# Agujeros en bloques de Whitney en el hiperespacio de subcontinuos de árboles finitos

**Marlen Jiménez Valdes**
Dr. José Guadalupe Anaya Ortega
Dr. Fernando Orozco Zitli

Universidad Autónoma del Estado de México.

X Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios
Querétaro
10 - 13 de Noviembre de 2015

# PRELIMINARES

**Definición**

*Un **arco** es cualquier copia topológica del intervalo* $[0, 1]$.

# PRELIMINARES

**Definición**

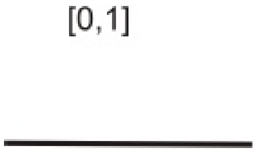
*Un **arco** es cualquier copia topológica del intervalo* $[0,1]$.

**Definición**

*Una **gráfica finita** es un continuo que se construye con una unión finita de arcos, los cuales cumplen que cada par de arcos que la conforman se intersectan en un número finito de puntos.*

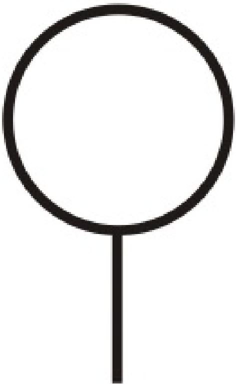
# EJEMPLOS

# EJEMPLOS



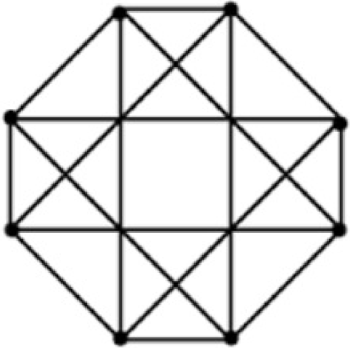
# EJEMPLOS

[0,1]

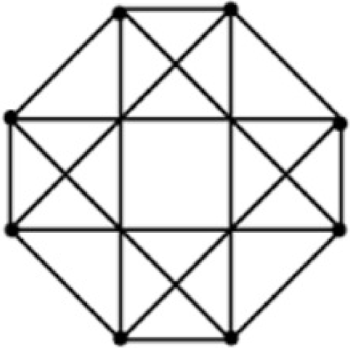


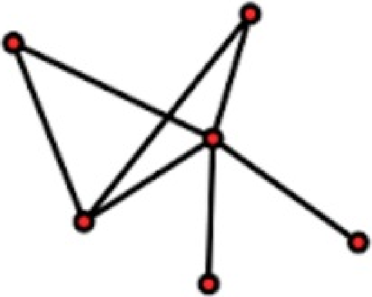
# EJEMPLOS

# EJEMPLOS



# EJEMPLOS





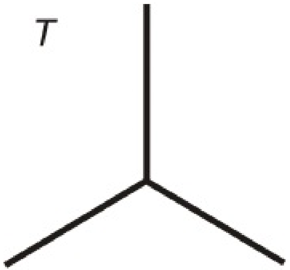
# PRELIMINARES

**Definición**

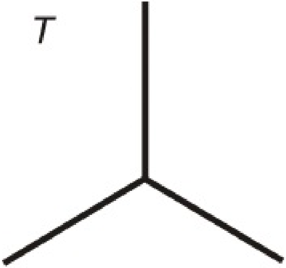
*Un* ***árbol*** *es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.*

