Del lema de Sperner al teorema de Brouwer

Karen Clemente Robles
Coautor: Dr. Fernando Macías Romero.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
BUAP

X Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios.
13 de noviembre 2015

Contenido

Propiedad del punto fijo

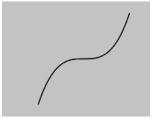
- Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua.
- Un punto $x \in X$ es un **punto fijo** de f si $f(x) = x$.

Propiedad del punto fijo

- Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua.
- Un punto $x \in X$ es un **punto fijo** de f si $f(x) = x$.
- Un espacio topológico X tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua de X en X tiene un punto fijo.

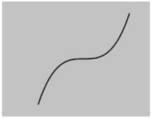
Propiedad del punto fijo

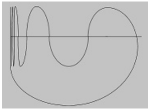
- Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua.
- Un punto $x \in X$ es un **punto fijo** de f si $f(x) = x$.
- Un espacio topológico X tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua de X en X tiene un punto fijo.



Propiedad del punto fijo

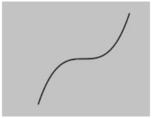
- Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua.
- Un punto $x \in X$ es un **punto fijo** de f si $f(x) = x$.
- Un espacio topológico X tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua de X en X tiene un punto fijo.

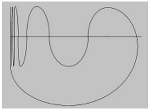


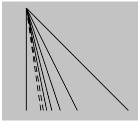


Propiedad del punto fijo

- Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua.
- Un punto $x \in X$ es un **punto fijo** de f si $f(x) = x$.
- Un espacio topológico X tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua de X en X tiene un punto fijo.

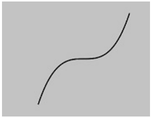


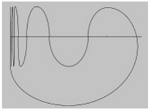


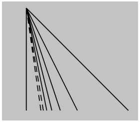


Propiedad del punto fijo

- Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua.
- Un punto $x \in X$ es un **punto fijo** de f si $f(x) = x$.
- Un espacio topológico X tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua de X en X tiene un punto fijo.



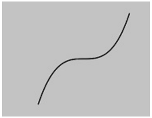


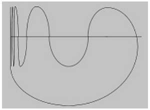


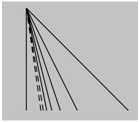
- La propiedad del punto fijo es un invariante topológico.

Propiedad del punto fijo

- Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua.
- Un punto $x \in X$ es un **punto fijo** de f si $f(x) = x$.
- Un espacio topológico X tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua de X en X tiene un punto fijo.







- La propiedad del punto fijo es un invariante topológico.

Un poco de historia.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966)

En 1909 Brouwer (matemático holandés) prueba, para $n = 3$, que; «una $n-$*celda* tiene la propiedad del punto fijo».

Jacques-Salomon Hadamard (1865 – 1963)

En 1910, Hadamard (matemático frances) probó el resultado para toda n.

Un poco de historia.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966)

En 1909 Brouwer (matemático holandés) prueba, para $n = 3$, que; «una $n - celda$ tiene la propiedad del punto fijo».

Jacques-Salomon Hadamard (1865 – 1963)

En 1910, Hadamard (matemático frances) probó el resultado para toda n.

Bronislaw Knaster, Kasimierz Kuratowski y Stefan Mazurkiewicz

En 1929, demuestran el teorema del punto fijo de Brouwer usando el Lema de Sperner.

Un poco de historia.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966)

En 1909 Brouwer (matemático holandés) prueba, para $n = 3$, que; «una $n - celda$ tiene la propiedad del punto fijo».

Jacques-Salomon Hadamard (1865 – 1963)

En 1910, Hadamard (matemático frances) probó el resultado para toda n.

Bronislaw Knaster, Kasimierz Kuratowski y Stefan Mazurkiewicz

En 1929, demuestran el teorema del punto fijo de Brouwer usando el Lema de Sperner.

Lema de Sperner

- Sea Q una $2-celda$ cuadrada dividida en un número finito de $2-celdas$ cuadradas por líneas paralelas a sus lados.

- Marcamos los vértices de Q con los colores: rojo, azul, verde y morado.

