Contractibilidad y funciones confluentes entre abanicos

Lucero Madrid Mendoza
Félix Capulín Pérez

Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México

Noviembre 2015

Definición

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Definición

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Definición

Un dendroide es un continuo arco-conexo y hereditariamente unicoherente.

Definición

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Definición

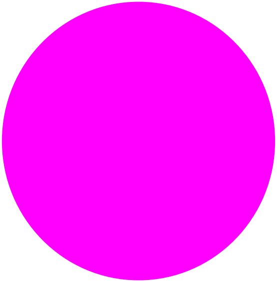
Un dendroide es un continuo arco-conexo y hereditariamente unicoherente.

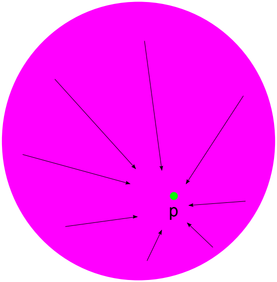
Definición

Un dendroide que tiene exactamente un punto de ramificación es llamado abanico.

Definición

Se dice que un espacio X es contráctil siempre que cada función continua $f : X \to X$ es homotópica a una función constante.




p

Definición

Sean X,Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Diremos que f es:
a) ***Abierta****. Si para cada conjunto abierto U de X, $f(U)$ es abierto en Y.*
b) ***Monótona****. Si para cada $K \in C(Y)$ se tiene que $f^{-1}(K)$ es un continuo.*
c) ***Confluente****. Si para cada $K \in C(Y)$ y cada componente $C \subset f^{-1}(K)$ se tiene que $f(C) = K$.*
d) ***Ligera****. Si para cada $y \in Y$ se tiene que $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo.*

Pregunta

¿Qué clases de funciones confluentes preservan contractibilidad (no contractibilidad) entre abanicos?

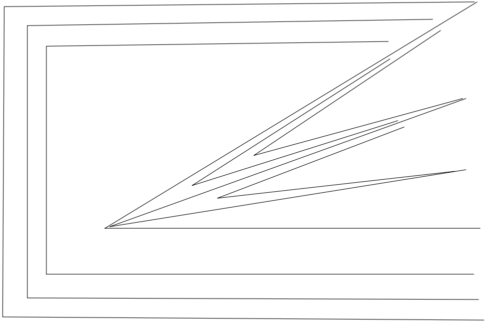
J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and S. Miklos, Confluents mappings of fans, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), ***301*** *(1990), 1-82.*

Definición

*Un punto p de un dendroide X es llamado un **Q-punto** si existe una sucesión $\{x_n\}$ en X que converge a p con $Lspx_n \neq \{p\}$ y tal que si x_np_n es el arco irreducible entre x_n y $Lspx_n$, entonces la sucesión p_n converge a p.*

Definición

*Un punto p de un dendroide X es llamado un **Q-punto** si existe una sucesión $\{x_n\}$ en X que converge a p con $Lspx_n \neq \{p\}$ y tal que si $x_n p_n$ es el arco irreducible entre x_n y $Lspx_n$, entonces la sucesión p_n converge a p.*



Definición

*Decimos que un dendroide X contiene un **zig-zag** siempre que exista un arco A en X con puntos finales p y q y una sucesión de arcos A_n con puntos finales p_n y q_n y puntos $p_n^1, q_n^1 \in A_n \setminus \{p_n, q_n\}$ tal que*

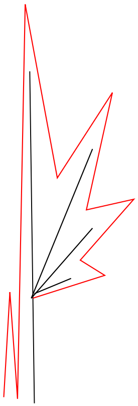
$A = LimA_n$,

$p = limp_n = limp_n^1$,

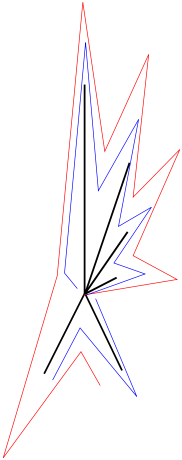
$q = limq_n = limq_n^1$ *y*

$p_nq_n^1 \subset p_np_n^1$ *para cada* $n \in \mathcal{N}$.

