíclicamente conexo para cada $\epsilon > 0$.

Mostraremos que si $X$ es un continuo encadenable por continuos, entonces $C_\epsilon(X) - F_1(X)$ es cíclicamente conexo para cada $\epsilon > 0$.

Damos condiciones bajo las cuales $C_\epsilon(X)-$ diam$^{-1}(\epsilon)$ es cíclicamente conexo para cada $\epsilon > 0$.

Mostraremos que si $X$ es un continuo encadenable por continuos, entonces $C_\epsilon(X) - F_1(X)$ es cíclicamente conexo para cada $\epsilon > 0$.

Damos condiciones bajo las cuales $C_\epsilon(X)-$ diam$^{-1}(\epsilon)$ es cíclicamente conexo para cada $\epsilon > 0$.

Mencionamos algunos problemas que podrían ayudar a mostrar que $C_\epsilon(X)$ es cíclicamente conexo para cada $\epsilon > 0$.

## Teorema 4.(M.E. Aguilera and A. Illanes,2012)

Si $A \in C(X) - F_1(X)$, entonces existen dos puntos $a_1, a_2 \in A$, y existen arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 : [0,1] \to C(X)$ de $\{a_1\}$ a $A$ y de $\{a_2\}$ a $A$ respectivamente, tales que $\alpha_1([0,1]) \cap \alpha_2([0,1]) = \{A\}$.

## Teorema 4.(M.E. Aguilera and A. Illanes,2012)

Si $A \in C(X) - F_1(X)$, entonces existen dos puntos $a_1, a_2 \in A$, y existen arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 : [0,1] \to C(X)$ de $\{a_1\}$ a $A$ y de $\{a_2\}$ a $A$ respectivamente, tales que $\alpha_1([0,1]) \cap \alpha_2([0,1]) = \{A\}$.

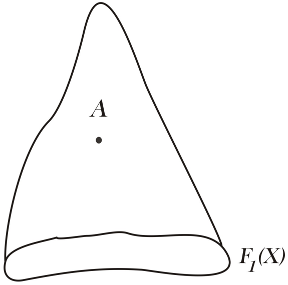



Figure: .

## Teorema 4.(M.E. Aguilera and A. Illanes,2012)

Si $A \in C(X) - F_1(X)$, entonces existen dos puntos $a_1, a_2 \in A$, y existen arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 : [0,1] \to C(X)$ de $\{a_1\}$ a $A$ y de $\{a_2\}$ a $A$ respectivamente, tales que $\alpha_1([0,1]) \cap \alpha_2([0,1]) = \{A\}$.

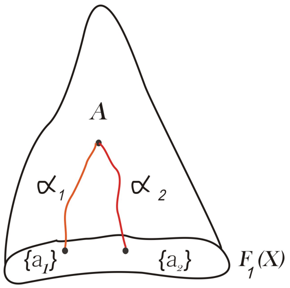



Figure: .

## Lema

Si $A, B \in C(X)$ tal que $A \subsetneq B$, entonces existen puntos $a, b \in B$ y arcos ordenados $\alpha, \beta : [0,1] \to C(X)$ de $\{a\}$ a $B$ y de $\{b\}$ a $B$ respectivamente tal que $\alpha(\frac{1}{2}) = A$ y $\alpha([0,1]) \cap \beta([0,1]) = \{B\}$.

## Lema

Si $A, B \in C(X)$ tal que $A \subsetneq B$, entonces existen puntos $a, b \in B$ y arcos ordenados $\alpha, \beta : [0,1] \to C(X)$ de $\{a\}$ a $B$ y de $\{b\}$ a $B$ respectivamente tal que $\alpha(\frac{1}{2}) = A$ y $\alpha([0,1]) \cap \beta([0,1]) = \{B\}$.

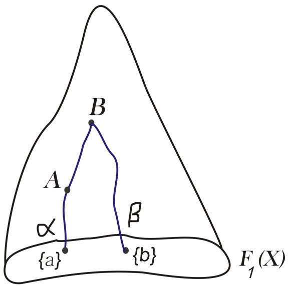



Figure: .

## Teorema

Sean $X$ un continuo y $\delta, \epsilon \in [0,1]$ tales que $0 < \delta < \epsilon \leq 1$. Si $A, B \in \text{diam}^{-1}((\delta, \epsilon))$ son tales que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces existe un arco $\alpha : [0,1] \to \text{diam}^{-1}([\delta, \epsilon])$ de $A$ a $B$.

## Teorema

Sean $X$ un continuo encadenable por continuos y $\delta, \epsilon \in [0,1]$ tal que $\delta < \epsilon$. Si $A, B \in \text{diam}^{-1}((\delta, \epsilon))$, entonces existe un arco $\alpha : [0,1] \to \text{diam}^{-1}([\delta, \epsilon])$ de $A$ a $B$.