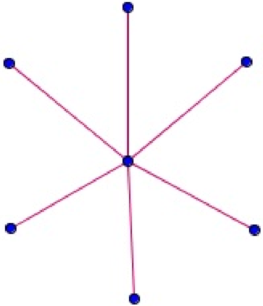
# EJEMPLOS DE ARBOLES

# EJEMPLOS DE ARBOLES



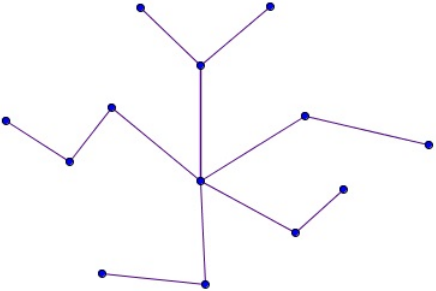
# EJEMPLOS DE ARBOLES



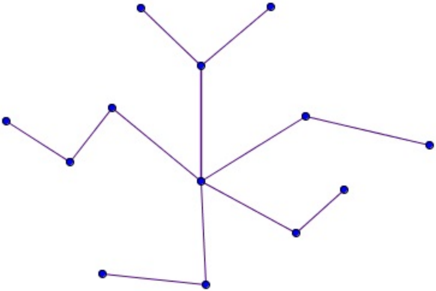



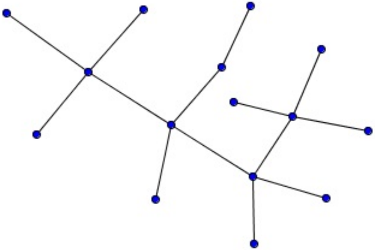
# EJEMPLOS DE ARBOLES

# EJEMPLOS DE ARBOLES



# EJEMPLOS DE ARBOLES





# PRELIMINARES

**Definición**

*Si $X$ es un continuo, un **hiperespacio** del continuo $X$ es una familia de subconjuntos de $X$ que cumplen algunas propiedades.*

Algunos ejemplos de Hiperespacios son:

Algunos ejemplos de Hiperespacios son:

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

# PRELIMINARES

Algunos ejemplos de Hiperespacios son:

$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$
$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$

# PRELIMINARES

Algunos ejemplos de Hiperespacios son:

$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$
$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$
$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$

# PRELIMINARES

Algunos ejemplos de Hiperespacios son:

$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$.
$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$.
$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$.
$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$.

Todos los hiperespacios que se definieron son espacios métricos, con la métrica de Hausdorff.

**Definición**

*Sea $X$ un continuo, $X$ es un* ***árbol finito*** *si se puede poner como unión finita de arcos de manera que cada dos de ellos se intersecten en uno de sus extremos o su intersección es vacía.*

# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito

**Definición**

*Sea $X$ un continuo, $X$ es un* ***árbol finito*** *si se puede poner como unión finita de arcos de manera que cada dos de ellos se intersecten en uno de sus extremos o su intersección es vacía.*

**Definición**

*Una* ***arista*** *de $X$ es un arco que une a un par de puntos no ordinarios (Vértices).*

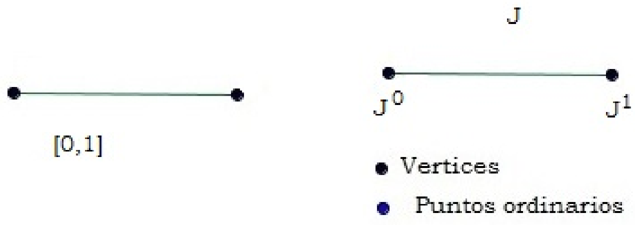
# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito

# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito

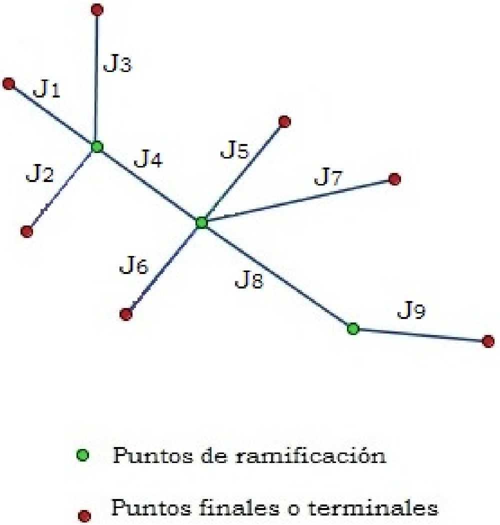
Identificamos cada arista $J$ con el intervalo $[0,1]$ pensando que tiene extremos $J^0$ y $J^1$ y la métrica se comporta como la longitud de arco.

# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito

Identificamos cada arista $J$ con el intervalo $[0,1]$ pensando que tiene extremos $J^0$ y $J^1$ y la métrica se comporta como la longitud de arco.



# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito

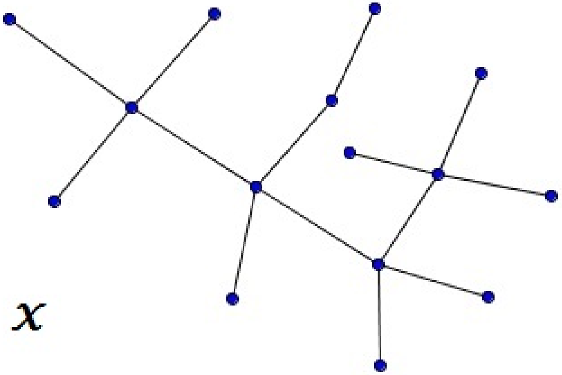


# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito

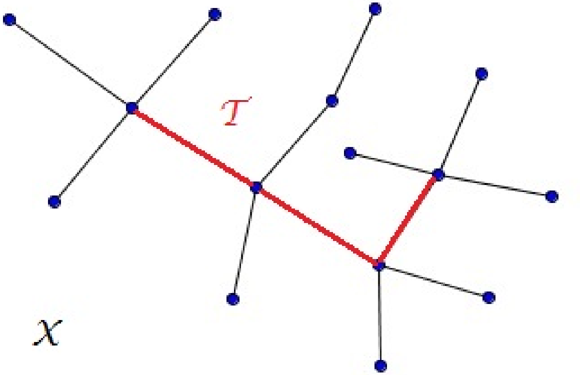
**Definición**

*Sea $X$ un árbol finito. Un* ***árbol interno*** *de $X$ es un árbol contenido en $X$ que no contiene puntos terminales, sus puntos terminales son puntos de ramificación.*

# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito



# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito



# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito

A continuación daremos una forma de ver al hiperespacio $C(X)$.

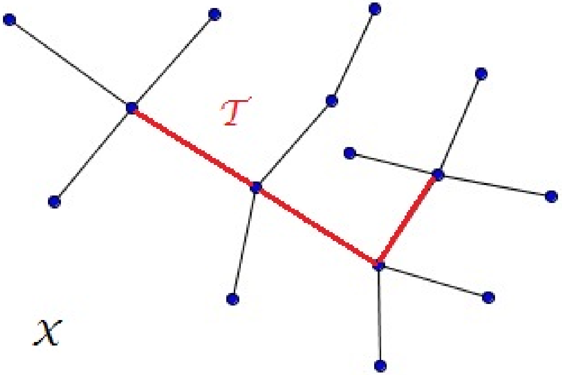
# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito

Si $X$ es un árbol finito y $T$ un árbol interno de $X$ se toman a todos los subcontinuos de la forma:

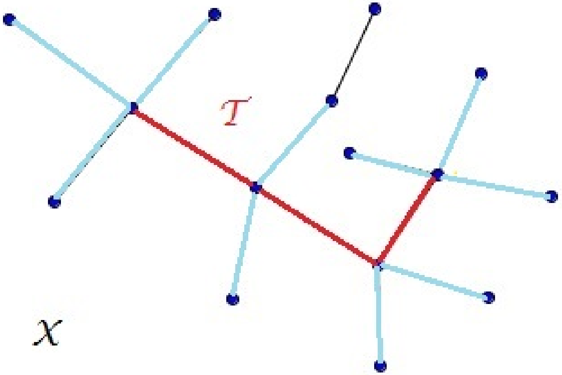
$$T \cup [J_1^0, c_1] \cup ... \cup [J_n^0, c_n] \text{ con } c_i \in [0,1]$$

Donde los $J_i$ tienen uno de sus extremos en $T$

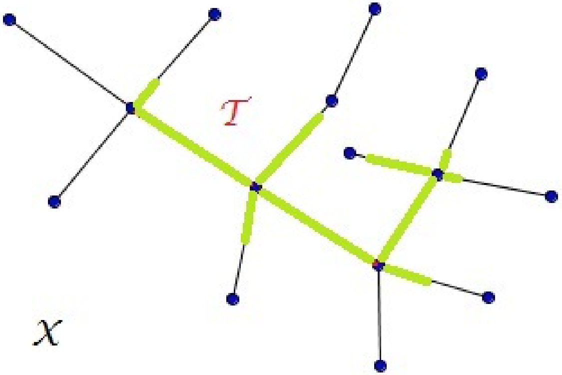
# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito