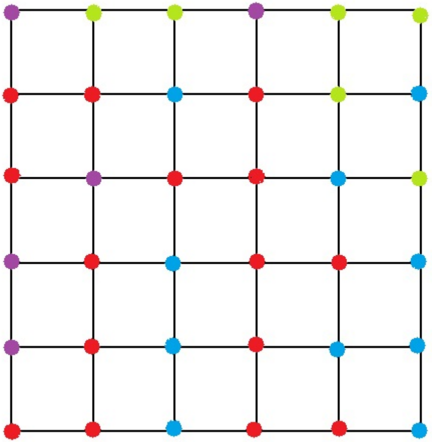
Lema de Sperner

- Sea Q una $2-$*celda* cuadrada dividida en un número finito de $2-$*celdas* cuadradas por líneas paralelas a sus lados.
- Marcamos los vértices de Q con los colores: rojo, azul, verde y morado.
- Los vértices de la división se marcan de acuerdo a alguno de los colores que tienen los puntos extremos de ese lado.

Lema de Sperner

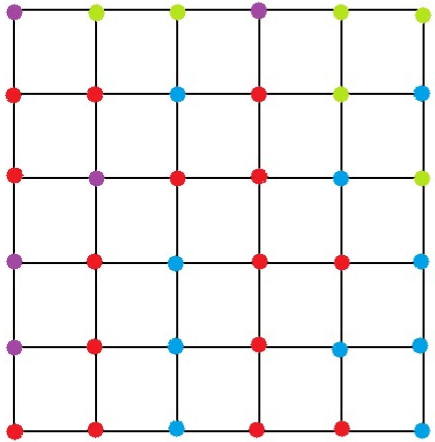
- Sea Q una $2-\mathit{celda}$ cuadrada dividida en un número finito de $2-\mathit{celdas}$ cuadradas por líneas paralelas a sus lados.
- Marcamos los vértices de Q con los colores: rojo, azul, verde y morado.
- Los vértices de la división se marcan de acuerdo a alguno de los colores que tienen los puntos extremos de ese lado.

Lema de Sperner



Entonces, existe una cara cuyos vértices están marcados con almenos tres colores diferentes.

Lema de Sperner



Entonces, existe una cara cuyos vértices están marcados con almenos tres colores diferentes.

Teorema de Brouwer para una $2-celda$:

Cada $2-celda$ tiene la propiedad del punto fijo.

Idea de la demostración:

Teorema de Brouwer para una $2-celda$:

Cada $2-celda$ tiene la propiedad del punto fijo.

Idea de la demostración:

Sean $Q=[0,1]\times[0,1]$ y

$f:Q\to Q$ una función continua.

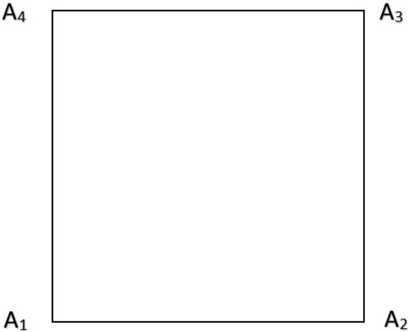
Teorema de Brouwer para una $2 - celda$:

Cada $2 - celda$ tiene la propiedad del punto fijo.

Idea de la demostración:

Sean $Q = [0,1] \times [0,1]$ y

$f : Q \to Q$ una función continua.



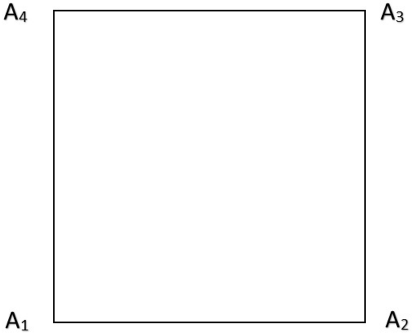
Teorema de Brouwer para una $2-celda$:

Cada $2-celda$ tiene la propiedad del punto fijo.