Abanico que contiene un zig-zag.



Abanico que NO contiene un zig-zag.

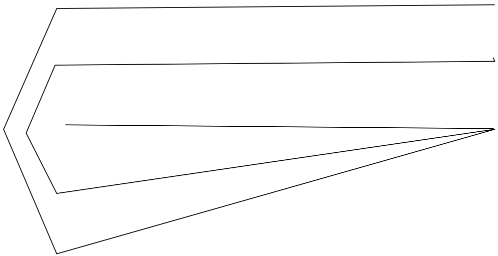


Definición

Sea X un dendroide y $r \in X$ y dos sucesiones de puntos (r_n^1, r_n^2) en X ambos que convergen a r. Decimos que r_n^1 ***domina a*** *r_n^2 siempre que para todo s en X y una sucesión de puntos s_n^1 que convergen a s tal que los arcos $r_n^1 s_n^1$ convergen a rs, entonces existe una sucesión s_n^2 en X que convergen a s tal que los arcos $r_n^2 s_n^2$ convergen a rs*

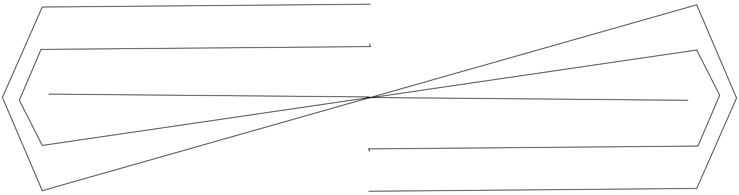
Definición

Sea X un dendroide y $r \in X$ y dos sucesiones de puntos (r_n^1, r_n^2) en X ambos que convergen a r. Decimos que r_n^1 ***domina a*** *r_n^2 siempre que para todo s en X y una sucesión de puntos s_n^1 que convergen a s tal que los arcos $r_n^1 s_n^1$ convergen a rs, entonces existe una sucesión s_n^2 en X que convergen a s tal que los arcos $r_n^2 s_n^2$ convergen a rs*



Definición

Sea X un dendroide y $r \in X$ y dos sucesiones de puntos (r_n^1, r_n^2) en X ambos que convergen a r. Decimos que r_n^1 ***domina a*** *r_n^2 siempre que para todo s en X y una sucesión de puntos s_n^1 que convergen a s tal que los arcos $r_n^1 s_n^1$ convergen a rs, entonces existe una sucesión s_n^2 en X que convergen a s tal que los arcos $r_n^2 s_n^2$ convergen a rs*



Definición

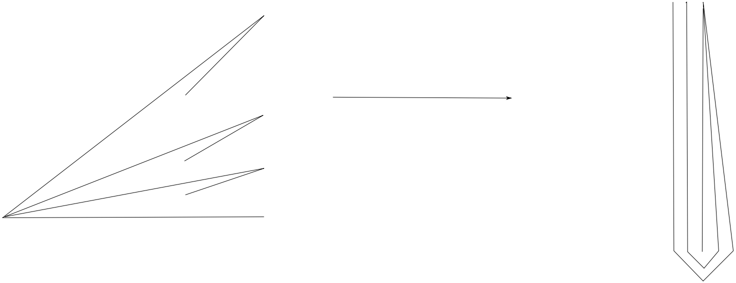
Un dendroide se dice que es ***suave a pares*** *siempre que cualesquiera dos sucesiones que convergen a un punto en común, entonces una de ellas domina a la otra.*

Teorema (Oversteegen)

Sea X un abanico, las siguientes condiciones son equivalentes:

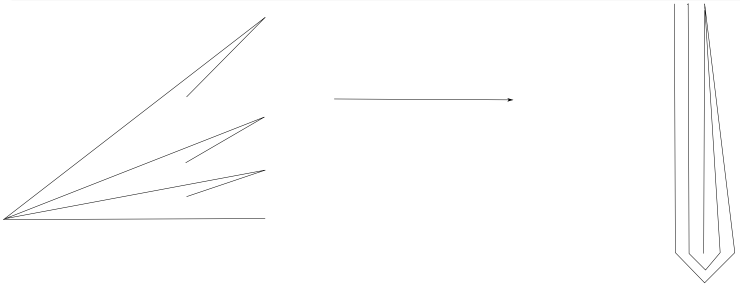
1. *X es contráctil.*
2. *X no contiene $Q - puntos$, X no tiene zig zag, y X es suave a pares.*

La contractibilidad no se preserva bajo funciones monótonas.