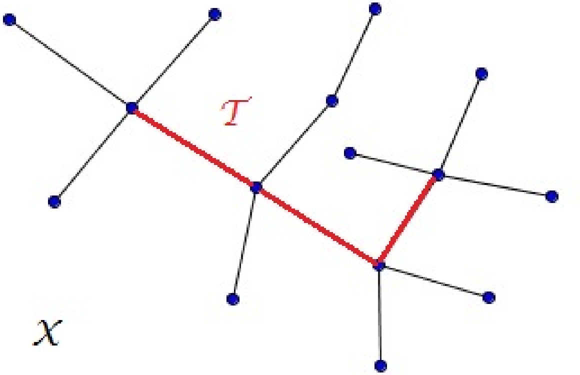
# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito



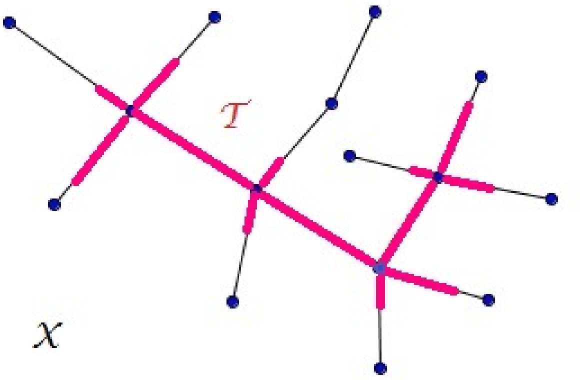
# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito



# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito



# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito



# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito

Denotaremos a la familia de todos estos subcontinuos por $M(T)$.

# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito

Denotaremos a la familia de todos estos subcontinuos por $M(T)$.

Cuando $J$ es una arista de $X$, definimos $M(\emptyset, J) = C(J)$.

# Hiperespacio $C(X)$ con $X$ un árbol finito

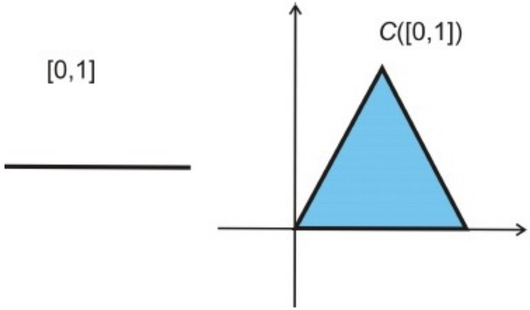
**Teorema**

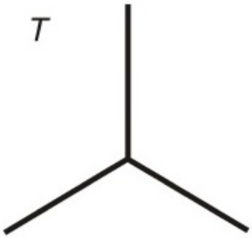
$$C(X) = \left(\cup\{M(T) : T \textit{ es un árbol interno de } X\}\right) \\ \cup\left(\cup\{M(\emptyset, J) : J \textit{ es una arista de } X\}\right)$$

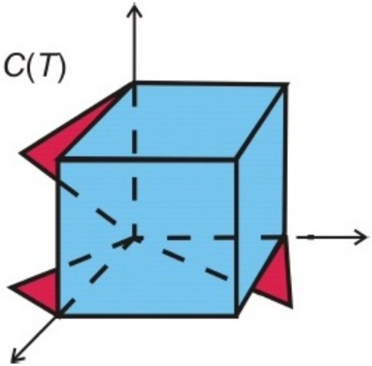
# Modelos de Hiperespacios

Los hiperespacios se definen como subconjuntos de un continuo $X$, encontrar un modelo para un hiperespacio $\mathcal{H}$ consiste en encontrar un espacio más familiar, que sea homeomorfo a $\mathcal{H}$ y que sus elementos sean puntos en lugar de subconjuntos.

# Ejemplos de modelos de hiperespacios




T


C(T)

# Funciones de Whitney

**Definición**

*Una* ***función de Whitney*** *es una función continua* $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ *que satisface las siguientes condiciones :*

# Funciones de Whitney

**Definición**

*Una **función de Whitney** es una función continua* $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ *que satisface las siguientes condiciones :*
*a)*$\mu(\{p\}) = 0$ *para cada* $p \in X$

# Funciones de Whitney

**Definición**

*Una **función de Whitney** es una función continua* $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ *que satisface las siguientes condiciones :*
*a)*$\mu(\{p\}) = 0$ *para cada* $p \in X$
*b)*$\mu(A) < \mu(B)$ *siempre que* $A \subset B$