Idea de la demostración:

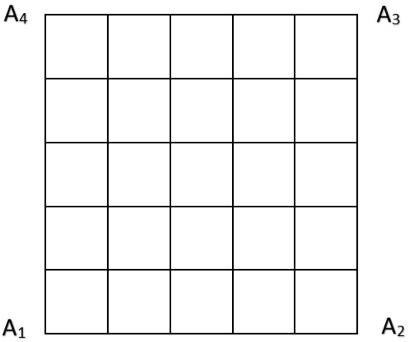
Sean $Q = [0,1] \times [0,1]$ y

$f : Q \to Q$ una función continua.



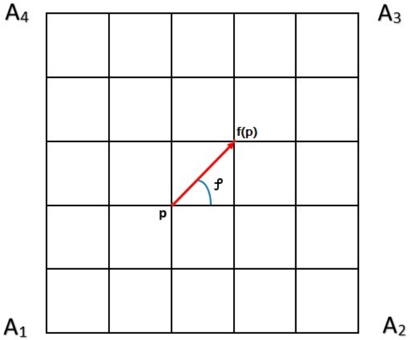
Sean $Q = [0,1] \times [0,1]$ y

$f : Q \to Q$ una función continua.

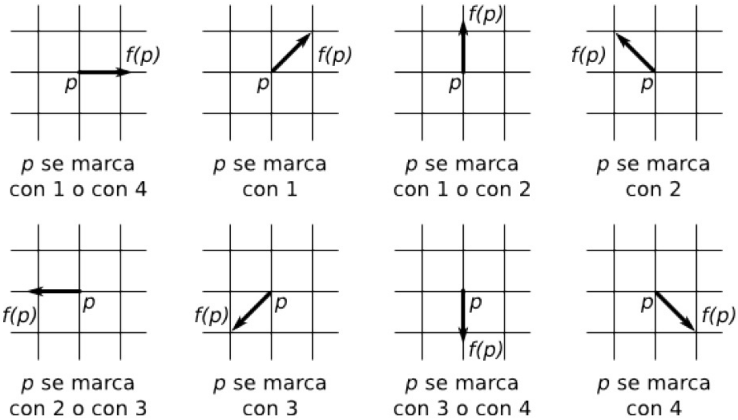


Sean $Q = [0,1] \times [0,1]$ y

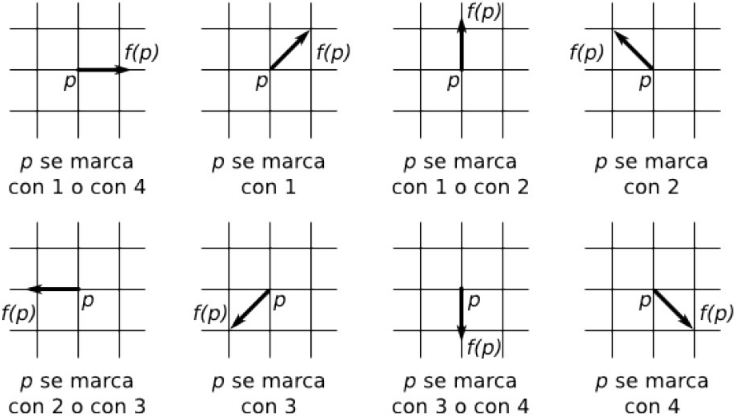
$f : Q \to Q$ una función continua.

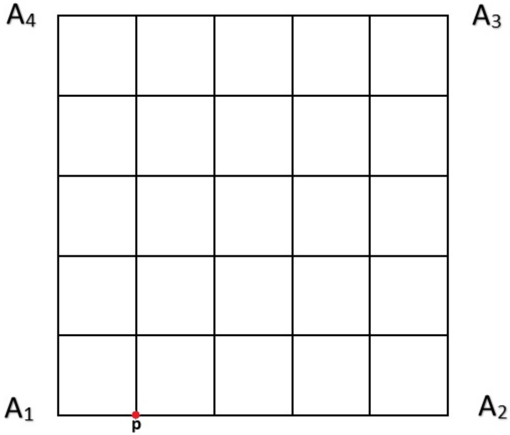


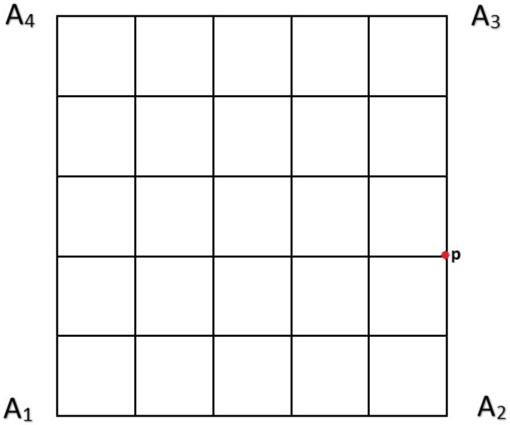
Marcamos los vértices de la división, de acuerdo a la dirección del vector, con los números 1, 2, 3 y 4 como sigue:

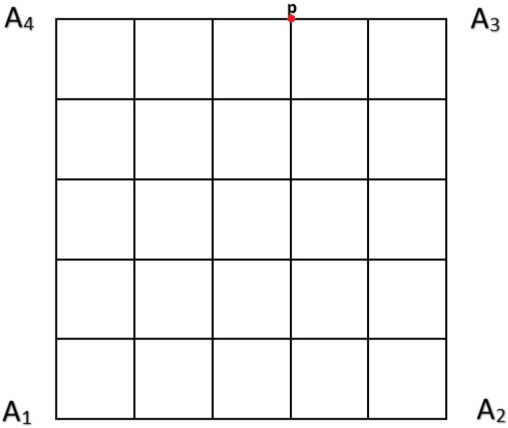


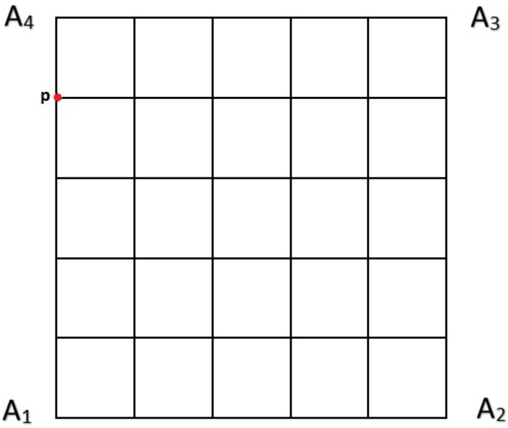
Marcamos los vértices de la división, de acuerdo a la dirección del vector, con los números 1, 2, 3 y 4 como sigue:



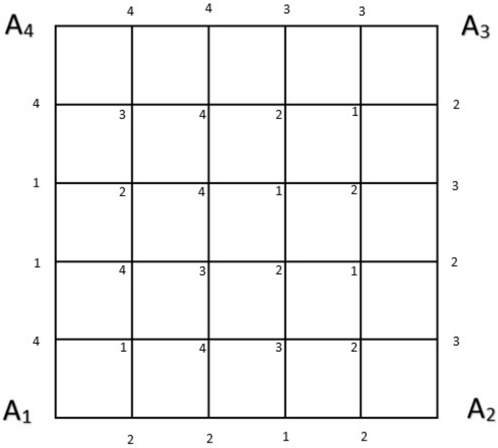

A4
A3
A1
p
A2


A4
A3
p
A1
A2


A4
p
A3
A1
A2

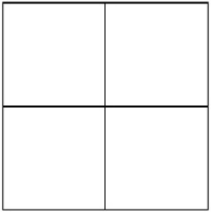

A4
A3
p
A1
A2

Hemos encontrado que existe una $2 - celda$ cuadrada de la división cuyos vértices están marcados con almenos tres números diferentes.



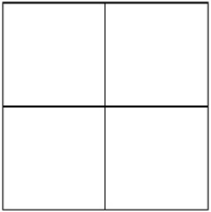
Sea $D_m = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, ...\tau_m, ...\}$ una sucesión de divisiones finitas en $2-$*celdas* cuadradas de Q.

τ_1

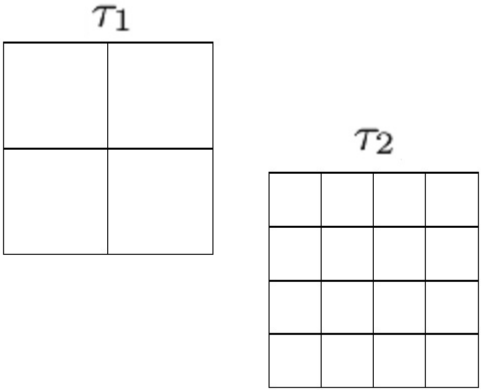


Sea $D_m = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, ...\tau_m, ...\}$ una sucesión de divisiones finitas en $2-$ *celdas* cuadradas de Q.