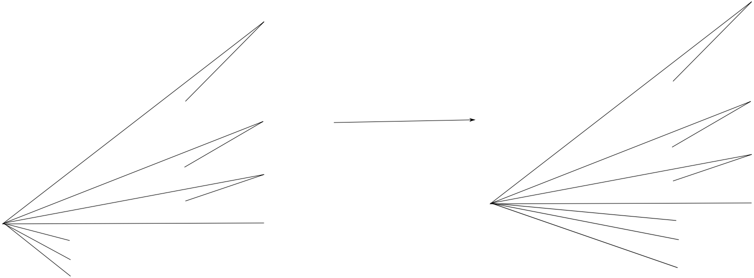
J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and S. Miklos, *Confluents mappings of fans*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **301** (1990), 1-82.

La contractibilidad no se preserva bajo funciones monótonas.



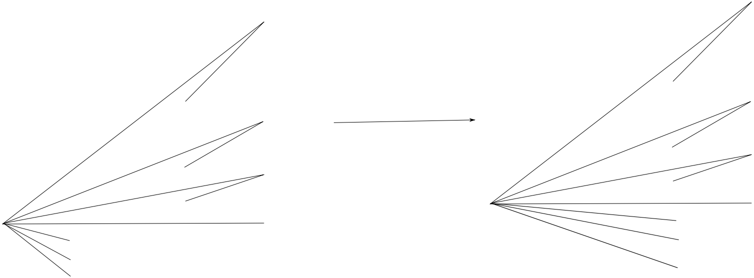
En particular el no tener Q- puntos o zig-zag es no ivariante bajo funciones monótonas.

La contractibilidad no se preserva bajo funciones monótonas.



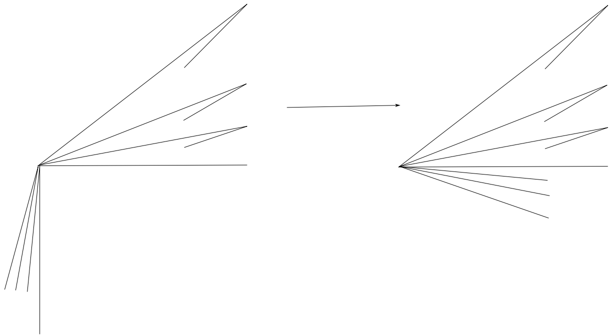
J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and S. Miklos, *Confluents mappings of fans*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **301** (1990), 1-82.

La contractibilidad no se preserva bajo funciones monótonas.



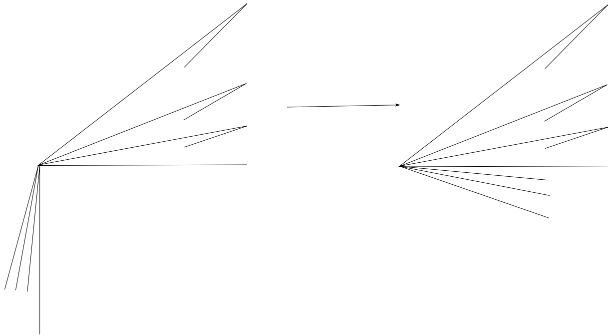
En particular ser suave pares es no invariante bajo funciones monótonas.

La contractibilidad no se preserva bajo funciones confluentes ligeras entre abanicos.