# Funciones de Whitney

**Definición**

*Una **función de Whitney** es una función continua* $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ *que satisface las siguientes condiciones :*
*a)*$\mu(\{p\}) = 0$ *para cada* $p \in X$
*b)*$\mu(A) < \mu(B)$ *siempre que* $A \subset B$
*c)*$\mu(X) = 1$

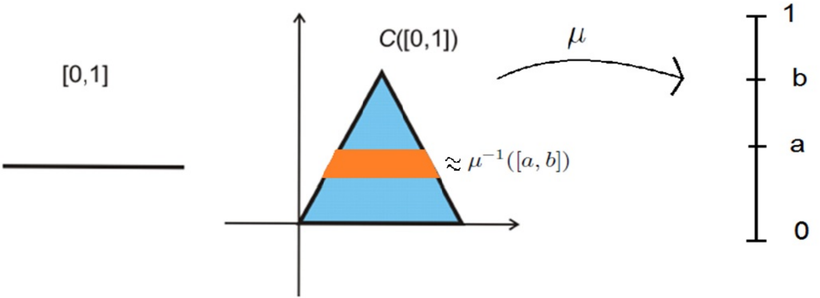
# Funciones de Whitney

**Definición**

*Una **función de Whitney** es una función continua* $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ *que satisface las siguientes condiciones :*
*a)*$\mu(\{p\}) = 0$ *para cada* $p \in X$
*b)*$\mu(A) < \mu(B)$ *siempre que* $A \subset B$
*c)*$\mu(X) = 1$

Dados $a, b \in [0, 1]$ un bloque de Whitney es el conjunto $\mu^{-1}([a, b])$.

# Bloque de Whitney



**Definición**

*Un espacio topológico conexo $Z$ es **unicoherente** si cada que $Z = A \cup B$, con $A$ y $B$ subconjuntos cerrados y conexos en $Z$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

**Definición**

*Un espacio topológico conexo $Z$ es* ***unicoherente*** *si cada que $Z = A \cup B$, con $A$ y $B$ subconjuntos cerrados y conexos en $Z$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

**Definición**

*Sean $Z$ un espacio topológico unicoherente y $z$ un elemento de $Z$, decimos que $z$* ***hace un agujero*** *en $Z$ si $Z - \{z\}$ no es unicoherente, en caso contrario, decimos que $z$ no agujera a $Z$.*

Recientemente, una herramienta para establecer diferencia entre espacios topológicos es descubrir qué tanto cambia la unicoherencia del espacio al quitarle un punto.

Recientemente, una herramienta para establecer diferencia entre espacios topológicos es descubrir qué tanto cambia la unicoherencia del espacio al quitarle un punto.
Lo anterior queda plasmado en el siguiente problema:

Recientemente, una herramienta para establecer diferencia entre espacios topológicos es descubrir qué tanto cambia la unicoherencia del espacio al quitarle un punto.
Lo anterior queda plasmado en el siguiente problema:

**Problema**

*Sea $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de $X$. Para que elementos $A \in \mathcal{H}(X)$, $A$ hace un agujero en $\mathcal{H}(X)$.*

Otro enfoque relacionado a este problema es dada una funcion de Whitney, estudiar los bloques en lugar de estudiar todo el espacio, en el siguiente sentido:

Otro enfoque relacionado a este problema es dada una funcion de Whitney, estudiar los bloques en lugar de estudiar todo el espacio, en el siguiente sentido:

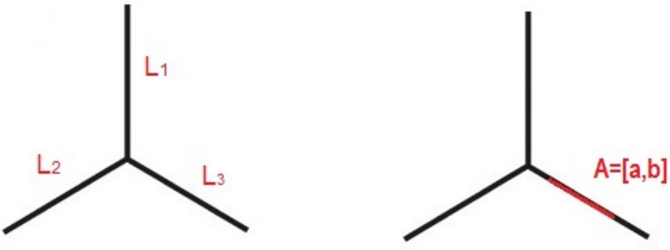
**Problema**

*Dado un árbol finito $X$, y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una funcion de Whitney, ¿para cuáles elementos $A \in \mu^{-1}([a,b])$, se tiene que $A$ agujera a $\mu^{-1}([a,b])$?.*

**Teorema**

*Sea* $X = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ *un árbol finito no trivial y sea* $\mu : C(X) \to [0,1]$ *una función de Whitney. Entonces* $A$ *agujera a* $\mu^{-1}([d,e])$ *si y sólo si* $A = [a,b] \subset L_i$*, para algún* $i \in \{1, 2, ...\}$*, con* $[a,b] \cap \{p_i, v_i\} = \emptyset$ *donde* $p_i, v_i$ *son los vertices de* $L_i$ *y* $A \in \mu^{-1}((d,e))$.

