Sobre el segundo producto simétrico del pseudoarco

Emanuel Ramírez Márquez
María de Jesús López Toriz
Jorge Marcos Martínez Montejano

X Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios

11 de Noviembre, 2015

Definición

Sea X un continuo, consideremos el siguiente hiperespacio de X

$$F_2(X) = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset \textit{ y } A \textit{ tiene a lo más } 2 \textit{ puntos}\}.$$

$F_2(X)$ es llamado el segundo producto simétrico.

Preliminares

Definición

Un continuo es *descomponible* si existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Si no existen dichos subcontinuos, diremos que X es *indescomponible*.

Definición

Un continuo es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Preliminares

Definición

Un continuo es *descomponible* si existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Si no existen dichos subcontinuos, diremos que X es *indescomponible*.

Definición

Un continuo es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Teorema 1

Un continuo X es indescomponible si y sólo si todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío.

Preliminares

Definición

Sea X un espacio métrico, una *cadena* es una colección finita de conjuntos abiertos en X, $\mathcal{D} = \{D(1), D(2), ..., D(n)\}$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que $D(i) \cap D(j) \neq \emptyset$ si, y sólo si, $\mid i - j \mid \leq 1$.

Definición

Sean X un espacio métrico, $\mathcal{D}$ una cadena en X y M un subconjunto de X, decimos que la cadena $\mathcal{D}$ *cubre* a M si $M \subset \bigcup \mathcal{D}$.

Preliminares

Definición

Sea X un espacio métrico, una *cadena* es una colección finita de conjuntos abiertos en X, $\mathcal{D} = \{D(1), D(2), ..., D(n)\}$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que $D(i) \cap D(j) \neq \emptyset$ si, y sólo si, $\mid i - j \mid \leq 1$.

Definición

Sean X un espacio métrico, $\mathcal{D}$ una cadena en X y M un subconjunto de X, decimos que la cadena $\mathcal{D}$ *cubre* a M si $M \subset \bigcup \mathcal{D}$.

Definición

Sean X espacio métrico y $\mathcal{D}$ una cadena en X. Dado $\varepsilon > 0$ decimos que $\mathcal{D}$ es una *ε-cadena* si el diámetro de cada uno de sus eslabones es menor a ε.

Definición

Un continuo es encadenable si para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\varepsilon-$cadena que lo cubre.

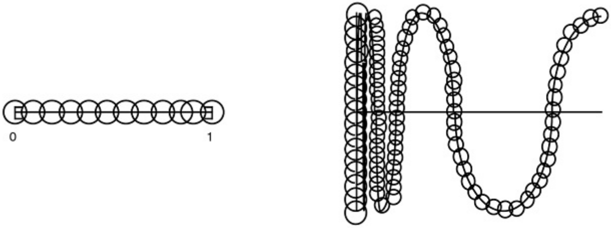
Definición

Sean X espacio métrico y $\mathcal{D}$ una cadena en X. Dado $\varepsilon > 0$ decimos que $\mathcal{D}$ es una ε-*cadena* si el diámetro de cada uno de sus eslabones es menor a ε.

Definición

Un continuo es encadenable si para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\varepsilon-$cadena que lo cubre.

Ejemplo



Teorema

El *pseudoarco* P es un continuo no degenerado encadenable y hereditariamente indescomponible.

Definición

Un continuo X es *semi indescomponible* si no existen subcontinuos propios A y B de X con $int(A) \neq \emptyset$ e $int(B) \neq \emptyset$ tales que $A \cap B = \emptyset$

Proposición 1

Todo continuo indescomponible es semi indescomponible.

Definición

Un continuo X es *semi indescomponible* si no existen subcontinuos propios A y B de X con $int(A) \neq \emptyset$ e $int(B) \neq \emptyset$ tales que $A \cap B = \emptyset$

Proposición 1

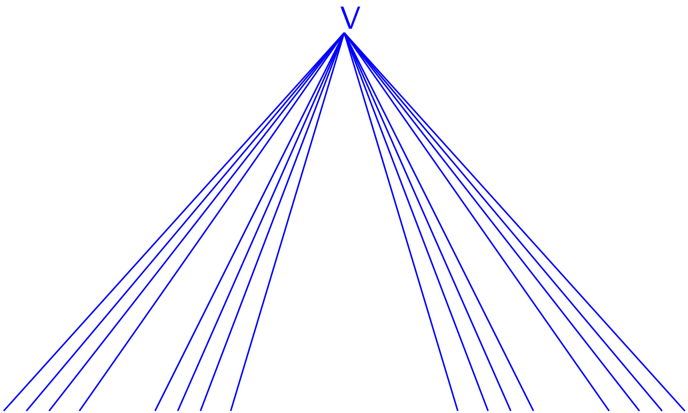
Todo continuo indescomponible es semi indescomponible.

