# La función $\mathcal{T}$ de Jones

*X Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*

Javier Camargo*

10 al 13 de noviembre de 2015

**Resumen**

En 1948 el profesor F. Burton Jones define, para cada espacio métrico compacto $X$, una función $\mathcal{T}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que utilizó entre otras cosas, para estudiar la aposindesis en continuos. En este artículo, estudiaremos propiedades de la función $\mathcal{T}$, caracterizaremos propiedades topológicas conocidas y finalmente, con una restricción adecuada, mostraremos algunos aspectos relacionados con la continuidad de la función $\mathcal{T}$ de Jones.

## 1. Introducción

Dados dos espacios topológicos $X$ y $Y$, y una función $F\colon X \to 2^Y$, donde $2^Y$ denota la colección de cerrados no vacíos de $Y$, decimos que $F$ es una función *semicontinua superiormente* si para cada $x \in X$ y cada abierto $V$ de $Y$ con $F(x) \subset V$, existe un abierto $U$ de $X$ tal que $x \in U$ y para cada $z \in U$ tenemos que $F(z) \subset V$. En análisis y la teoría de integración, el análisis fuzzy y la teoría de funciones multivaluadas son áreas de las matemáticas donde las funciones semicontinuas superiormente son de utilidad. Particularmente en topología, se presenta como una noción cercana a la continuidad que nos permite hacer construcciones interesantes; por ejemplo, demostraciones diferentes y más simples de teoremas clásicos como "todo métrico compacto es cociente del espacio de Cantor" o el conocido Teorema de Hahn-Mazurkiewicz que afirma "todo continuo de Peano es cociente del intervalo cerrado $[0, 1]$".

A menudo cuando realizamos investigaciones en matemáticas, es de gran utilidad encontrar caracterizaciones de las principales nociones que se involucran en nuestro estudio. Dado un concepto o propiedad, una caracterización es una forma equivalente de describir dicho elemento, con un lenguaje diferente. Un par de ejemplos clásicos en topología son: un arco es un continuo no degenerado tal que tiene exactamente dos puntos de no corte, o, un espacio topológico es normal si cada función continua definida de un cerrado en la recta real, se puede extender continuamente a todo el espacio.

En este escrito estudiaremos una función $\mathcal{T}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que restringida apropiadamente, resulta ser una función semicontinua superiormente; esta función, nos permite caracterizar propiedades topológicas y finalmente, como notaremos en el desarrollo de este artículo, la función $\mathcal{T}$ ofrece la posibilidad de proponer preguntas interesantes que pueden motivar futuras investigaciones. Esta función se conoce como *función $\mathcal{T}$ de Jones*.

Este trabajo esta dividido en cinco secciones. En la segunda sección, después de esta introducción, definimos la función $\mathcal{T}$, probamos algunas propiedades, mostramos ejemplos y caracterizamos la conexidad local, aposindesis y los continuos indescomponibles. En la tercera sección, estudiamos propiedades propias de las funciones multivaluadas como son: aditividad, simetría e idempotencia; presentamos los continuos irreducibles y hereditariamente unicoherentes, como familias de continuos que satisfacen estas propiedades. En la cuarta sección, que llamamos continuidad, probamos que $\mathcal{T}$ restringida a la colección de cerrados de $X$, dotado con la métrica de Haudorff, es una función semicontinua superiormente. Mostraremos algunas propiedades de los continuos para los cuales su función $\mathcal{T}$ de Jones es continua. Finalmente, en la sección

*Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Colombia.

cinco, presentamos ejercicios que complementan la teoría expuesta en este artículo. Muchas de las pruebas que presentamos las tomamos de [1] y [3]. Algunos resultados de investigaciones recientes aparecerán en [2].