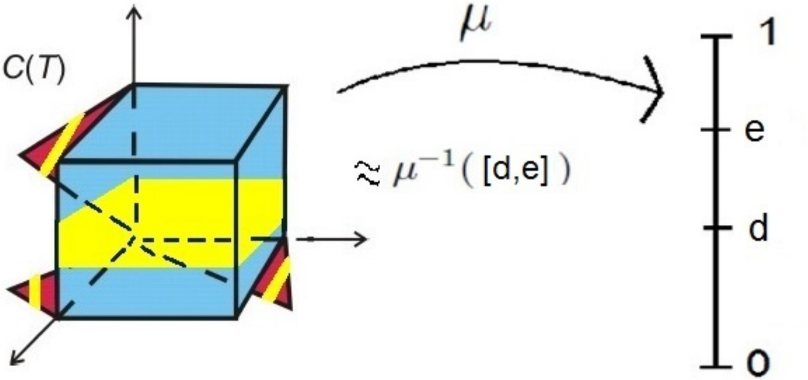
# Bosquejo de la demostración




$$A \in \mu^{-1}((d, e)).$$

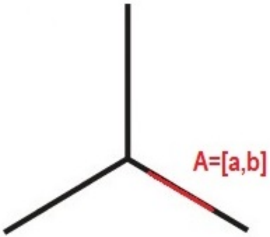
# Bosquejo de la demostración

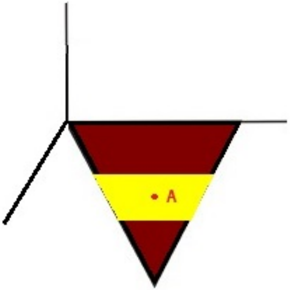
# Bosquejo de la demostración



# Bosquejo de la demostración

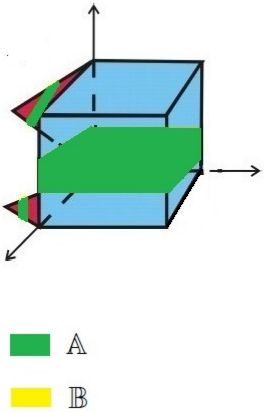
# Bosquejo de la demostración

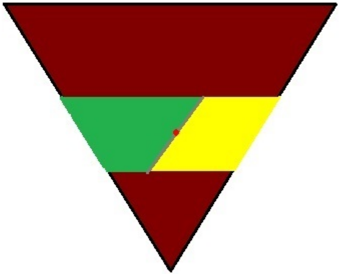


# Bosquejo de la demostración

# Bosquejo de la demostración



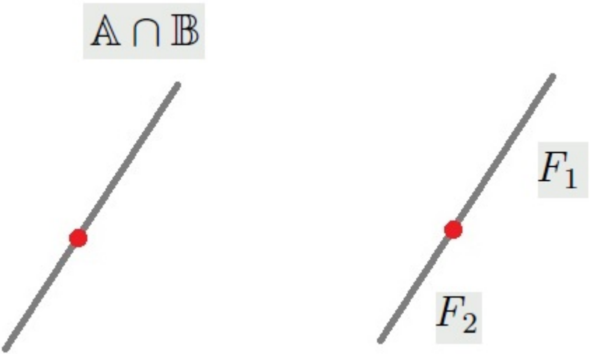



# Bosquejo de la demostración

$\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ Son subconjuntos cerrados y conexos de $\mu^{-1}([d,e]) - \{A\}$ tales que $\mu^{-1}([d,e]) - \{A\} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$

# Bosquejo de la demostración

# Bosquejo de la demostración




Con $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = F_1 \cup F_2$

# Bosquejo de la demostración

Como $F_1, F_2$ son una separación de $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$. Entonces $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ no es conexo.
Así $\mu^{-1}([d, e]) - \{A\}$ no es unicoherente.

# Bosquejo de la demostración

Por lo tanto $A$ agujera a $\mu^{-1}([d, e])$.


GRACIAS