Transitividad Topológica

X Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios

Est. Filadelfo Mondragón Sánchez

División Académica de Ciencias Básicas, UJAT

6 de noviembre de 2015

1 Conceptos y Resultados Básicos

2 Trasnsitividad Topológica

3 Ejemplos de Funciones Transitivas

Sistema Dinámico

Definición

Un **Sistema dinámico** *es un pareja* (X, f), *donde* X *es un espacio topológico y* $f : X \to X$ *es una función continua.*

Definición

Dada un sistema dinámico (X, f), *definimos la* **órbita** *de* x *bajo* f, *como el conjunto*

$$\mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^n(x), \ldots\}$$

Donde f^n *representa la n-ésima composición de* f *consigo misma y* $f^0 =$ *identidad*, $f^{n+1} = f \circ f^n$. *La función* $f^n : X \to X$ *es la n-ésima* **iteración** *de* $f : X \to X$.

Sistema Dinámico

Definición

Un **Sistema dinámico** *es un pareja (X, f), donde X es un espacio topológico y $f : X \to X$ es una función continua.*

Definición

Dada un sistema dinámico (X, f), definimos la **órbita** *de x bajo f, como el conjunto*

$$\mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^n(x), \ldots\}$$

Donde f^n representa la n-ésima composición de f consigo misma y $f^0 =$ identidad, $f^{n+1} = f \circ f^n$. La función $f^n : X \to X$ es la n-ésima **iteración** *de $f : X \to X$.*

Órbitas

Definición

Sea (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Decimos que x es un **punto fijo** *de f si $f(x) = x$.*

Definición

Sea (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Decimos que x es un **punto periódico** *de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al menor $n \in \mathbb{N}$ que satisface esta propiedad se le llama el* **periodo** *de x bajo f. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos por $Per(f)$.*

Órbitas

Definición

Sea (X, f) *un sistema dinámico y* $x \in X$*. Decimos que* x *es un* **punto fijo** *de* f *si* $f(x) = x$*.*

Definición

Sea (X, f) *un sistema dinámico y* $x \in X$*. Decimos que* x *es un* **punto periódico** *de* f *si existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n(x) = x$*. Al menor* $n \in \mathbb{N}$ *que satisface esta propiedad se le llama el* **periodo** *de* x *bajo* f*. Al conjunto de todos los puntos periódicos de* f *lo denotaremos por* $Per(f)$*.*

Definición

Decimos que x *es un punto* **preperiódico** *de periodo* n*, si existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^m(x)$ *es un punto periódico de periodo* n.

Proposición

Sea X un conjunto y $f : X \to X$ una función. Si A, B son dos subconjuntos no vacíos de X, se tiene que $f(A) \cap B \neq \emptyset$ si y sólo si $A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$.

1. Conceptos y Resultados Básicos
2. Trasnsitividad Topológica
3. Ejemplos de Funciones Transitivas

Transitividad Topológica

Definición

Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. f es **topológicamente transitiva**, *si para cada par de subconjuntos U, V abiertos y no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Teorema

Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. f es topológicamente transitiva, si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ y para cada par de puntos $x_0, y_0 \in X$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ tales que $d(x, x_0) < \varepsilon$ y $d(f^n(x), y_o) < \varepsilon$.

Transitividad Topológica

Definición

Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. f es **topológicamente transitiva**, *si para cada par de subconjuntos U, V abiertos y no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Teorema

Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. f es topológicamente transitiva, si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ y para cada par de puntos $x_0, y_0 \in X$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ tales que $d(x, x_0) < \varepsilon$ y $d(f^n(x), y_o) < \varepsilon$.

Definición

Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. f es **topológicamente exacta**, *si para todo U subconjunto abierto y no vacío de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) = X$.*

Teorema

Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función exacta, entonces f es una función suprayectiva.

Definición

Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. f es **topológicamente exacta**, *si para todo U subconjunto abierto y no vacío de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) = X$.*

Teorema

Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función exacta, entonces f es una función suprayectiva.

Teorema

Toda función exacta es transitiva.

Teorema

Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función transitiva. Sea U un abierto y no vacío de X entonces $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Además $f^{-n}(U) = (f^n)^{-1}(U) \neq \emptyset$. Para cada U abierto y no vacío y $n \in \mathbb{N}^+$.

Teorema

Toda función exacta es transitiva.

Teorema

Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función transitiva. Sea U un abierto y no vacío de X entonces $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Además $f^{-n}(U) = (f^n)^{-1}(U) \neq \emptyset$. Para cada U abierto y no vacío y $n \in \mathbb{N}^+$.

Órbitas Densas

Teorema

Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ es una función transitiva, y para cada subconjunto U abierto y no vacío de X los conjuntos

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) \quad y \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$$

son abiertos y densos en X.

