El conjunto $CR(f)$ en espacios compactos

Angela Martínez Rodríguez
Universidad Autónoma del Estado de México,
Dr. Enrique Castañeda Alvarado,
Dr. Félix Capulín Peréz

X TALLER ESTUDIANTIL DE TEORÍA DE CONTINUOS Y SUS HIPERESPACIOS

12 de Noviembre de 2015

- X:= espacio métrico compacto
- $C(X, X) = \{f : X \longrightarrow X | f$ es continua$\}$, dotado con la topología de convergencia uniforme.

El conjunto $CR(f)$

Definición

Sean $f \in C(X,X)$. *Un conjunto finito indexado*

$$\{x = x_0, x_1, ..., x_n = y\} \subset X$$

es una ε-**cadena** *para* f *de* x *a* y

$$si\ d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon \ para\ cada\ i = 1, ..., n.$$

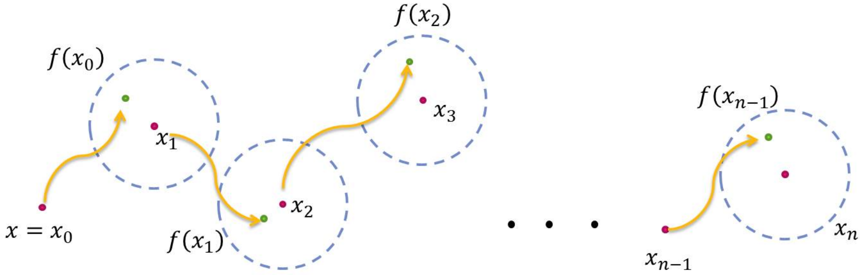


Figura: $\varepsilon -$ *cadena*.

$R_\varepsilon(x) = \{y \in X$: existe una ε-*cadena* de x a $y\}$

Definición

$x \in X$ es **punto de cadena recurrente** *si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-cadena para f de x a x.*

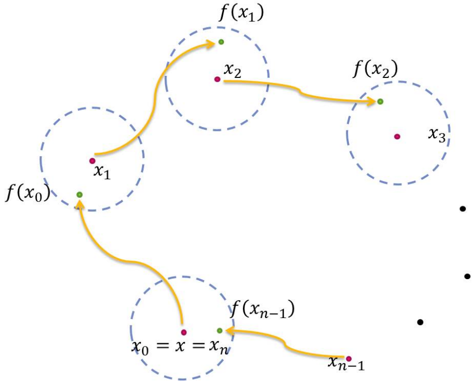


Figura: Punto cadena recurrente.

$$CR(f) = \{x \in X : x \text{ es punto de cadena recurrente respecto a } f\}$$

Lema

$CR(f) = CR(f^k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Definición

$Y \subset X$ es **cadena invariante positivamente** *si para cada $y \in Y$ y $x \in X \setminus Y$ no existe una ε-cadena de y a x para cada $\varepsilon > 0$.*

Lema

$R_\varepsilon(x)$ es abierto en X, es cadena invariante positivamente y $f(\overline{R_\varepsilon(x)}) \subset R_\varepsilon(x)$.

Definición

$Y \subset X$ *es* **cadena invariante positivamente** *si para cada* $y \in Y$ *y* $x \in X \setminus Y$ *no existe una* ε*-cadena de* y *a* x *para cada* $\varepsilon > 0$.

Lema

$R_\varepsilon(x)$ *es abierto en* X*, es cadena invariante positivamente y* $f(\overline{R_\varepsilon(x)}) \subset R_\varepsilon(x)$.

Teorema

Sea X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) $x \notin CR(f)$.
2) *Existe $U \subset X$ abierto, tal que $x \notin \overline{U}$, $f(x) \in U$ y $f(\overline{U}) \subset U$.*

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos $x \notin CR(f)$, entonces para algún $\varepsilon > 0$, $x \notin R_\varepsilon(x)$. Sea $W = R_\varepsilon(x)$, W es abierto y $f(\overline{W}) \subset W$. Además, $x \notin W$ pero $f(x) \in W$, pues $\{x = x_0, x_1 = f(x)\}$ es una ε-cadena para todo $\varepsilon > 0$. Si asumimos que $x \in \overline{W}$, podemos concluir con $U = W$. En otro caso, existe $U \subset X$ abierto tal que, $f(W) \subset U \subset \overline{U} \subset W$. Entonces $x \notin \overline{U}$, $f(x) \in U$ y $f(\overline{U}) \subset U$.