## Teorema

Sean $X$ un continuo encadenable por continuos y $\delta, \epsilon \in [0,1]$ tal que $\delta < \epsilon$. Si $A, B \in \text{diam}^{-1}((\delta,\epsilon))$, entonces existe un arco $\alpha : [0,1] \to \text{diam}^{-1}([\delta,\epsilon])$ de $A$ a $B$.

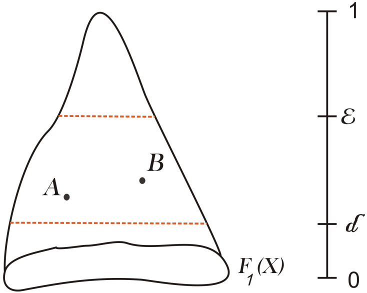



Figure: .

## Teorema

Sean $X$ un continuo encadenable por continuos y $\delta, \epsilon \in [0,1]$ tal que $\delta < \epsilon$. Si $A, B \in \operatorname{diam}^{-1}((\delta,\epsilon))$, entonces existe un arco $\alpha : [0,1] \to \operatorname{diam}^{-1}([\delta,\epsilon])$ de $A$ a $B$.

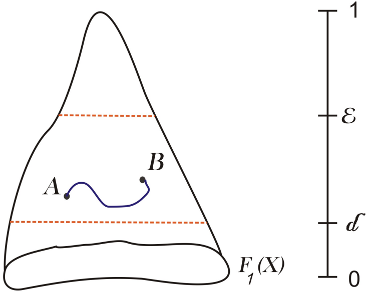
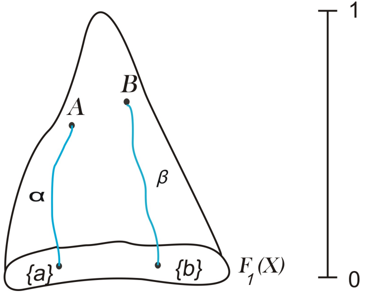



Figure: .

## Lema

Sean $A, B \in C(X)$ tales que $0 < \text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$, y sean $\alpha, \beta : [0,1] \to C(X)$ arcos ordenados de $\{a\}$ a $A$ y de $\{b\}$ a $B$ respectivamente, para algún $a \in A$ y algún $b \in B$. Si $\alpha([0,1]) \cap \beta([0,1]) = \emptyset$, entonces para cada $\delta, \epsilon \in [0,1]$ tales que $0 < \delta < \epsilon < \text{diam}(A)$, existe un arco $\gamma : [0,1] \to \text{diam}^{-1}([\delta, \epsilon])$, tal que $\mid \alpha([0,1]) \cap \gamma([0,1]) \mid = 1 = \mid \beta([0,1]) \cap \gamma([0,1]) \mid$




.

Figure: .

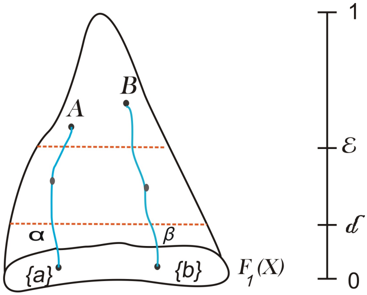



Figure: .

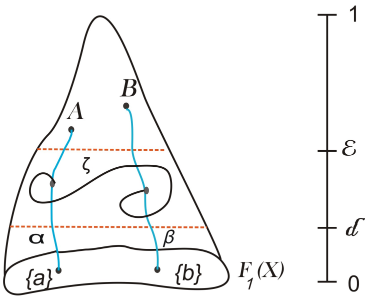



Figure: .

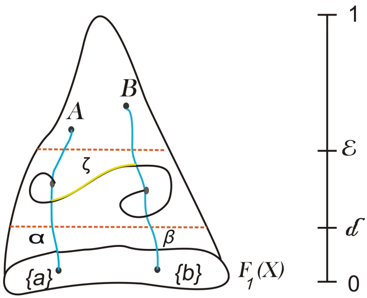



Figure: .

**Teorema**

Si $X$ es un continuo encadenable por continuos, entonces $C_\epsilon(X) - F_1(X)$ es cíclicamente conexo para cada $\epsilon > 0$.