Teorema

Sea X un espacio topológico T_1 sin puntos aislados y $f : X \to X$ una función continua. Si existe un punto en $x_0 \in X$ cuya órbita bajo $\mathcal{O}_f(x_0)$ es denso en X, entonces f es transitiva.

Teorema

Sea X un espacio topológico segundo numerable y de la segunda categoría. Si $f : X \to X$ es una función transitiva, entonces existe un punto $x_0 \in X$ cuya órbita $\mathcal{O}_f(x_0)$ es denso en X.

Teorema

Sea X un espacio topológico T_1 sin puntos aislados y $f : X \to X$ una función continua. Si existe un punto en $x_0 \in X$ cuya órbita bajo $\mathcal{O}_f(x_0)$ es denso en X, entonces f es transitiva.

Teorema

Sea X un espacio topológico segundo numerable y de la segunda categoría. Si $f : X \to X$ es una función transitiva, entonces existe un punto $x_0 \in X$ cuya órbita $\mathcal{O}_f(x_0)$ es denso en X.

Teorema

Sea (X, f) un sistema dinámico las siguientes condiciones son equivalentes:

1) f es topológicamente transitiva.
2) Para cada par de subconjuntos abiertos U, V no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
3) Para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ es denso en X.

Teorema

Sea (X, f) un sistema dinámico las siguientes condiciones son equivalentes:

1) f es topológicamente transitiva.
2) Para cada par de subconjuntos abiertos U, V no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
3) Para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ es denso en X.

Teorema

Sea (X, f) un sistema dinámico las siguientes condiciones son equivalentes:

1) f es topológicamente transitiva.
2) Para cada par de subconjuntos abiertos U, V no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
3) Para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ es denso en X.

Teorema

Sea (X, f) un sistema dinámico las siguientes condiciones son equivalentes:

1) f es topológicamente transitiva.
2) Para cada par de subconjuntos abiertos U, V no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
3) Para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ es denso en X.

Continuación del Teorema

Teorema

Sea (X, f) un sistema dinámico las siguientes condiciones son equivalentes:

4) Para cada subconjunto abierto y no vacío U de X, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ es denso en X.
5) Para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U, V de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.
6) Para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U, V de X, existe un entero no negativo tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Continuación del Teorema

Teorema

Sea (X, f) un sistema dinámico las siguientes condiciones son equivalentes:

4) Para cada subconjunto abierto y no vacío U de X, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ es denso en X.
5) Para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U, V de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.
6) Para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U, V de X, existe un entero no negativo tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Continuación del Teorema

Teorema

Sea (X, f) un sistema dinámico las siguientes condiciones son equivalentes:

4) Para cada subconjunto abierto y no vacío U de X, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ es denso en X.
5) Para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U, V de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.
6) Para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U, V de X, existe un entero no negativo tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Continuación del Teorema

Teorema

Sea (X, f) un sistema dinámico las siguientes condiciones son equivalentes:

4) Para cada subconjunto abierto y no vacío U de X, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ es denso en X.
5) Para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U, V de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.
6) Para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U, V de X, existe un entero no negativo tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Teorema

Sea (X, f) un sistema dinámico las siguientes condiciones son equivalentes:

7) Para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es denso en X.
8) Para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ es denso en X.

Teorema

Sea (X, f) un sistema dinámico las siguientes condiciones son equivalentes:

7) Para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es denso en X.
8) Para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ es denso en X.

Teorema

Sea (X, f) un sistema dinámico las siguientes condiciones son equivalentes:

7) Para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es denso en X.
8) Para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ es denso en X.

1 Conceptos y Resultados Básicos

2 Trasnsitividad Topológica

3 Ejemplos de Funciones Transitivas

Clásicos

Ejemplo (Rotaciones sobre la Circunferencia $\mathbb{S}^1$.)

Consideremos el plano complejo $\mathbb{C}$, y $S^1 \subset \mathbb{C}$ la circunferencia unitaria

$$S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ definamos $T_\lambda : S^1 \to S^1$, dada por $T_\lambda(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+2\pi\lambda)}$

Observaciones

Observación

1) A T_λ le llamaremos la rotación de S^1 con angulo λ, si $\lambda \in \mathbb{I}$ le llamaremos rotación irracional de S^1.
2) *T_λ^n es la n-ésima iteracción de T_λ, afirmamos que $T_\lambda^n(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+2n\pi\lambda)}$, para todo $n \in \mathbb{N}^+$.*
3) *Si $\lambda \in \mathbb{Q}$ entonces la órbita es periódica es decir $|\mathcal{O}_{T_\lambda}(e^{i\theta})|$ es finita.*

Observaciones

Observación

1) A T_λ le llamaremos la rotación de S^1 con angulo λ, si $\lambda \in \mathbb{I}$ le llamaremos rotación irracional de S^1.
2) *T_λ^n es la n-ésima iteracción de T_λ, afirmamos que $T_\lambda^n(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+2n\pi\lambda)}$, para todo $n \in \mathbb{N}^+$.*
3) *Si $\lambda \in \mathbb{Q}$ entonces la órbita es periódica es decir $|\mathcal{O}_{T_\lambda}(e^{i\theta})|$ es finita.*

