Continuos encadenables y la propiedad del punto fijo

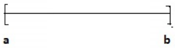
Ana María Reyes Crispín
Dirigida por Dr.Fernando Macías Romero

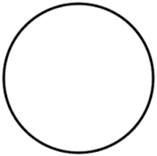
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universiad Autónoma de Puebla

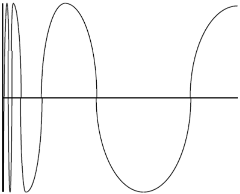
X Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios
13 de noviembre, 2015

Continuo

Definición. Un **continuo** es un espacio métrico, compacto y conexo.

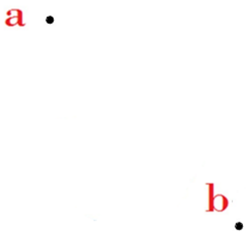




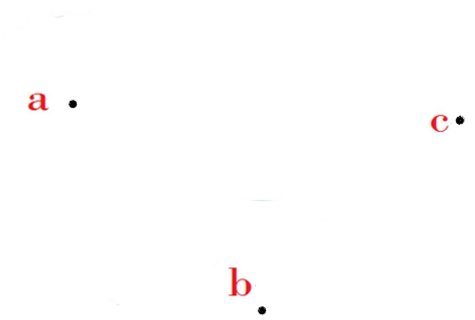


Continuo

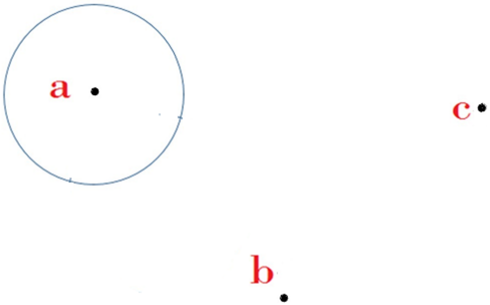
Continuo



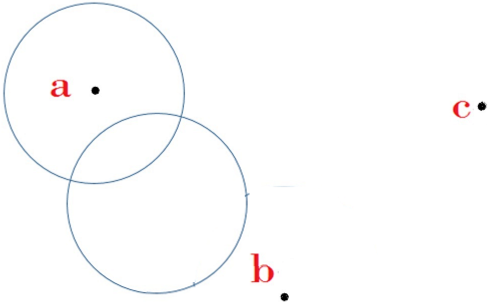
Continuo



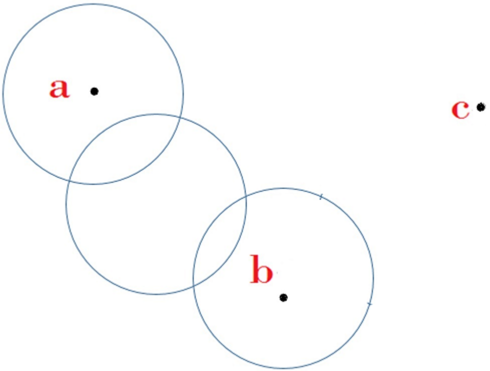
Continuo



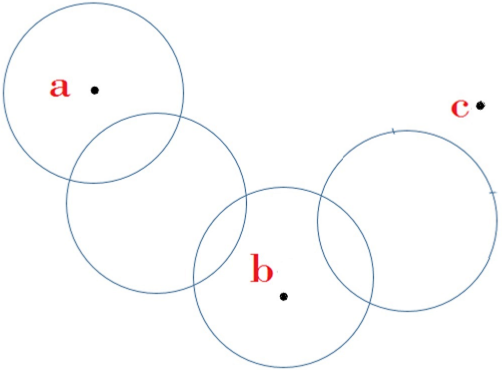
Continuo



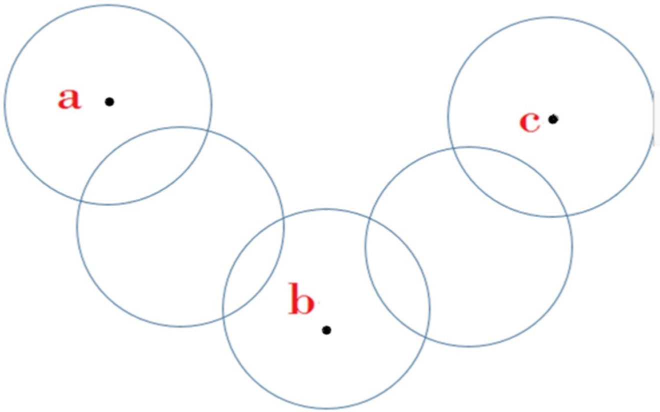
Continuo



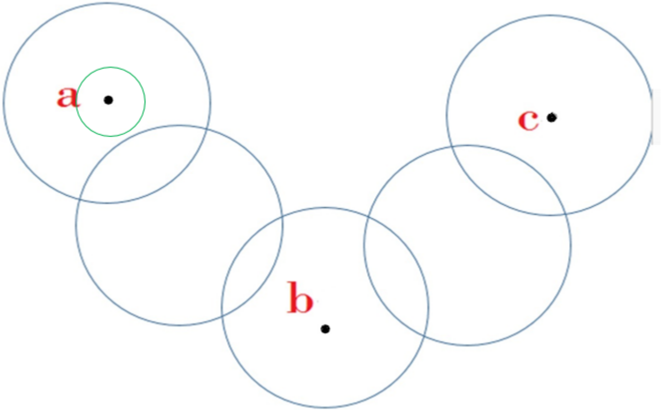
Continuo



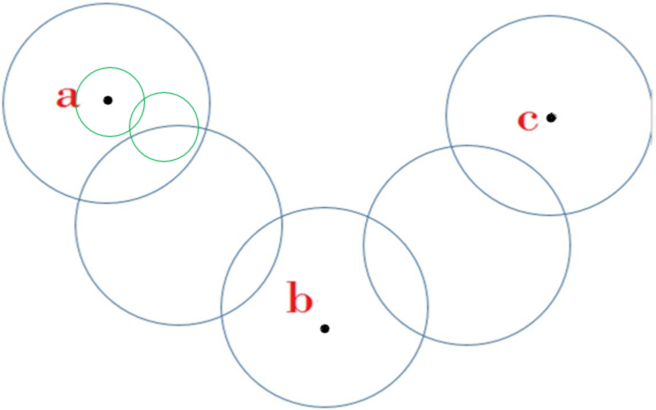
Continuo



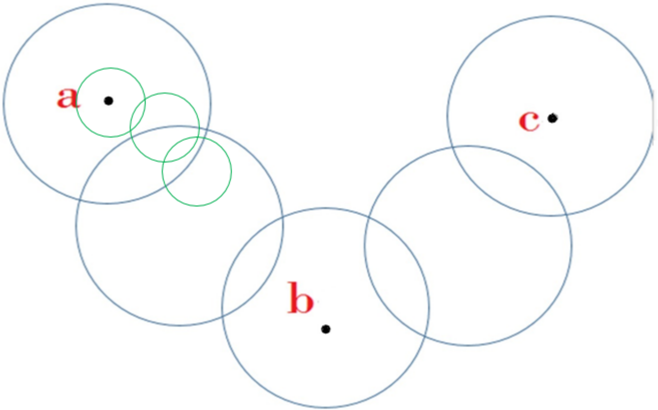
Continuo



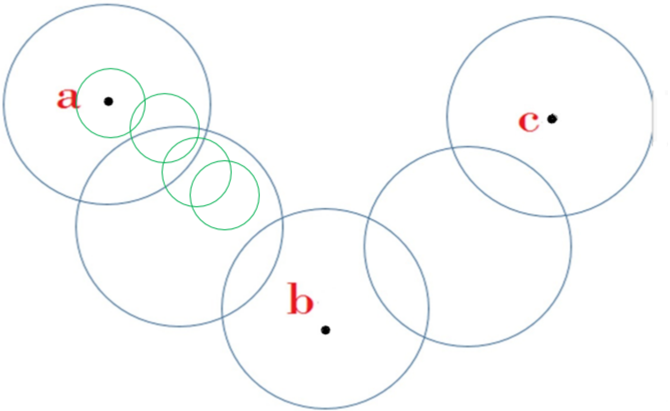
Continuo



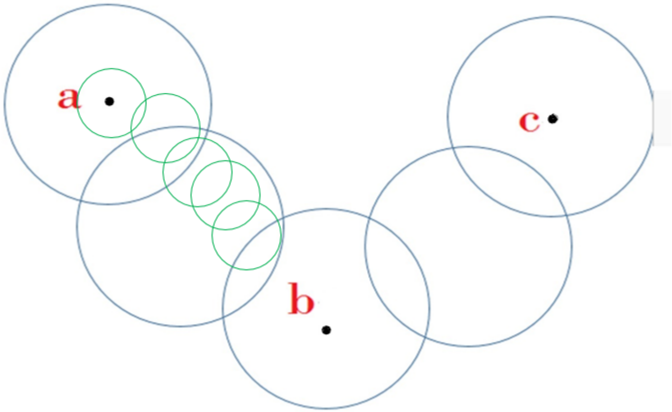