Lema

El conjunto

$$\{f \in C(X,X) : dim(CR(f)) = 0\}$$

es un subconjunto G_δ denso de $C(X,X)$.

Diremos que una función $f \in C(X,X)$, es genérica si $\dim(CR(f)) = 0$.

Definición

En la clase de espacios compactos definimos la clase 0-CR como,

$$\textit{0-CR} = \{X : \ \mathit{dim}(CR(f)) \text{ para alguna función } f \text{ en } C(X,X)\}.$$

Teorema

Si para cada $\varepsilon > 0$ *existe una retracción* $r_\varepsilon : X \longrightarrow Y_\varepsilon$, $\hat{d}(r_\varepsilon, id) < \varepsilon$ *y* $Y_\varepsilon = r_\varepsilon(X) \in$ *0-CR, entonces* $X \in$ *0-CR.*

Definición

En la clase de espacios compactos definimos la clase 0-CR como,

$$\textit{0-CR}= \{X : \ \textit{dim(CR}(f)) \text{ para alguna función } f \text{ en } C(X,X)\}.$$

Teorema

Si para cada $\varepsilon > 0$ *existe una retracción* $r_\varepsilon : X \longrightarrow Y_\varepsilon$, $\hat{d}(r_\varepsilon, id) < \varepsilon$ *y* $Y_\varepsilon = r_\varepsilon(X) \in$ *0-CR, entonces* $X \in$ *0-CR.*

Denotaremos al simplejo σ como $\sigma := a_0 a_1 \ldots a_n$

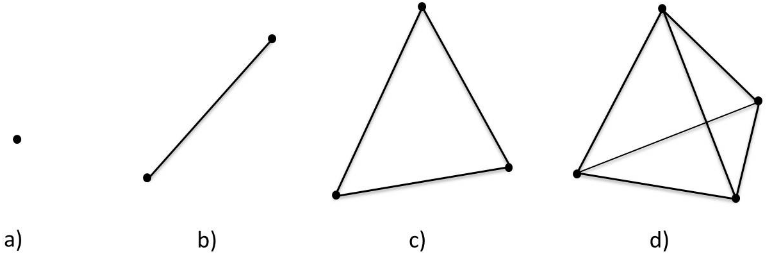


Figura: Simplejos en $\mathbb{R}^3$

El punto $b(\sigma) = x = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n+1} x_j$ es llamado el **baricentro** de σ.