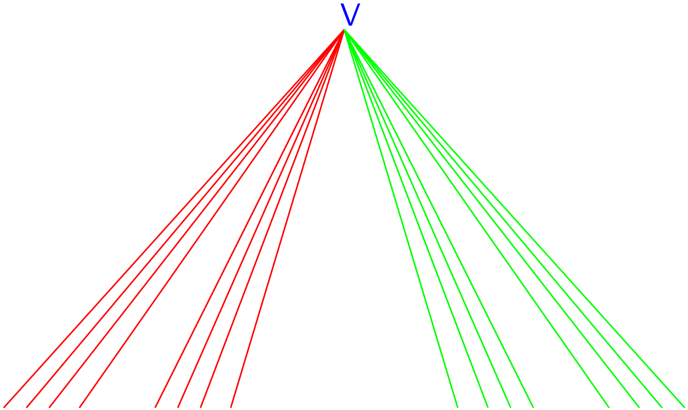
Observación

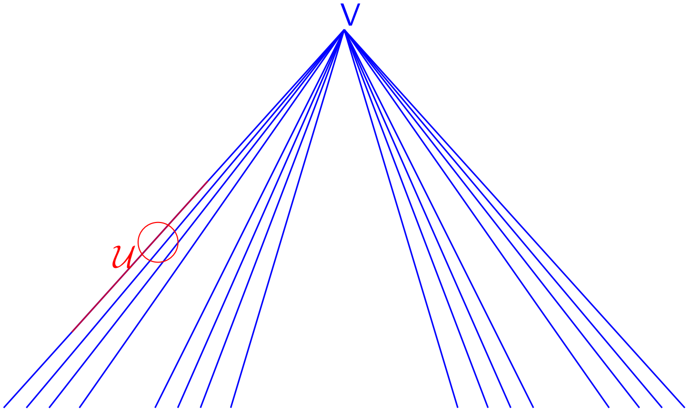
El recíproco de la Proposición 1 no siempre se cumple.

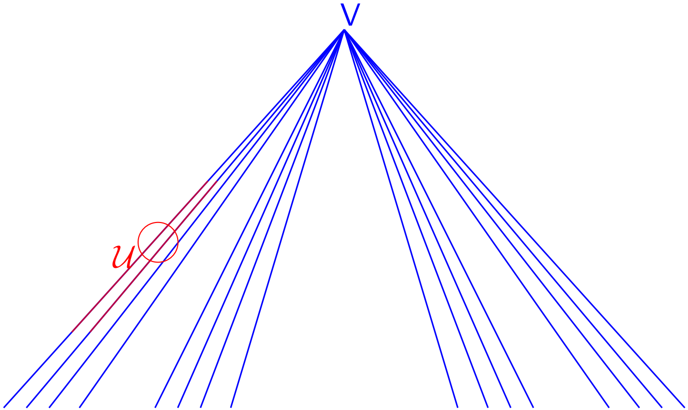
Observación

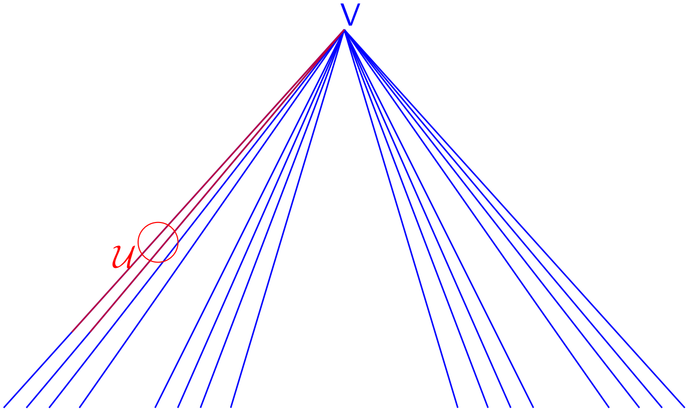
El recíproco de la Proposición 1 no siempre se cumple.




V


V
U


v
$\mathcal{U}$


v
$\mathcal{U}$

Teorema 2

La propiedad de ser semi indescomponible es una propiedad topológica.

Teorema 3

Sea X un continuo. Si el producto $X \times X$ es semi indescomponible, entonces X es indescomponible.

Teorema 4

Si X es un continuo encadenable e indescomponible, entonces $X \times X$ es semi indescomponible.

Teorema 2

La propiedad de ser semi indescomponible es una propiedad topológica.

Teorema 3

Sea X un continuo. Si el producto $X \times X$ es semi indescomponible, entonces X es indescomponible.

Teorema 4

Si X es un continuo encadenable e indescomponible, entonces $X \times X$ es semi indescomponible.

Teorema 2

La propiedad de ser semi indescomponible es una propiedad topológica.

Teorema 3

Sea X un continuo. Si el producto $X \times X$ es semi indescomponible, entonces X es indescomponible.

Teorema 4

Si X es un continuo encadenable e indescomponible, entonces $X \times X$ es semi indescomponible.

Teorema 5

Sea X un continuo. Si $X \times X$ es semi indescomponible, entonces $F_2(X)$ es semi indescomponible.

Teorema 6

Sea X un continuo. Si $F_2(X)$ es semi indescomponible, entonces X es indescomponible.

Teorema 5

Sea X un continuo. Si $X \times X$ es semi indescomponible, entonces $F_2(X)$ es semi indescomponible.

Teorema 6

Sea X un continuo. Si $F_2(X)$ es semi indescomponible, entonces X es indescomponible.

Teorema 7

Si P es el pseudoarco y X es un continuo tal que existe un homeomorfismo $h : F_2(P) \to F_2(X)$, entonces X es indescomponible.