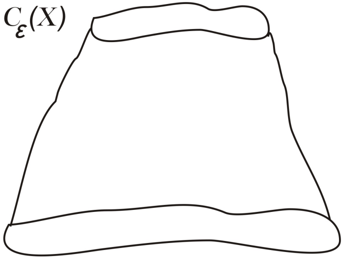
# Prueba

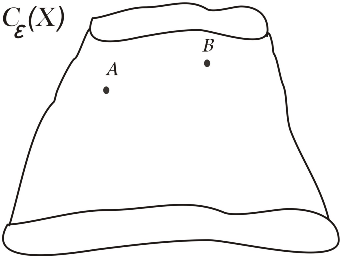
Sean $\epsilon > 0$ y $A, B \in C_\epsilon(X) - F_1(X)$.

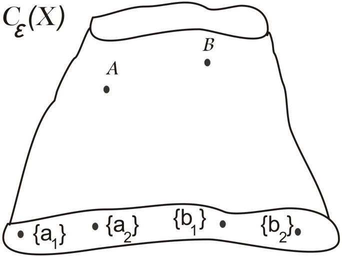
# Prueba

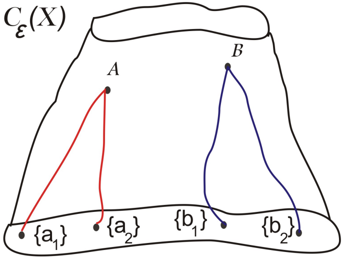
Sean $\epsilon > 0$ y $A, B \in C_\epsilon(X) - F_1(X)$.

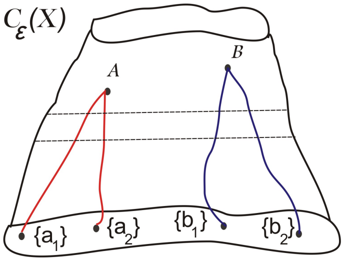
Caso 1. $A \cap B = \emptyset$.

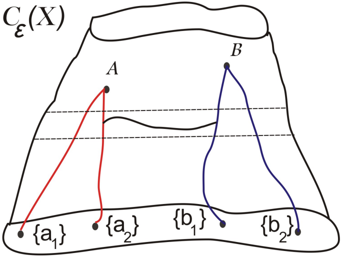

$C_\varepsilon(X)$

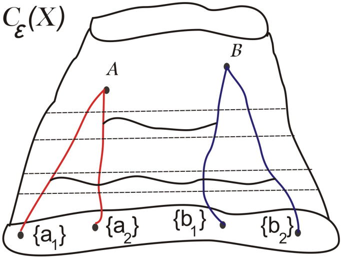

$C_\varepsilon(X)$
$B$
$A$


$C_\varepsilon(X)$
$A$
$B$
$\{a_1\}$
$\{a_2\}$
$\{b_1\}$
$\{b_2\}$


$C_\varepsilon(X)$
$A$
$B$
$\{a_1\}$
$\{a_2\}$
$\{b_1\}$
$\{b_2\}$

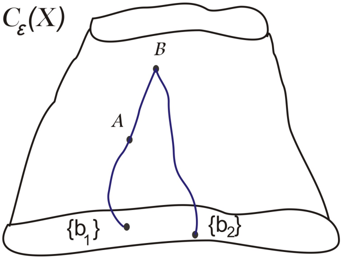

$C_\varepsilon(X)$
$A$
$B$
$\{a_1\}$
$\{a_2\}$
$\{b_1\}$
$\{b_2\}$

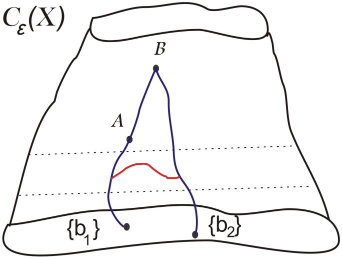

$C_\varepsilon(X)$
$A$
$B$
$\{a_1\}$
$\{a_2\}$
$\{b_1\}$
$\{b_2\}$


$C_\varepsilon(X)$
$A$
$B$
$\{a_1\}$
$\{a_2\}$
$\{b_1\}$
$\{b_2\}$

Caso 2. $A \subsetneq B$

Caso 2. $A \subsetneq B$



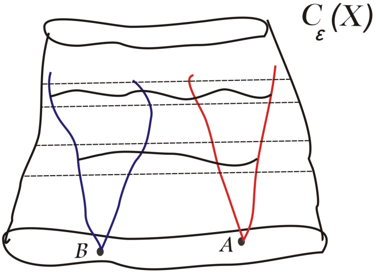

$C_\varepsilon(X)$
$B$
$A$
$\{b_1\}$
$\{b_2\}$

## Teorema

Sea $\epsilon > 0$. Si para cada $p \in X$, existen dos arcos $\alpha, \beta : [0,1] \to C_\epsilon(X)$ tales que $\alpha(0) = \{p\} = \beta(0)$ y $\alpha((0,1]) \cap \beta((0,1]) = \emptyset$. Entonces $C_\epsilon(X)-$diam$^{-1}(\epsilon)$ es cíclicamente conexo.