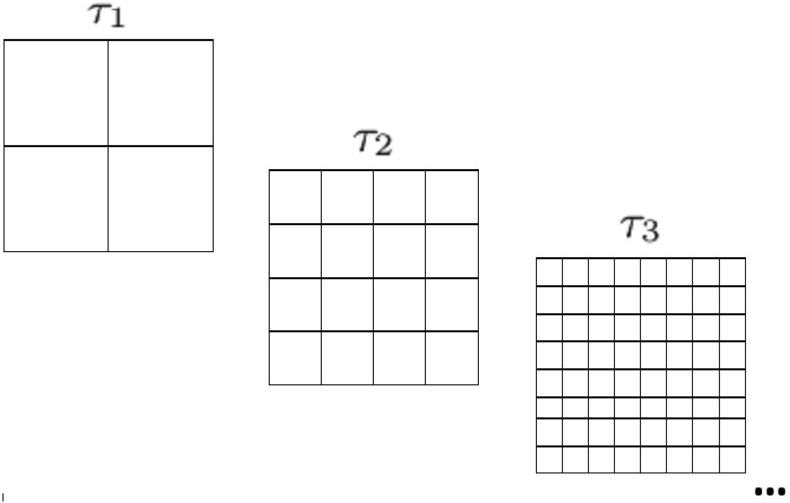
τ_1



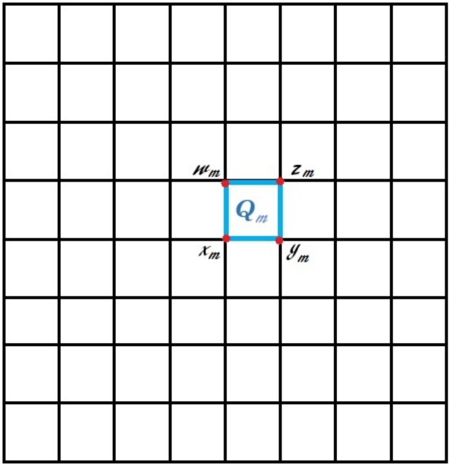
Sea $D_m = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots\tau_m, \ldots\}$ una sucesión de divisiones finitas en $2 - celdas$ cuadradas de Q.



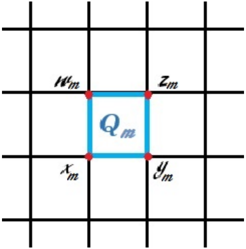
Sea $D_m = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, ...\tau_m, ...\}$ una sucesión de divisiones finitas en $2 - celdas$ cuadradas de Q.



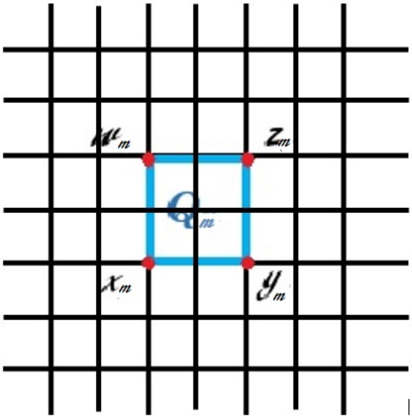
Entonces existe una $2-celda$ cuadrada en τ_m cuyos vértices están marcados con almenos tres números diferentes.



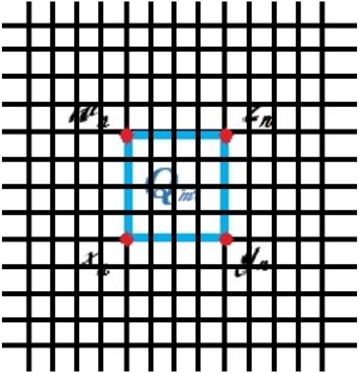
Entonces existe una $2-celda$ cuadrada en τ_m cuyos vértices están marcados con almenos tres números diferentes.