Continuo



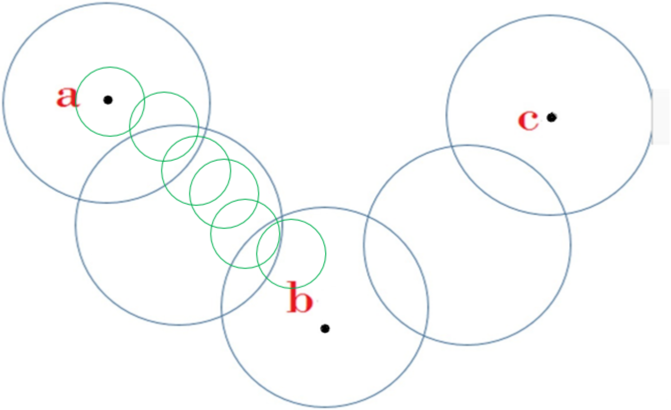
Continuo



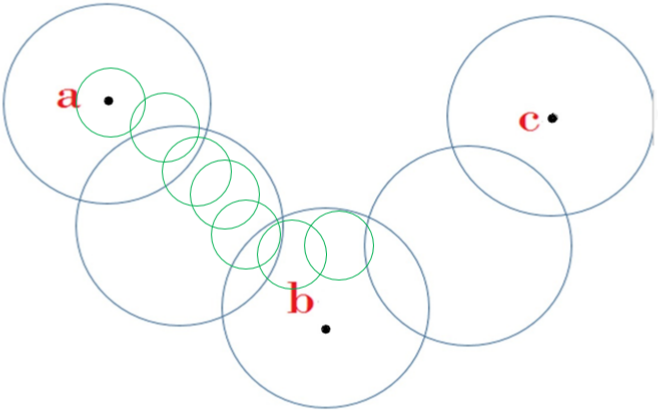
Continuo



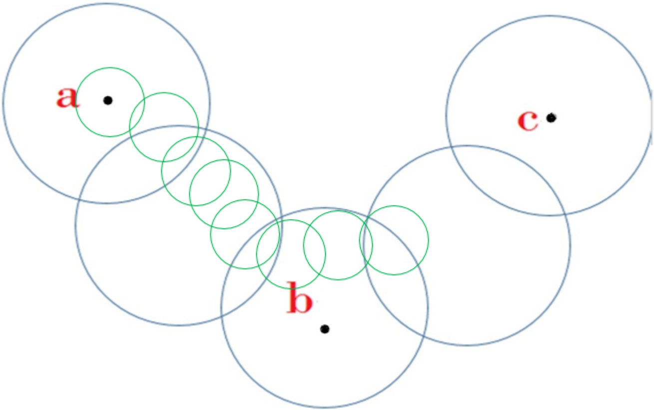
Continuo



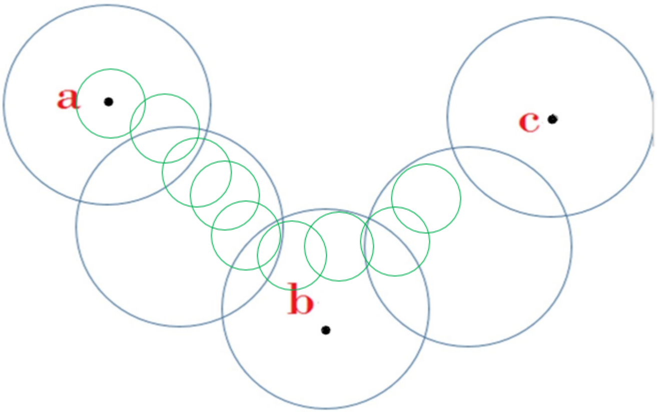
Continuo



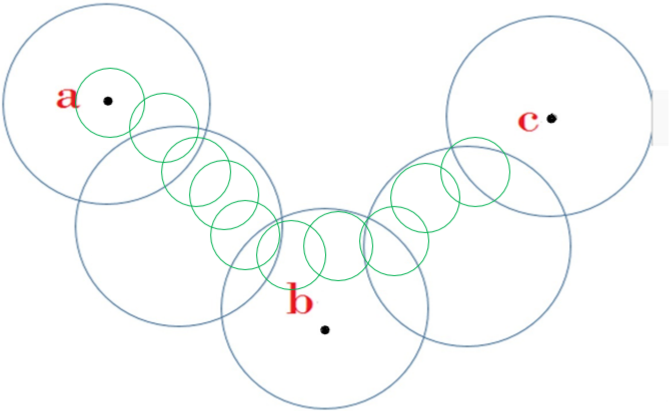
Continuo



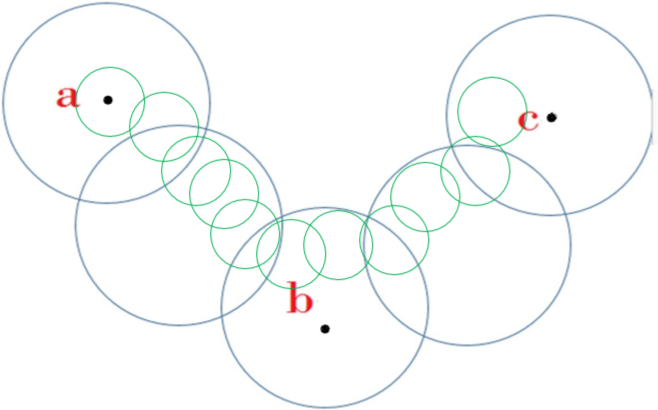
Continuo



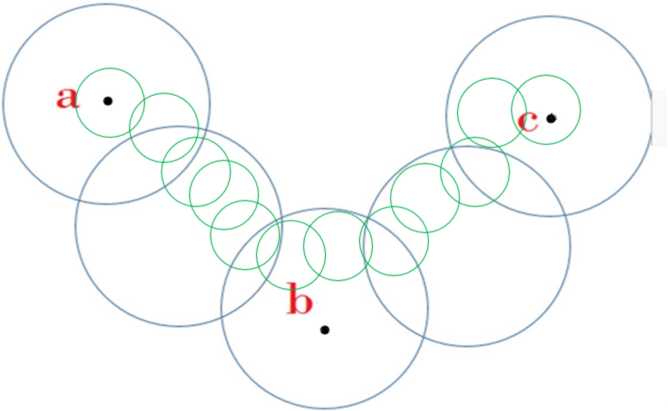
Continuo



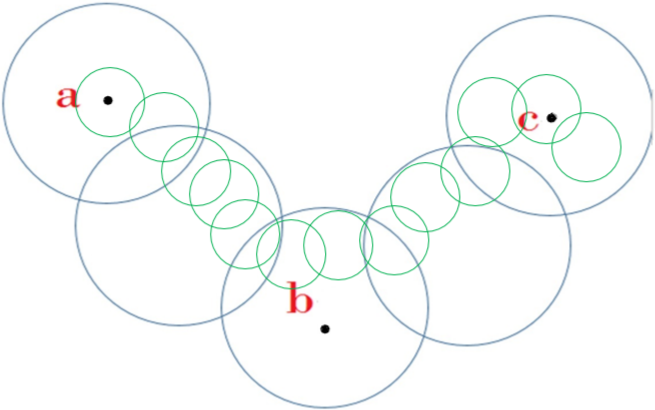
Continuo



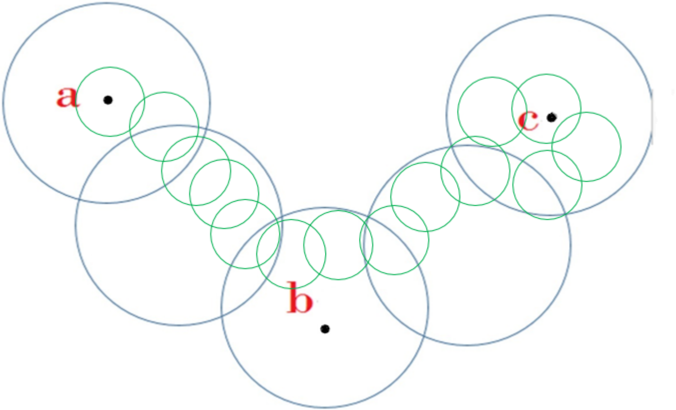
Continuo



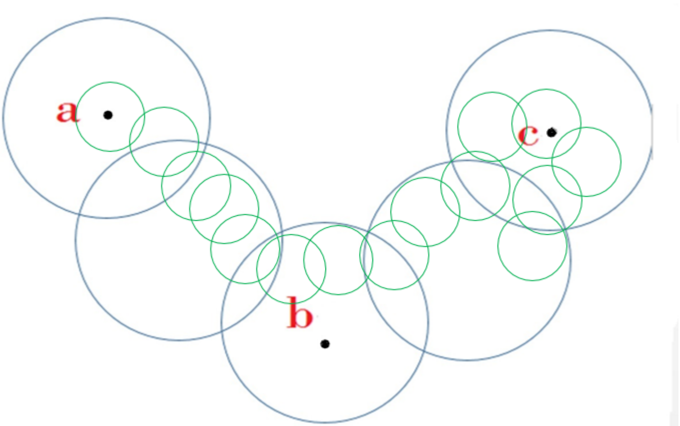
Continuo



