Arcos en límites inversos generalizados

Facultad de Ciencias, UNAM

November 8, 2015

Definiciones preliminares

- Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.
- Un **arco** es un conjunto homeomorfo al intervalo $[0,1]$
- Para un espacio topológico X

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es cerrado y no vacío } \}$$
$$C(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es conexo } \}$$

- Dada $f : X \to 2^Y$ decimos que f es **semicontinua superiormente (scs)** si para todo abierto $V \subset Y$ el conjunto $\{x \in X | \ f(x) \subset V\}$ es abierto en X. Se define y denota por

$$\mathcal{G}(f) = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\}$$

Ejemplo

Sea $F^* : [0,1] \to 2^{[0,1]}$ dada por

$$F^*(x) = [0,1] \text{ si } x = 0 \qquad F^*(x) = \{1\} \text{ si } x \neq 0.$$

Obs. Si $V \subset [0,1]$ abierto, $\{x \in [0,1] | F^*(x) \subset V\} = \{\emptyset, V, [0,1]\}$.

Un poco de historia

En 2013 William S. Mahavier [1] introdujo el concepto de **límite inverso generalizado** para un subconjunto cerrado M de $[0,1]^2$, de la siguiente forma:

$$\underleftarrow{lim} M = \{(x_1, x_2, \ldots) \in \prod_{i=1}^{n} [0,1]_i \mid (x_{i+1}, x_i) \in M \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}$$

Ejemplos

- Si $M = [0,1]^2$, $\underleftarrow{lim} M = \prod_{i=1}^{n} [0,1]_i$
- Si $M = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$, $\underleftarrow{lim} M \approx [0,1]$
- Si $M = [0,1] \times \{0\}$, $\underleftarrow{lim} M = \{(0,0,0,\ldots)\}$

[1] Inverse limits with subsets of $[0,1] \times [0,1]$, Topology Appl. 141

Proposición

Sea $M \subset [0,1] \times [0,1]$ tal que $\pi_1(M) = [0,1]$. Entonces M es cerrado si y sólo si existe $f : [0,1] \to 2^{[0,1]}$ función scs tal que $M = \mathcal{G}(f)$.

Definición

Sea $f : [0,1] \to 2^{[0,1]}$ función scs. Definimos el límite inverso generalizado para f como:

$$X_\infty = \{(x_1, x_2, ...) \in \prod_{i=1}^{n} [0,1]_i \mid x_i \in f(x_{i+1}) \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}$$

Ejemplo especial

Sea F^* como la definimos previamente. Entonces X_∞ es un arco.

Porque?

Observemos que los siguientes conjuntos pertenecen a X_∞:

$$A_1 = [0,1] \times \{0\} \times \{0\} \times ...$$

Es un arco con puntos extremos $(0,0,0,...)$ y $(1,0,0,...)$

$$A_2 = \{1\} \times [0,1] \times \{0\} \times \{0\} \times ...$$

Es un arco con punto inicial $(1,0,0,,...)$ y final $(1,1,0,0,...)$

$$A_3 = \{1\} \times \{1\} \times [0,1] \times \{0\} \times \{0\} \times ...$$

Es un arco con punto inicial $(1,1,0,0,...)$ y final $(1,1,1,0,0,...)$

De esta manera obtenemos una sucesión de arcos A_n cuyo diámetro converge a 0. De modo que

$$X_\infty = \bigcup_{n \geq 1} A_n \cup \{(1,1,1,...)\}$$

A partir de este ejemplo podríamos preguntarnos lo siguiente:

Será que:

Dado $M \subset [0.1] \times [0,1]$ arco que va de $(0,0)$ a $(1,1)$ formado por la unión finita de segmentos de recta paralelos a los ejes coordenados. Entonces $\underleftarrow{lim} M$ es un arco?.