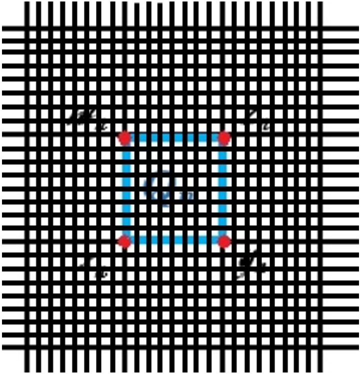
Sean (x_m), (y_m), (z_m) y (w_m) sucesiones en Q.



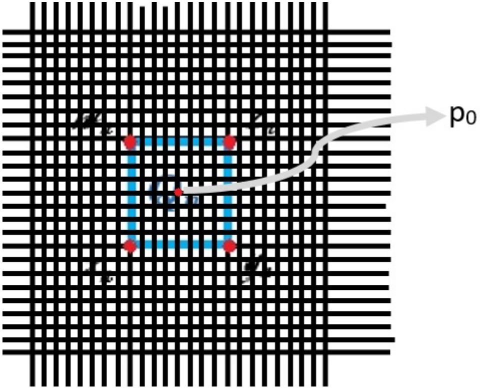
Sean (x_m), (y_m), (z_m) y (w_m) sucesiones en Q.



Sean (x_m), (y_m), (z_m) y (w_m) sucesiones en Q.



Sean (x_m), (y_m), (z_m) y (w_m) sucesiones en Q.



Veamos que p_0 es un punto fijo.

Supongamos que $p_0 \neq f(p_0)$

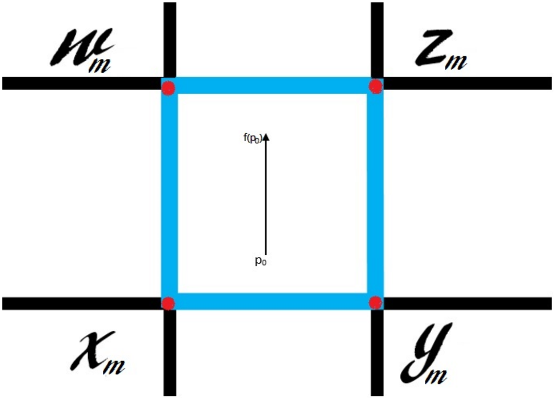
Caso 1.

Si el vector $(p_0, f(p_0))$ tiene un ángulo $\rho = \pi/2$

Veamos que p_0 es un punto fijo.

Supongamos que $p_0 \neq f(p_0)$

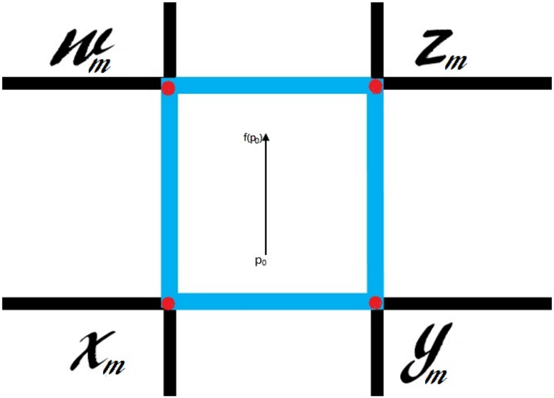
Caso 1.
Si el vector $(p_0, f(p_0))$ tiene un ángulo $\rho = \pi/2$



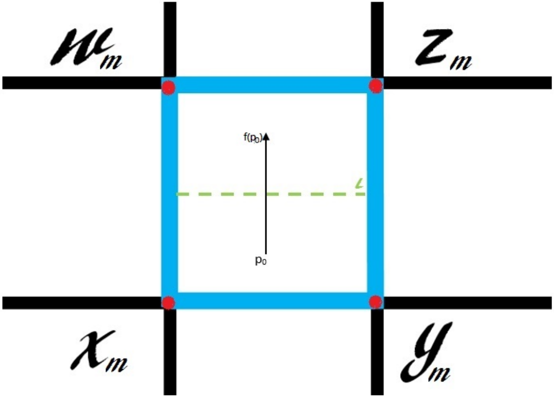
Veamos que p_0 es un punto fijo.