## 2. Definición y ejemplos

Un *continuo* es un espacio métrico compacto, conexo y diferente de vacío. Un subcontinuo es un subespacio de un espacio métrico que a su vez, es un continuo. Si $X$ es un espacio métrico y $A \subset X$, denotamos por $A^{\circ}$, $\overline{A}$ y $Fr(A)$, al interior, adherencia y frontera del conjunto $A$, respectivamente. $X/A$ representa el espacio cociente que se obtiene al identificar $A$ y $X \setminus A$ denota el complemento de $A$ en $X$ o la diferencia entre $X$ y $A$. El conjunto $\mathcal{P}(X)$ denota el conjunto de partes o conjunto potencia de $X$. Finalmente, como es usual, $\mathbb{N}$ denota el conjunto de enteros positivos.

Empezamos con un teorema muy conocido y utilizado en teoría de continuos. Una prueba puede ser consultada en [5, Teorema 5.6].

**Teorema 2.1** (Golpes en la frontera)**.** *Sean $X$ un continuo y $U$ un abierto propio de $X$. Si $L$ es una componente de $X \setminus U$, entonces $L \cap Fr(U) \neq \emptyset$.*

A continuación definimos la función $\mathcal{T}$ que estudiaremos en este artículo. Como vemos en la siguiente definición, la función $\mathcal{T}$ se define en el conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ usando la topología del espacio $X$.

**Definición 2.2.** *Sea $X$ un espacio métrico compacto. Definimos $\mathcal{T} \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, para cada $A \subset X$, de manera que:*

$$X \setminus \mathcal{T}(A) = \{x \in X \mid \text{ existe un subcontinuo } K \text{ de } X \text{ tal que } x \in K^{\circ} \text{ y } K \cap A = \emptyset\}.$$

*De manera directa, podemos decir que:*

$$\mathcal{T}(A) = \{x \in X \mid \text{para cada subcontinuo } K \text{ de } X \text{ tal que } x \in K^{\circ}, \text{ tenemos que } K \cap A \neq \emptyset\}.$$

*A la función $\mathcal{T}$ se le llama función $\mathcal{T}$ de Jones.*

De la Definición 2.2 es claro que $A \subset \mathcal{T}(A)$ y $X \setminus \mathcal{T}(A)$ es abierto, luego $\mathcal{T}(A)$ es un cerrado de $X$ que contiene a $A$, para cualquier $A \in \mathcal{P}(X)$. Nótese que si $A \subset B$ y $x \notin \mathcal{T}(B)$, entonces existe un continuo $K$ tal que $x \in K^{\circ} \subset K \subset X \setminus B$, donde a su vez $X \setminus B \subset X \setminus A$; es decir, $x \notin \mathcal{T}(A)$ y $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(B)$. De lo anterior, es inmediata la prueba de la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.** *Sea $X$ un espacio métrico compacto. Entonces:*

1. *$A \subset \mathcal{T}(A)$ y $\mathcal{T}(A)$ es cerrado, para cada $A \subset X$.*
2. *Si $A \subset B$, entonces $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(B)$.*

A continuación mostramos como actúa la función $\mathcal{T}$ en algunos espacios métrico compactos sencillos.

**Ejemplo 2.4.** 1. *Sea $X = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Como $X$ es totalmente disconexo, los únicos subcontinuos son puntos. Además, si $x \neq 0$, entonces $\{x\}$ es un subcontinuo (abierto de $X$) tal que $x \in \{x\}^{\circ}$. Con esta observación es fácil ver que, para cada $A \subset X$:*

$$\mathcal{T}(A) = \begin{cases} A & si \ \ 0 \in A; \\ A \cup \{0\} & si \ \ 0 \notin A. \end{cases}$$

*En particular, nótese que $\mathcal{T}(\emptyset) = \{0\}$.*

2. *Sea $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ el espacio de Cantor. Como es bien conocido, al igual que el ejemplo anterior, $\mathcal{C}$ es totalmente disconexo y sus subcontinuos son puntos. Sin embargo, $\mathcal{C}$ es perfecto; esto es, $\mathcal{C}$ no tiene subcontinuos con interior diferente de vacío. Así, para $A \subset \mathcal{C}$, tenemos que $\mathcal{T}(A) = \mathcal{C}$; incluso si $A = \emptyset$.*