## Teorema

Sea $\epsilon > 0$. Si para cada $p \in X$, existen dos arcos $\alpha, \beta : [0,1] \to C_\epsilon(X)$ tales que $\alpha(0) = \{p\} = \beta(0)$ y $\alpha((0,1]) \cap \beta((0,1]) = \emptyset$. Entonces $C_\epsilon(X)$−diam$^{-1}(\epsilon)$ es cíclicamente conexo.



## Lema

Sea $p \in X$, si existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:

## Lema

Sea $p \in X$, si existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:

a) $p \notin A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

**Lema**

Sea $p \in X$, si existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:

a) $p \notin A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

b) Para cada $i, j \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, si y sólo si $\mid i - j \mid \leq 1$,

## Lema

Sea $p \in X$, si existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:

a) $p \notin A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

b) Para cada $i, j \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, si y sólo si $\mid i - j \mid \leq 1$,

c) lim $A_n = \{p\}$.

## Lema

Sea $p \in X$, si existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:

a) $p \notin A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

b) Para cada $i, j \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, si y sólo si $\mid i - j \mid \leq 1$,

c) lim $A_n = \{p\}$.

Entonces existen dos arcos $\alpha, \beta : [0,1] \to C(X)$, tales que $\alpha(0) = \{p\} = \beta(0)$, $\alpha((0,1]) \cap \beta((0,1]) = \emptyset$ y diam$(\alpha(t))$, diam$(\beta(t)) > 0$, para cada $t \in (0,1]$.

## Corolario.

Si para cada $p \in X$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:

## Corolario.

Si para cada $p \in X$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:

a) $p \notin A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

## Corolario.

Si para cada $p \in X$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:

a) $p \notin A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

b) Para cada $i, j \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, si y sólo si $\mid i - j \mid \leq 1$,

## Corolario.

Si para cada $p \in X$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:

a) $p \notin A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

b) Para cada $i, j \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, si y sólo si $| \, i - j \, | \leq 1$,

c) lim $A_n = \{p\}$.

## Corolario.

Si para cada $p \in X$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:

a) $p \notin A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

b) Para cada $i, j \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, si y sólo si $\mid i - j \mid \leq 1$,

c) lim $A_n = \{p\}$.

Entonces $C_\epsilon(X)-$ diam$^{-1}(\epsilon)$ es cíclicamente conexo para cada $\epsilon > 0$.

**Problema 1.**

Sean $X$ un continuo encadenable por continuos y $p \in X$. Existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:

## Problema 1.

Sean $X$ un continuo encadenable por continuos y $p \in X$. Existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:

a) $p \notin A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

## Problema 1.

Sean $X$ un continuo encadenable por continuos y $p \in X$. Existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:
a) $p \notin A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$,
b) Para cada $i, j \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, si y sólo si $\mid i - j \mid \leq 1$,

## Problema 1.

Sean $X$ un continuo encadenable por continuos y $p \in X$. Existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $X$ tales que:
a) $p \notin A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$,
b) Para cada $i, j \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, si y sólo si $\mid i - j \mid \leq 1$,
c) lim $A_n = \{p\}$?

## Problema 2.

Sea $X$ un continuo encadenable por continuos y supongamos que para cada $p \in X$, existen arcos $\alpha_1, \alpha_2 : [0,1] \to C(X)$ tales que:

## Problema 2.

Sea $X$ un continuo encadenable por continuos y supongamos que para cada $p \in X$, existen arcos $\alpha_1, \alpha_2 : [0,1] \to C(X)$ tales que:

a) $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \{p\}$,

## Problema 2.

Sea $X$ un continuo encadenable por continuos y supongamos que para cada $p \in X$, existen arcos $\alpha_1, \alpha_2 : [0,1] \to C(X)$ tales que:

a) $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \{p\}$,

b) $\alpha_1([0,1]) \cap \alpha_2([0,1]) = \{p\}$,

## Problema 2.

Sea $X$ un continuo encadenable por continuos y supongamos que para cada $p \in X$, existen arcos $\alpha_1, \alpha_2 : [0,1] \to C(X)$ tales que:
a) $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \{p\}$,
b) $\alpha_1([0,1]) \cap \alpha_2([0,1]) = \{p\}$,
c) diam$(\alpha_1(t))$, diam$(\alpha_2(t)) > 0$.
Es $C_\epsilon(X)$ cíclicamente conexo para cada $\epsilon > 0$?

GRACIAS!!!