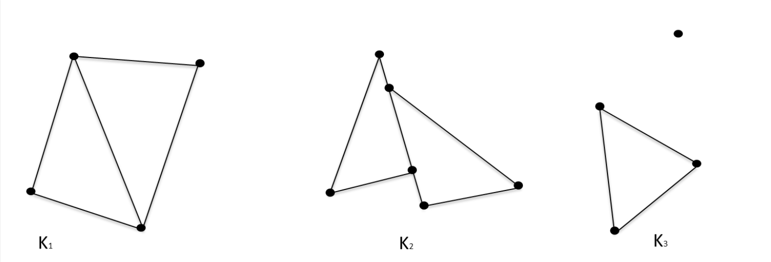


Figura: Complejos simpliciales

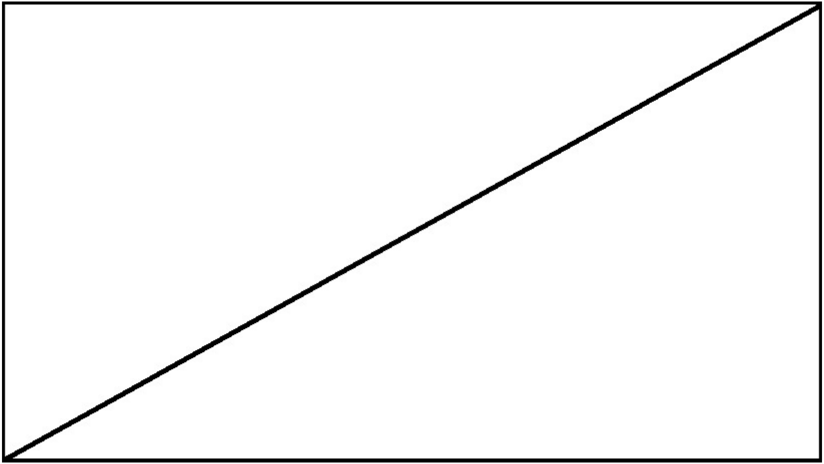
Definición

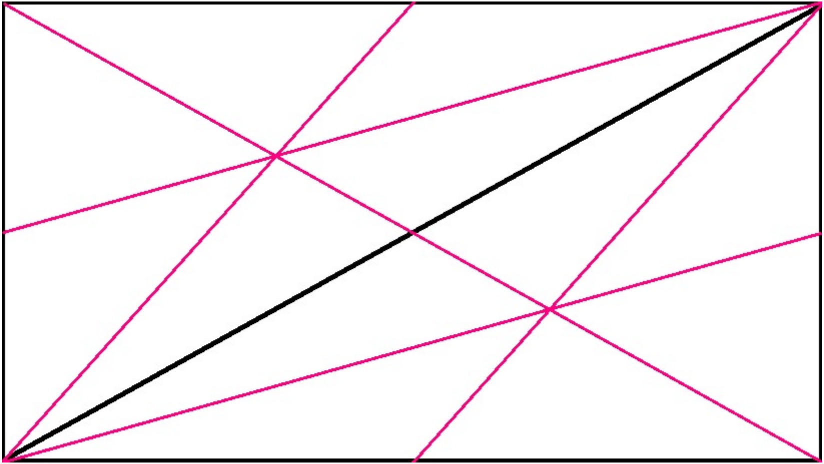
Sea K un complejo simplicial en $\mathbb{R}^n$.
Un **i-esqueleto** *de K denotado por $K^{[i]}$ es la colección de todos los simplejos σ de K tal que $\dim \sigma \leq i$.*

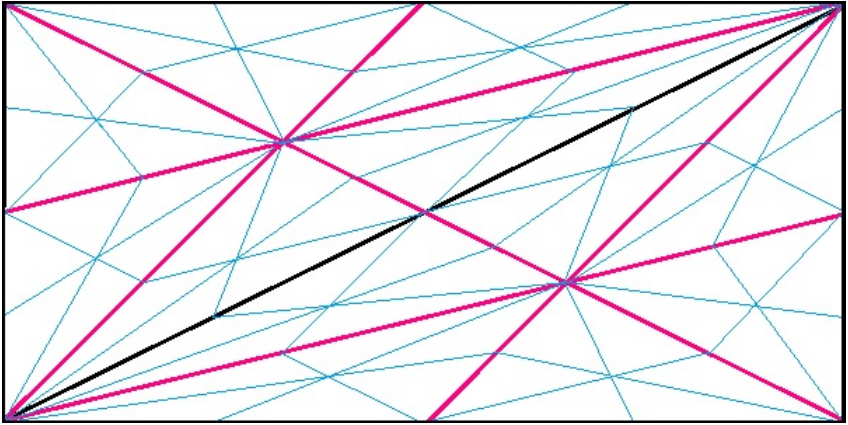
Lema

Si K es un complejo simplicial, entonces existe una función simplicial de vértices $g^{[0]} : (K^{(2)})^{[0]} \longrightarrow (K^{(1)})^{[0]}$, *tal que*

$$\hat{d}(|g|, id) < mesh(K) \text{ y } d_1(R(|g|)) \leq mesh(K).$$







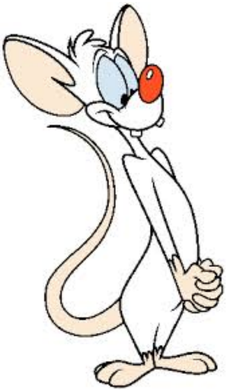
Definimos $g^{[0]} : (K^{(2)})^{[0]} \longrightarrow (K^{(1)})^{[0]}$ por

$$g^{[0]}(b(b(S_0)b(S_1)...b(S_k)) = b(S_k),$$

donde $S_0 > S_1 > \cdots > S_k,\ S_0, ..., S_k \in K$.

Teorema

Un poliedro pertenece a la clase 0-CR.



GRACIAS