3. *Si* $A \subset [0,1]$ *y* $x \notin \overline{A}$*, entonces es fácil ver que existen* $a_x, b_x \in [0,1]$ *tales que* $a_x < x < b_x$ *y* $[a_x, b_x] \cap A = \emptyset$*. Lo anterior muestra que* $x \notin \mathcal{T}(A)$ *y* $\mathcal{T}(A) \subset \overline{A}$*. Sabemos que* $A \subset \mathcal{T}(A)$ *y* $\mathcal{T}(A)$ *es cerrado, por la Proposicion 2.3; es decir,* $\overline{A} \subset \mathcal{T}(A)$ *y* $\mathcal{T}(A) = \overline{A}$*. Para* $[0,1]$ *la función* $\mathcal{T}$ *es equivalente al operador adherencia.*

4. *Sea* $X = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \{(x, \mathrm{sen}(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}$ *el continuo conocido como la curva senoidal del topólogo. Denotemos por* $J = \{0\} \times [-1,1]$*. Nótese que si* $z \in J$ *y* $K$ *es un continuo tal que* $z \in K^\circ$*, entonces* $J \subset K$*. Así, para cada* $A \in \mathcal{P}(X)$*, no es difícil verificar que:*

$$\mathcal{T}(A) = \begin{cases} \overline{A} & si \ \ \overline{A} \cap J = \emptyset; \\ J \cup \overline{A} & si \ \ \overline{A} \cap J \neq \emptyset. \end{cases}$$

En el Ejercicio 1 mostramos una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$. En particular, mostramos que si $X$ es un continuo, entonces $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$. En adelante, todos nuestros resultados y ejemplos están dados en continuos.

Las nociones de cono y suspensión las usaremos con frecuencia en este artículo. Dado un espacio métrico compacto $X$, definimos el *cono de* $X$ como el espacio cociente $\mathrm{Cono}(X) = (X \times [0,1])/(X \times \{1\})$; además, *la suspensión de* $X$ como $\mathrm{Sus}(X) = \mathrm{Cono}(X)/(X \times \{0\})$.

**Ejemplo 2.5.** *Sean* $A = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *y* $F_H = \mathrm{Cono}(A)$*. El continuo* $F_H$ *es conocido como abanico armónico.*

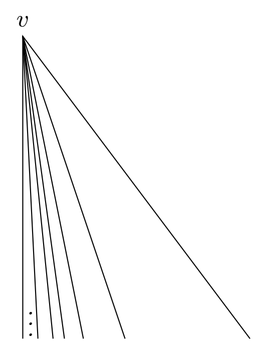



*Figura 1.* $F_H$ *Abanico armónico*

*Sea* $v$ *el punto en* $\mathrm{Cono}(A)$ *correspondiente a la clase* $A \times \{1\}$*, que llamaremos vértice de* $\mathrm{Cono}(A)$*. Describamos la función* $\mathcal{T}$ *en* $F_H$*. Nótese que si* $z = (0,s) \in \{0\} \times [0,1)$*, entonces* $\mathcal{T}(\{z\}) = \{(0,0) + t(0,s) \mid t \in [0,1]\}$*, e incluso,* $\mathcal{T}(\{v\}) = (\{0\} \times [0,1)) \cup \{v\}$*. Además,* $\mathcal{T}(\{z\}) = \{z\}$ *para cada* $z = (a,s)$*, donde* $a \neq 0$ *y* $s \in [0,1)$*. De esta observación, no es difícil probar que*

$$\mathcal{T}(A) = \bigcup \{\mathcal{T}(\{x\}) \mid x \in \overline{A}\}.$$

Observemos que en el Ejemplo 2.5 describimos la función $\mathcal{T}$, únicamente con la imagen de los puntos; ésto en general no es suficiente. Por ejemplo, tomando $\mathrm{Sus}(A)$ donde $A = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $a$ y $b$ representan las clases no degeneradas en este espacio cociente, entonces $\mathcal{T}(\{a\}) = \{a\}, \mathcal{T}(\{b\}) = \{b\}$ y $\mathcal{T}(\{a,b\}) = \{a,b\} \cup (\{0\} \times (0,1))$. La propiedad aditiva la estudiaremos más adelante.