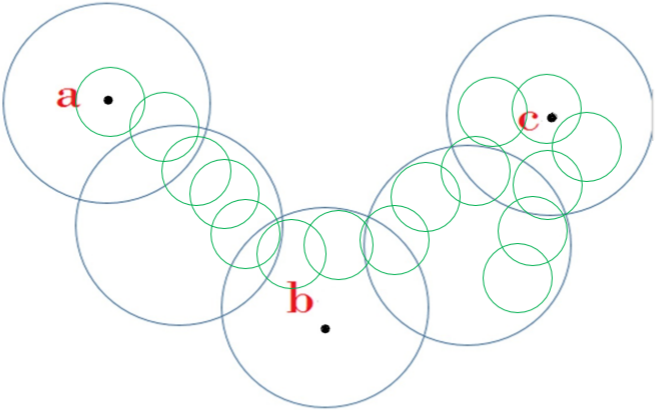
Continuo



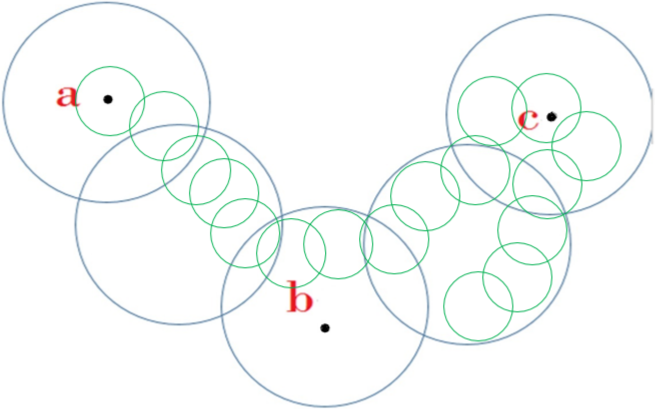
Continuo



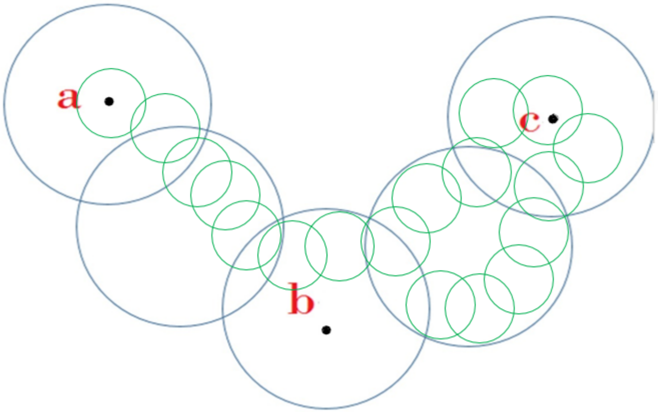
Continuo



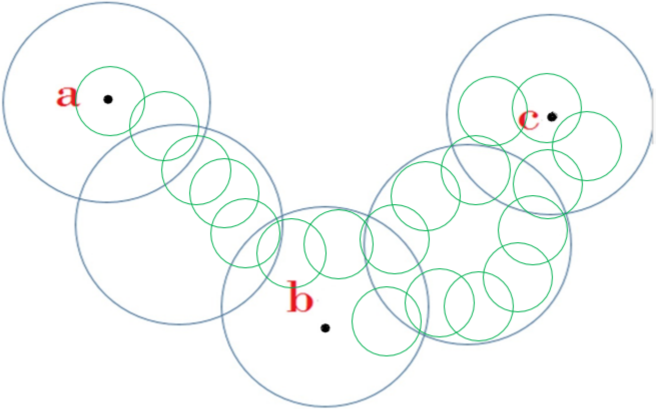
Continuo



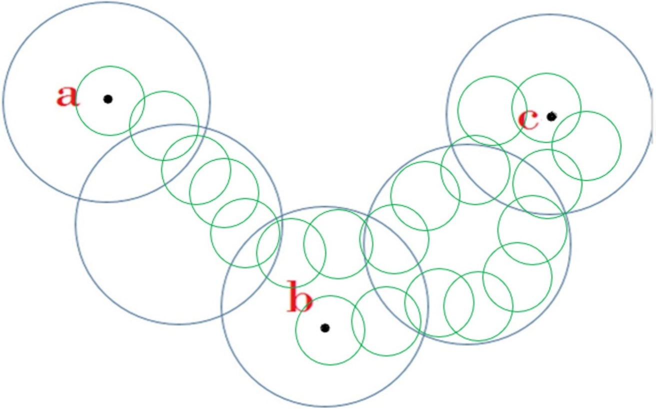
Continuo



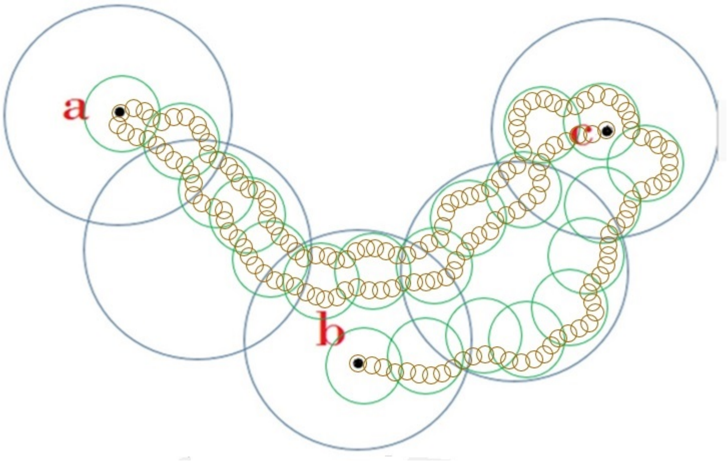
Continuo



Continuo



Continuo



Cadena simple y ε-cadena

Definición. Una familia $\{U_1, ..., U_n\}$ de subconjuntos de un espacio métrico X es una **cadena simple** en X si

$$U_j \cap U_k \neq \emptyset \text{ si y solo si } |j - k| \leq 1.$$