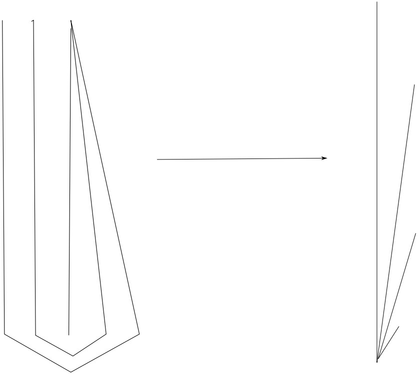
J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and S. Miklos, *Confluents mappings of fans*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **301** (1990), 1-82.

La contractibilidad no se preserva bajo funciones confluentes ligeras entre abanicos.



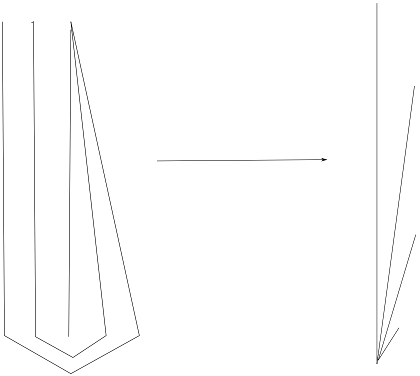
En particular el ser suave a pares es no invariante bajo funciones confluentes ligeras.

La no contractibilidad es no invariante bajo funciones monótonas.



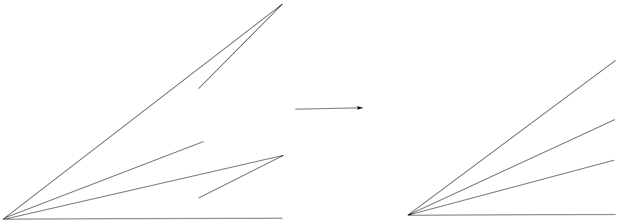
J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and S. Miklos, *Confluents mappings of fans*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **301** (1990), 1-82.

La no contractibilidad es no invariante bajo funciones monótonas.



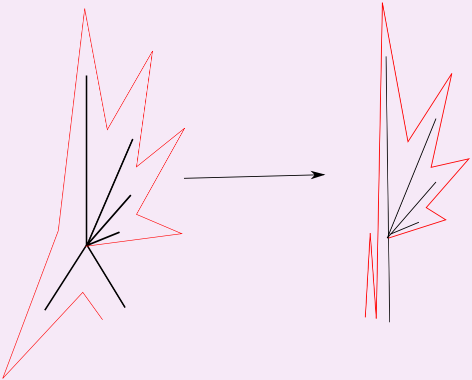
En particular el tener zig-zag o Q-puntos es no invariante bajo funciones monótonas.

No ser suave a pares es no invariante bajo funciones monótonas.

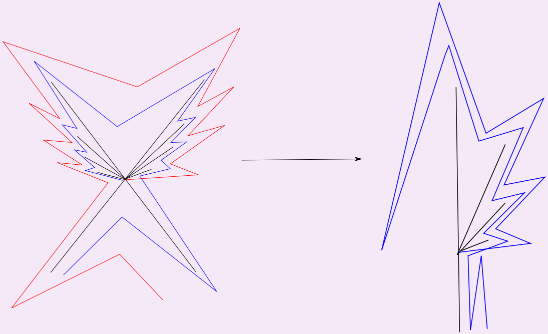


J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and S. Miklos, *Confluents mappings of fans*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **301** (1990), 1-82.

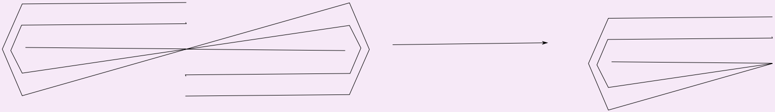
No contener zig-zag es no invariante bajo funciones confluentes ligeras.



No contener zig-zag es no invariante bajo funciones abiertas ligeras.



El no ser suave a pares es no invariante bajo funciones abiertas ligeras.



Preguntas abiertas:

1. ¿Existen funciones abiertas ligeras de abanicos que contienen a) Q-puntos, b) zig zag, sobre un abanico que no contiene Q-puntos ni zigzag?
2. ¿Existen funciones abiertas (abiertas ligeras) de un abanico que es suave a pares a un abanico que no es suave a pares?

¡GRACIAS!