De la Proposición 2.3, podemos decir que $\mathcal{T}$ aplicado en un cerrado de $X$, siempre es un cerrado. A continuación probamos que $\mathcal{T}(A)$ es un continuo, siempre que $A$ sea un continuo.

**Teorema 2.6.** *Sea* $X$ *un continuo. Si* $W$ *es un subcontinuo de* $X$*, entonces* $\mathcal{T}(W)$ *es también, un subcontinuo de* $X$*.*

*Demostración.* Sea $W$ un continuo. Sabemos que $\mathcal{T}(W)$ es cerrado, por la Proposición 2.3. Así, debemos probar que $\mathcal{T}(W)$ es conexo. Supongamos que $\mathcal{T}(W) = A \cup B$, donde $A$ y $B$ son cerrados disjuntos. Como $W$ es conexo y $W \subset \mathcal{T}(W)$, tenemos que $W \subset A$ o $W \subset B$. Supongamos que $W \subset A$. Como $X$ es un espacio métrico, existe un abierto $U$ de $X$ tal que $A \subset U$ y $\overline{U} \cap B = \emptyset$. Nótese que $Fr(U) \cap \mathcal{T}(W) = \emptyset$. De lo anterior, para cada $x \in Fr(U)$, existe un continuo $K_x$ tal que $x \in K_x^\circ$ y $K_x \cap W = \emptyset$. Como $Fr(U)$ es compacto, existen $K_1, ..., K_n$ continuos tales que $Fr(U) \subset \bigcup_{i=1}^n K_i^\circ \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$ y $(\bigcup_{i=1}^n K_i) \cap W = \emptyset$. Sea $V = U \setminus (\bigcup_{i=1}^n K_i)$. Observe que $W \subset V$ y $Fr(V) \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$. Por el Teorema 2.1, cada componente de $X \setminus V$ intersecta a $\bigcup_{i=1}^n K_i$, y así, $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes. Como $B \subset X \setminus \overline{U} \subset X \setminus U \subset X \setminus V$, $B \subset (X \setminus V)^\circ$. Si $x \in B$, es fácil ver que $x$ está en el interior de la componente de $X \setminus V$ que lo contiene. De esto, $x \notin \mathcal{T}(W)$ y $B = \emptyset$. Así, $\mathcal{T}(W)$ es conexo. □

Recordemos que un continuo $X$ es localmente conexo en un punto $p \in X$ si para cada abierto $U$ tal que $p \in U$, existe un abierto conexo $V$ donde $x \in V \subset U$; $X$ será *localmente conexo* si es localmente conexo en cada uno de sus puntos. Similarmente, un continuo $X$ es conexo en pequeño en un punto $p \in X$ si para cada abierto $U$ tal que $p \in U$, existe un conexo $N$ donde $x \in N^\circ \subset N \subset U$; $X$ será *conexo en pequeño* si es conexo en pequeño en cada punto. Es claro que si un continuo es localmente conexo en un punto, será conexo en pequeño en dicho punto. Además, existen ejemplos de continuos donde existe conexidad en pequeño en un punto en particular, pero no hay conexidad local (ver Ejercicio 5). El siguiente resultado muestra que estos dos conceptos son equivalentes de manera global (ver Ejercicio 6).

**Teorema 2.7.** *Un continuo $X$ es localmente conexo si y solo si $X$ es conexo en pequeño.*

Con la siguiente proposición caracterizamos los continuos localmente conexos.

**Proposición 2.8.** *Sea $X$ un continuo. Entonces, $X$ es localmente conexo si y solo si $\mathcal{T}(A) = A$ para cada cerrado $A$ de $X$.*

*Demostración.* Supongamos primero que $X$ es localmente conexo. Sea $A$ un cerrado de $X$. Veamos que $\mathcal{T}(A) \subset A$. Sea $x \notin A$. Por la conexidad local, existe un abierto conexo $V$ tal que $x \in V \subset \overline{V}$ y $\overline{V} \cap A = \emptyset$. Como $\overline{V}$ es un continuo, $x \notin \mathcal{T}(A)$ y $\mathcal{T}(A) \subset A$. Por la Proposición 2.3, $A \subset \mathcal{T}(A)$ y por tanto, $\mathcal{T}(A) = A$.