Cada U_k es un eslabón de la cadena simple. Una cadena simple $C = \{U_1, ..., U_n\}$ **conecta a los puntos a y b en X** si $a \in U_1$ y $b \in U_n$.

Cadena simple y ε-cadena

Definición. Una familia $\{U_1, ..., U_n\}$ de subconjuntos de un espacio métrico X es una **cadena simple** en X si

$$U_j \cap U_k \neq \emptyset \text{ si y solo si } |j - k| \leq 1.$$

Cada U_k es un eslabón de la cadena simple. Una cadena simple $C = \{U_1, ..., U_n\}$ **conecta a los puntos a y b en X** si $a \in U_1$ y $b \in U_n$.

Definición. Una cadena simple C de conjuntos abiertos en un espacio métrico X es una **ε-cadena** si el diámetro de cada eslabón de C es menor que ε.

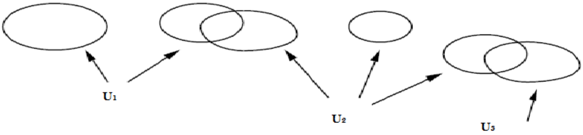
Cadena simple y ε-cadena

Definición. Una familia $\{U_1, ..., U_n\}$ de subconjuntos de un espacio métrico X es una **cadena simple** en X si

$$U_j \cap U_k \neq \emptyset \text{ si y solo si } |j-k| \leq 1.$$

Cada U_k es un eslabón de la cadena simple. Una cadena simple $C = \{U_1, ..., U_n\}$ **conecta a los puntos a y b en X** si $a \in U_1$ y $b \in U_n$.

