La clase de los continuos enrejados es F_2-cerrada y F_3-cerrada

Luis Alberto Guerrero Méndez

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

X Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios

Santiago de Querétaro, Querétaro
11 de noviembre del 2015

La clase de los continuos enrejados es F_2-cerrada y F_3-cerrada

Luis Alberto Guerrero Méndez

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

X Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios

Santiago de Querétaro, Querétaro
11 de noviembre del 2015

Definición

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.

Definición

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, consideremos la familia siguiente de subconjuntos de X

$$F_n(X) = \{A \subset X \colon A \text{ es no vacío y tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

A $F_n(X)$ con la métrica de Hausdorff se le conoce como el ***n*-ésimo producto simétrico** de X.

Definición

Sean $\mathcal{C}$ una clase de continuos, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, F_n(X), C_n(X), HS_n(X)\}$. Decimos que la clase $\mathcal{C}$ es $\mathcal{H}$**-cerrada** si la implicación siguiente es verdadera:
si $X \in \mathcal{C}$ y Y es un continuo tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces $Y \in \mathcal{C}$.

Dado un continuo X, sea

$$\mathcal{G}(X) = \{x \in X \colon x \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X$$

$$\text{tal que } G \text{ es una gráfica finita}\}$$

y sea

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

Dado un continuo X, sea

$$\mathcal{G}(X) = \{x \in X \colon x \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X$$

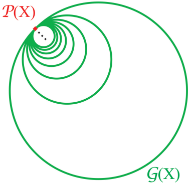
$$\text{tal que } G \text{ es una gráfica finita}\}$$

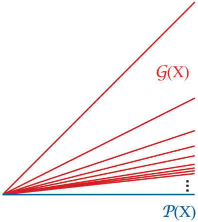
y sea

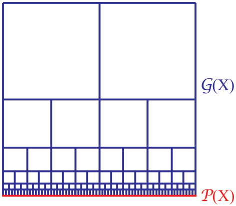
$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

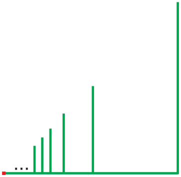
Definición

Un continuo X es **casi enrejado** si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X. Un continuo casi enrejado X es **enrejado** si X tiene una base de vecindades $\mathfrak{B}$ tal que para todo $U \in \mathfrak{B}$ se cumple que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.


$\mathcal{P}(X)$
$\mathcal{G}(X)$


$\mathcal{G}(X)$
$\mathcal{P}(X)$


$\mathcal{G}(X)$
$\mathcal{P}(X)$



Teorema (Illanes, 2002)

La clase de las dendritas es F_2-cerrada.

Teorema (Illanes, 2002)

La clase de las dendritas es F_2-cerrada.

Pregunta (Illanes, 2002)

¿La clase de las dendritas será F_n-cerrada para $n \geq 3$?

Teorema (J. Charatonik, Illanes, 2006)

Sea $n \in \mathbb{N}$. Un continuo X es localmente conexo si y sólo si $F_n(X)$ es localmente conexo.

Teorema (J. Charatonik, Illanes, 2006)

Sea $n \in \mathbb{N}$. Un continuo X es localmente conexo si y sólo si $F_n(X)$ es localmente conexo.

Corolario

Para todo $n \in \mathbb{N}$, la clase de los continuos localmente conexos es F_n-cerrada.

Teorema (Castañeda, Illanes, 2006)

Sea $n \in \mathbb{N}$ y X, Y continuos tales que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$. Entonces X es gráfica finita si y sólo si Y es gráfica finita.

Teorema (Castañeda, Illanes, 2006)

Sea $n \in \mathbb{N}$ y X, Y continuos tales que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$. Entonces X es gráfica finita si y sólo si Y es gráfica finita.

Corolario

Para todo $n \in \mathbb{N}$, la clase de las gráficas finitas es F_n-cerrada.

Teorema (Acosta, Hernández-Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2009)

Para todo $n \in \mathbb{N}$, la clase de las dendritas es F_n-cerrada.

Teorema (Acosta, Hernández-Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2009)

Para todo $n \in \mathbb{N}$, la clase de las dendritas es F_n-cerrada.

Teorema (Acosta, Hernández-Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2009)

Para todo $n \in \mathbb{N}$, la clase de las dendritas con conjunto de puntos extremos cerrado es F_n-cerrada.

Dado un continuo X, sea

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ que es una } n\text{-celda}\}.$$

Dado un continuo X, sea

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ que es una } n\text{-celda}\}.$$

Teorema (Herrera-Carrasco, Macías-Romero, Vázquez-Juárez, 2012)

Sea X un continuo localmente conexo. Entonces las proposiciones siguientes son equivalentes.

(i) X es casi enrejado.

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathcal{E}_n(X)$ es denso en $F_n(X)$.

(iii) Todo conjunto no vacío y abierto en X contiene un arco libre de X.

Corolario

Para todo $n \in \mathbb{N}$, la clase de los continuos casi enrejados localmente conexos es F_n-cerrada.