Supongamos que $p_0 \neq f(p_0)$

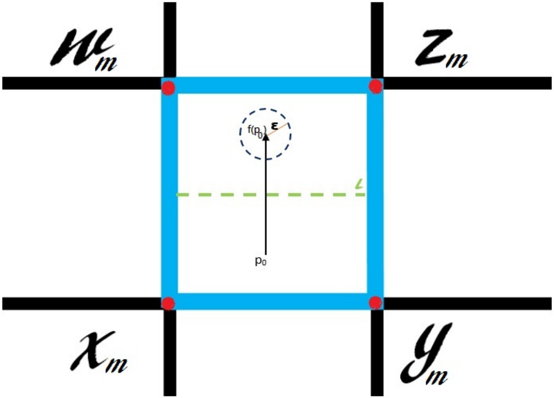
Caso 1.
Si el vector $(p_0, f(p_0))$ tiene un ángulo $\rho = \pi/2$



Caso 1.
Si el vector $(p_0, f(p_0))$ tiene un ángulo $\rho = \pi/2$

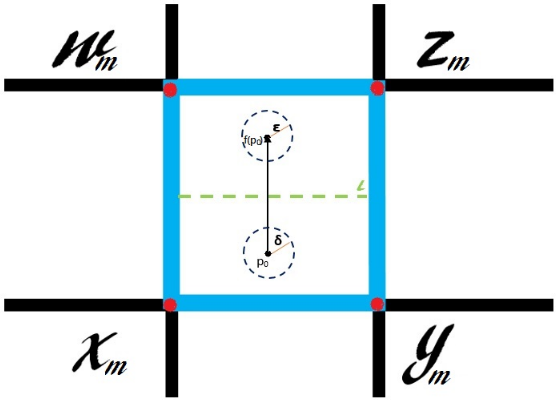


Caso 1.
Si el vector $(p_0, f(p_0))$ tiene un ángulo $\rho = \pi/2$

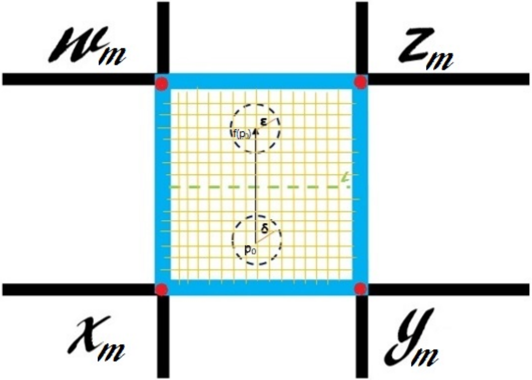


Caso 1.

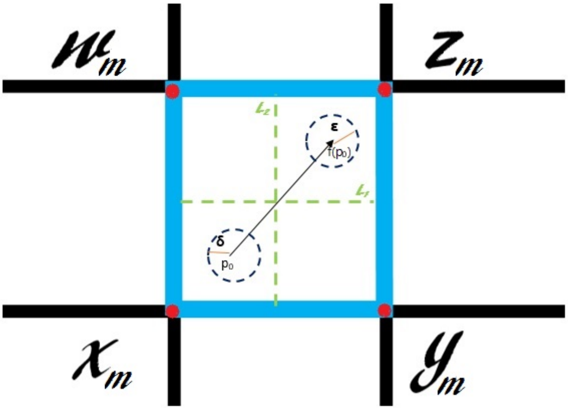
Si el vector $(p_0, f(p_0))$ tiene un ángulo $\rho = \pi/2$



Caso 1.
Si el vector $(p_0, f(p_0))$ tiene un ángulo $\rho = \pi/2$



Otros casos.



Referencias

López Sánchez Cristina
Propiedad del Punto Fijo: Lema Sperner
Tesis de Licenciatura, FCFM-BUAP, 2014.

Rupert Henry Bing
The elusive fixed point property
Amer. Math. Monthly, 76(1969), 119-132.

Sam B. Nadler, Jr.
The Fixed Point Property for Continua
Aportaciones Matemáticas, Textos, nivel avanzado, 30, 2005.

¡Gracias!