Definición. Una cadena simple C de conjuntos abiertos en un espacio métrico X es una **ε-cadena** si el diámetro de cada eslabón de C es menor que ε.

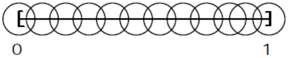


Continuos encadenables

Definición. Un continuo X es **encadenable** si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε–cadena que cubre a X. Si $a, b \in$ X, entonces X es encadenable de a a b si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε–cadena $C = \{C_1, ..., C_n\}$ que cubre a X tal que $a \in C_1$ y $b \in C_n$.

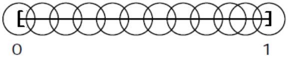
Continuos encadenables

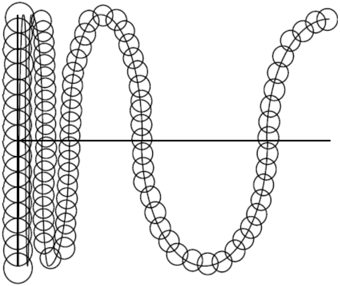
Definición. Un continuo X es **encadenable** si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε–cadena que cubre a X. Si $a, b \in$ X, entonces X es encadenable de a a b si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε–cadena $C = \{C_1, ..., C_n\}$ que cubre a X tal que $a \in C_1$ y $b \in C_n$.



Continuos encadenables

Definición. Un continuo X es **encadenable** si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε–cadena que cubre a X. Si $a, b \in$ X, entonces X es encadenable de a a b si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε–cadena $C = \{C_1, ..., C_n\}$ que cubre a X tal que $a \in C_1$ y $b \in C_n$.





Sucesión definitoria de cadenas

Definición. Sea X es un continuo encadenable. Una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cadenas simples, cada una de las cuales cubre a X, es una **sucesión definitoria de cadenas** para X si para cada $n \in \mathbb{N}$,

Sucesión definitoria de cadenas

Definición. Sea X es un continuo encadenable. Una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cadenas simples, cada una de las cuales cubre a X, es una **sucesión definitoria de cadenas** para X si para cada $n \in \mathbb{N}$,

1. C_n es una $\frac{1}{2^n}$-cadena con la propiedad de que eslabones ajenos tienen cerradura ajenas, y

Sucesión definitoria de cadenas

Definición. Sea X es un continuo encadenable. Una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cadenas simples, cada una de las cuales cubre a X, es una **sucesión definitoria de cadenas** para X si para cada $n \in \mathbb{N}$,

1. C_n es una $\frac{1}{2^n}$-cadena con la propiedad de que eslabones ajenos tienen cerradura ajenas, y
2. C_{n+1} es un refinamiento propio de C_n, *i.e.*, la cerradura de cada eslabón de C_{n+1} está contenida en algún eslabón de C_n.

Sucesión definitoria de cadenas

Definición. Sea X es un continuo encadenable. Una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cadenas simples, cada una de las cuales cubre a X, es una **sucesión definitoria de cadenas** para X si para cada $n \in \mathbb{N}$,

1. C_n es una $\frac{1}{2^n}$-cadena con la propiedad de que eslabones ajenos tienen cerradura ajenas, y
2. C_{n+1} es un refinamiento propio de C_n, *i.e.*, la cerradura de cada eslabón de C_{n+1} está contenida en algún eslabón de C_n.

Teorema. Todo continuo encadenable tiene una sucesión definitoria de cadenas.

Teorema del punto fijo

Definición. Un espacio métrico X tiene la **propiedad del punto fijo** si para cualquier función continua $f : X \to X$ existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Teorema del punto fijo

Definición. Un espacio métrico X tiene la **propiedad del punto fijo** si para cualquier función continua $f : X \to X$ existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Teorema. Sean X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si para cada $\varepsilon > 0$, existe un punto $x_\varepsilon \in X$ tal que $d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$, entonces existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

Teorema. Si X es un continuo encadenable, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.

Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

Teorema. Si X es un continuo encadenable, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.

$f : X \to X$ continua.

Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

Teorema. Si X es un continuo encadenable, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.

$f : X \to X$ continua.

$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$

Una sucesión definitoria de cadenas.

Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

Teorema. Si X es un continuo encadenable, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.

$\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$

$f : X \to X$ continua.

$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$

Una sucesión definitoria de cadenas.

Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

Teorema. Si X es un continuo encadenable, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.

$\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$

$f : X \to X$ continua.

$C_k = \{C_{k,1}, ..., C_{k,n_k}\}$

$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$

Una sucesión definitoria de cadenas.

Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

Teorema. Si X es un continuo encadenable, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.

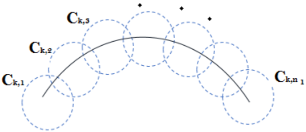
$\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$

$f : X \to X$ continua.

$C_k = \{C_{k,1}, ..., C_{k,n_k}\}$

$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$

Una sucesión definitoria de cadenas.

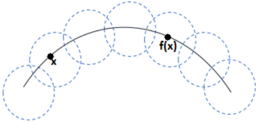


Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

$A =\{ x \in X \mid \text{si } x \in C_{k,j} \text{ y } f(x) \in C_{k,l}, \text{ entonces j} < \text{l} \}$

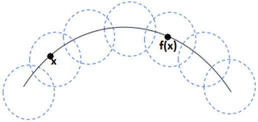
Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

$A = \{\ x \in X \mid$ si $x \in C_{k,j}$ y $f(x) \in C_{k,l}$, entonces j $<$ l $\}$



Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

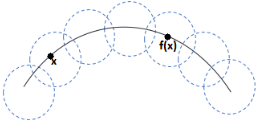
$A = \{ x \in X \mid$ si $x \in C_{k,j}$ y $f(x) \in C_{k,l}$, entonces j $<$ l $\}$



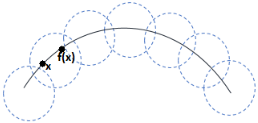
$B = \{x \in X \mid$ existe j tal que $x \in C_{k,j}$ y $f(x) \in C_{k,j}$ $\}$

Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

$A = \{ x \in X \mid$ si $x \in C_{k,j}$ y $f(x) \in C_{k,l}$, entonces j < l $\}$

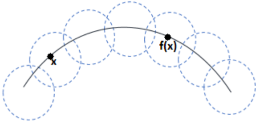


$B = \{ x \in X \mid$ existe j tal que $x \in C_{k,j}$ y $f(x) \in C_{k,j}$ $\}$

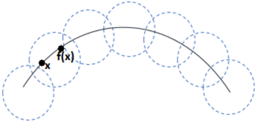


Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

$A = \{ x \in X \mid$ si $x \in C_{k,j}$ y $f(x) \in C_{k,l}$, entonces j $<$ l $\}$



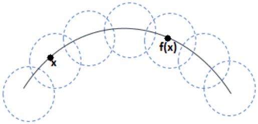
$B = \{ x \in X \mid$ existe j tal que $x \in C_{k,j}$ y $f(x) \in C_{k,j}$ $\}$



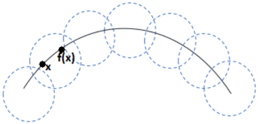
$C = \{ x \in X \mid$ si $x \in C_{k,j}$ y $f(x) \in C_{k,l}$, entonces j $>$ l $\}$

Los encadenados tienen la propiedad del punto fijo

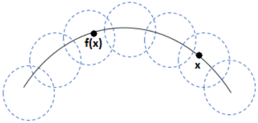
$A = \{\ x \in X \mid$ si $x \in C_{k,j}$ y $f(x) \in C_{k,l}$, entonces j $<$ l $\}$



$B = \{x \in X \mid$ existe j tal que $x \in C_{k,j}$ y $f(x) \in C_{k,j}\ \}$



$C = \{x \in X \mid$ si $x \in C_{k,j}$ y $f(x) \in C_{k,l}$, entonces j $>$ l $\}$



Referencias

Raúl Escobedo, Sergio Macías y Héctor Méndez.
Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios
Publicado por la Sociedad Matemática Mexicana, Nivel Medio, 2006.

Cristina Sánchez López.
Propiedad del puto fijo: lema de Sperner.
http://www.fcfm.buap.mx/docencia/docs/tesis/matematicas/CristinaSanchezLopez.pdf