Teorema (Borsuk, Ulam, 1931)

Si X es un continuo arco conexo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(X)$ es arco conexo.

Teorema (Borsuk, Ulam, 1931)

Si X es un continuo arco conexo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(X)$ es arco conexo.

Teorema (J. Charatonik, Illanes, 2006)

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces X es arco conexo si y sólo si $F_n(X)$ es arco conexo.

Teorema (Borsuk, Ulam, 1931)

Si X es un continuo arco conexo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(X)$ es arco conexo.

Teorema (J. Charatonik, Illanes, 2006)

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces X es arco conexo si y sólo si $F_n(X)$ es arco conexo.

Corolario

Para todo $n \in \mathbb{N}$, la clase de los continuos arco conexos es F_n-cerrada.

Definición

Un **alambre** en un continuo X es un un subconjunto A de X tal que A es una componente de un conjunto abierto en X y A es homeomorfo a alguno de los espacios $(0, 1)$, $[0, 1)$, $[0, 1]$ o S^1.

Definición

Un **alambre** en un continuo X es un un subconjunto A de X tal que A es una componente de un conjunto abierto en X y A es homeomorfo a alguno de los espacios $(0,1), [0,1), [0,1]$ o S^1.

Dado un continuo X, sea

$$W(X) = \bigcup \{A \subset X \colon A \text{ es un alambre en } X\}.$$

Definición

Un **alambre** en un continuo X es un un subconjunto A de X tal que A es una componente de un conjunto abierto en X y A es homeomorfo a alguno de los espacios $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]$ o S^1.

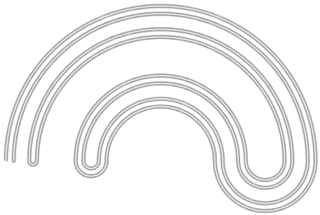
Dado un continuo X, sea

$$W(X) = \bigcup\{A \subset X \colon A \text{ es un alambre en } X\}.$$

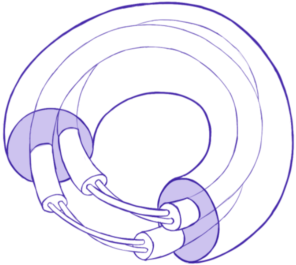
Definición

Un continuo X es **alambrado** si el conjunto $W(X)$ es denso en X.

Continuos alambrados



Arcoiris de Knaster



Solenoide

Teorema (Hernández-Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2013)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y X, Y continuos tales que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$. Entonces X es alambrado si y sólo si Y es alambrado.

Teorema (Hernández-Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2013)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y X, Y continuos tales que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$. Entonces X es alambrado si y sólo si Y es alambrado.

Corolario

Para todo $n \in \mathbb{N}$, la clase de los continuos alambrados es F_n-cerrada.

Teorema (Guerrero-Méndez, Herrera-Carrasco, López, Macías-Romero, 2015)

La clase de los continuos enrejados es F_n-cerrada, para $n \in \{2, 3\}$.

Definición

Dado $n \in \mathbb{N}$, decimos que un continuo X tiene **hiperespacio único** $F_n(X)$ si la implicación siguiente es verdadera: si Y es un continuo tal que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.

Teorema (Guerrero-Méndez, Herrera-Carrasco, López, Macías-Romero, 2015)

Si X, Y son continuos enrejados, $n \in \{2, 3\}$ y $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.

Teorema (Guerrero-Méndez, Herrera-Carrasco, López, Macías-Romero, 2015)

Si X es un continuo enrejado y $n \in \{2, 3\}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Teorema (Guerrero-Méndez, Herrera-Carrasco, López, Macías-Romero, 2015)

Si X es un continuo enrejado y $n \in \{2, 3\}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Corolario (Guerrero-Méndez, Herrera-Carrasco, López, Macías-Romero, 2015)

Si X es un continuo enrejado y $n \in \mathbb{N}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Pregunta (Guerrero-Méndez, Herrera-Carrasco, López, Macías-Romero, 2015)

Si X es un continuo alambrado y $n \in \{2, 3\}$, ¿tiene X hiperespacio único $F_n(X)$?

- G. Acosta, R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Dendrites and symmetric products*, Glasnik Math. Ser. III 44 (2009) no. 1, 195–210.
- J. J. Charatonik, A. Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mountain J. Math. 36 (2006), 811–856.
- E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl. 153 (2006), 1434–1450.
- J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978.
- L. A. Guerrero-Méndez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products,* Topology Appl. 191 (2015), 16–27.

- R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua,* Rocky Mountain J. Math. 43 (5)(2013), 1583-1624.
- R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of symmetric products,* Topology Appl. 160 (2013), 1577-1587.
- D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique symmetric products,* Topology Proc. 34 (2009), 175–190.
- D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products,* Journal of Mathematics Research; 4(4) (2012), 1–9.
- A. Illanes, *Uniqueness of Hyperspaces,* Questions Answers Gen. Topology, 30 (2012), 21–44.

- A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- S. B. Nader, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

¡Muchas gracias! :)