Recíprocamente, sean $x \in X$ y $U$ abierto de $X$ tales que $x \in U$. Como $\mathcal{T}(X \setminus U) = X \setminus U$, existe un continuo $K$ tal que $x \in K^\circ$ y $K \subset U$. Así, $X$ es conexo en pequeño en $x$. Como $x$ fue un punto arbitrario, $X$ es conexo en pequeño. Por el Teorema 2.7, $X$ es localmente conexo. □

Se presume que una de las razones por las cuales Jones define su función $\mathcal{T}$, fue para estudiar la aposindesis en continuos. A continuación definimos este concepto.

**Definición 2.9.** *Sean $X$ un continuo y $p \in X$. Diremos que:*

1. *$X$ es aposindético en $p$ si para cualquier $q \neq p$, existe un continuo $K_q$ tal que $p \in K_q^\circ$ y $q \notin K_q$.*
2. *$X$ es semilocalmente conexo en $p$ si para todo abierto $U$ tal que $p \in U$ existe un abierto $V$ donde $p \in V \subset U$ y $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes.*

*Además, diremos que $X$ es aposindético (semilocalmente conexo) si $X$ es aposindético (semilocalmente conexo, respectivamente) en cada uno de sus puntos.*

Sean $v = (0,0)$, $a_0 = (1,0)$ y $a_n = (1, \frac{1}{n})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $F_n = \{tv + (1-t)a_n \mid t \in [0,1]\}$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y definimos

$$F_H = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i.$$

No es difícil ver que $F_H$ es un continuo y se conoce como abanico armónico (es homeomorfo al continuo descrito en el Ejemplo 2.5 y representado en la Figura 1). También es fácil ver que $F_H$ es aposindético en $v$, no es semilocalmente conexo en $v$, $F_H$ es semilocalmente conexo en $a_0$ y no es aposindético en $a_0$. Sin embargo, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.10.** *Sea $X$ un continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$X$ es aposindético;*
2. *$X$ es semilocalmente conexo;*
3. *$\mathcal{T}(\{x\}) = \{x\}$, para cada $x \in X$.*

*Demostración.* Supongamos primero que $X$ es aposindético y probemos que $X$ es semilocalmente conexo. Sean $p \in X$ y $U$ abierto tal que $x \in U$. Como $X$ es aposindético, para cada $x \in X \setminus U$ existe un continuo $K_x$ tal que $x \in K_x^\circ$ y $p \notin K_x$. Ahora, como $X \setminus U$ es compacto, existe $\{x_1, ..., x_n\} \subset X \setminus U$ tal que $X \setminus U \subset \bigcup_{i=1}^n K_{x_i}^\circ$. Sea $V = X \setminus (\bigcup_{i=1}^n K_{x_i})$. Es claro que $V$ es abierto, $p \in V \subset U$ y $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes. Así, $X$ es semilocalmente conexo en $p$. Como $p$ se tomó arbitrariamente, $X$ es semilocalmente y concluimos que 1 implica 2.

Veamos que 2 implica 3. Sea $x \in X$. Probemos que $\mathcal{T}(\{x\}) = \{x\}$. Sean $y \neq x$ y $U$ abierto tal que $x \in U$ y $y \notin \overline{U}$. Como $X$ es semilocalmente conexo en $x$, existe un abierto $V$ tal que $x \in V \subset U$ y $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes. Como $y \in X \setminus \overline{U} \subset X \setminus \overline{V}$, $y \in (X \setminus V)^\circ$. Así, $y$ está en el interior de la componente que lo contiene; es decir, si $L$ es la componente de $X \setminus V$ tal que $y \in L$, entonces $y \in L^\circ$ y $x \notin L$. Así, $y \notin \mathcal{T}(\{x\})$ y $\mathcal{T}(\{x\}) = \{x\}$, para cada $x \in X$.