Observaciones

Observación

1) A T_λ le llamaremos la rotación de S^1 con angulo λ, si $\lambda \in \mathbb{I}$ le llamaremos rotación irracional de S^1.
2) *T_λ^n es la n-ésima iteracción de T_λ, afirmamos que $T_\lambda^n(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+2n\pi\lambda)}$, para todo $n \in \mathbb{N}^+$.*
3) *Si $\lambda \in \mathbb{Q}$ entonces la órbita es periódica es decir $|\mathcal{O}_{T_\lambda}(e^{i\theta})|$ es finita.*

Observaciones

Observación

1) A T_λ le llamaremos la rotación de S^1 con angulo λ, si $\lambda \in \mathbb{I}$ le llamaremos rotación irracional de S^1.
2) *T_λ^n es la n-ésima iteracción de T_λ, afirmamos que $T_\lambda^n(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+2n\pi\lambda)}$, para todo $n \in \mathbb{N}^+$.*
3) *Si $\lambda \in \mathbb{Q}$ entonces la órbita es periódica es decir $|\mathcal{O}_{T_\lambda}(e^{i\theta})|$ es finita.*

Proposición

Si λ es irracional, entonces $\mathcal{O}_{T_\lambda}(e^{i\theta})$ es denso en S^1.

Corolario

Si λ es irracional, entonces T_λ es transitiva.

Proposición

Si λ es irracional, entonces $\mathcal{O}_{T_\lambda}(e^{i\theta})$ es denso en S^1.

Corolario

Si λ es irracional, entonces T_λ es transitiva.

Ejemplo (La Tienda de Campaña)

Ahora consideremos $X = [0,1]$, *con la métrica usual de* $\mathbb{R}$ *y la función* $f : X \to X$ *dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & si \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Afirmaciones

1) *la gráfica de* f^n *esta determinada por* 2^n *segmentos de recta de la forma* $[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]$ *para* $p \in \{0, 1, 2..., 2^n - 1\}$, *estos intervalos tienen longitud* $\frac{1}{2^n}$.
2) *La función tienda de campaña es topológicamente exacta.*
3) *La función tienda de campaña es transitiva.*

Proposición

Si $f : X \to X$ *es la función tienda de campaña y* $n \in \mathbb{N}$ *entonces* $f^n([\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]) = [0, 1]$, *para todo* $p \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$.

Afirmaciones

1) *la gráfica de f^n esta determinada por 2^n segmentos de recta de la forma $[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]$ para $p \in \{0, 1, 2..., 2^n - 1\}$, estos intervalos tienen longitud $\frac{1}{2^n}$.*
2) *La función tienda de campaña es topológicamente exacta.*
3) *La función tienda de campaña es transitiva.*

Proposición

Si $f : X \to X$ es la función tienda de campaña y $n \in \mathbb{N}$ entonces $f^n([\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]) = [0, 1]$, para todo $p \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$.

Afirmaciones

1) *la gráfica de f^n esta determinada por 2^n segmentos de recta de la forma $[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]$ para $p \in \{0, 1, 2..., 2^n - 1\}$, estos intervalos tienen longitud $\frac{1}{2^n}$.*
2) *La función tienda de campaña es topológicamente exacta.*
3) *La función tienda de campaña es transitiva.*

Proposición

Si $f : X \to X$ es la función tienda de campaña y $n \in \mathbb{N}$ entonces $f^n([\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]) = [0, 1]$, para todo $p \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$.

Afirmaciones

1) *la gráfica de* f^n *esta determinada por* 2^n *segmentos de recta de la forma* $[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]$ *para* $p \in \{0, 1, 2..., 2^n - 1\}$*, estos intervalos tienen longitud* $\frac{1}{2^n}$.
2) *La función tienda de campaña es topológicamente exacta.*
3) *La función tienda de campaña es transitiva.*

Proposición

Si $f : X \to X$ *es la función tienda de campaña y* $n \in \mathbb{N}$ *entonces* $f^n([\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]) = [0, 1]$, *para todo* $p \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$.

Afirmaciones

1) *la gráfica de* f^n *esta determinada por* 2^n *segmentos de recta de la forma* $[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]$ *para* $p \in \{0, 1, 2..., 2^n - 1\}$*, estos intervalos tienen longitud* $\frac{1}{2^n}$.
2) *La función tienda de campaña es topológicamente exacta.*
3) *La función tienda de campaña es transitiva.*

Proposición

Si $f : X \to X$ *es la función tienda de campaña y* $n \in \mathbb{N}$ *entonces* $f^n([\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]) = [0, 1]$*, para todo* $p \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$.

Gracias por su atención

♣