Finalmente, 3 implica 1 es directo de la definición. □

De la Proposición 2.8, se sigue el siguiente corolario.

**Corolario 2.11.** *Todo continuo localmente conexo es aposindético y semilocalmente conexo.*

El continuo Sus($A$) donde $A = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es aposindético (semilocalmente conexo) y no es localmente conexo.

Finalizamos esta sección con una caracterización sencilla de los continuos indescomponibles usando la función $\mathcal{T}$. Recordemos que un continuo $X$ es *descomponible* si existen $A$ y $B$ subcontinuos propios de $X$ tales que $X = A \cup B$. Si $X$ no es descomponible, diremos que $X$ es *indescomponible*.

Una prueba del siguiente teorema la proponemos en el Ejercicio 10.

**Teorema 2.12.** *Sea $X$ un continuo. Entonces $X$ es indescomponible si y solo si $\mathcal{T}(\{x\}) = X$, para cada $x \in X$.*

# 3. Propiedades generales

En esta sección estudiamos la simetría, aditividad e idempotencia de la función $\mathcal{T}$ de Jones.

**Definición 3.1.** *Un continuo $X$ se dice $\mathcal{T}-$simétrico si para cada $A$ y $B$ cerrados no vacíos de $X$, tenemos que*

$$A \cap \mathcal{T}(B) = \emptyset \text{ si y solo si } \mathcal{T}(A) \cap B = \emptyset.$$

*Además, diremos que $X$ es puntualmente $\mathcal{T}-$simétrico si para cada par de puntos $p, q \in X$ tenemos que*

$$q \notin \mathcal{T}(\{p\}) \text{ si y solo si } p \notin \mathcal{T}(\{q\}).$$

Nótese que el abanico armónico (Ejemplo 2.5) no es un continuo $\mathcal{T}-$simétrico. Es claro que todo continuo $\mathcal{T}-$simétrico es puntualmente $\mathcal{T}-$simétrico. En el Ejercicio 11, proponemos encontrar un continuo puntualmente $\mathcal{T}-$simétrico que no sea $\mathcal{T}-$simétrico.

A continuación mostramos una clase de continuos $\mathcal{T}-$simétricos. Un continuo $X$ se dice *irreducible* si existen $y, z \in X$ tales que no existe un subcontinuo propio $K$ donde $\{y, z\} \subset K$. En este caso diremos que $X$ es irreducible entre $y$ y $z$.

**Teorema 3.2.** *Todo continuo irreducible es puntualemente $\mathcal{T}-$simétrico.*

*Demostración.* Sean $X$ un continuo irreducible y $p, q \in X$. Supongamos que $q \notin \mathcal{T}(\{p\})$. Entonces, existe un continuo $W$ tal que $q \in W^\circ$ y $p \notin W$. Por el Ejercicio 12, $X \setminus W$ tiene a lo más dos componentes. Sea $U$ la componente de $X \setminus W$ tal que $p \in U$. Es claro que $K = \overline{U}$ es un continuo, $p \in K^\circ$ y $q \notin K$; es decir, $p \notin \mathcal{T}(\{q\})$. De lo anterior, $X$ es puntualmente $\mathcal{T}-$simétrico. □

Realmente, como veremos en el Corolario 3.8, todo continuo irreducible es $\mathcal{T}-$simétrico. Antes mostramos algunos resultados importantes.

**Teorema 3.3.** *Sea $X$ un continuo irreducible. Si $K$ y $L$ son subcontinuos de $X$, entonces $(K \cap L)^\circ$ es conexo.*

*Demostración.* Si $(K \cap L)^\circ = \emptyset$, es claro que $(K \cap L)^\circ$ es conexo. Así, supongamos que $(K \cap L)^\circ \neq \emptyset$. Sean $a, b \in X$ tales que $X$ es irreducible entre $a$ y $b$. Por el Ejercicio 12, $X \setminus (K \cap L) = (X \setminus K) \cup (X \setminus L)$ tiene a lo más dos componentes. Consideremos los siguientes casos:

1. $X \setminus (K \cap L) = U \cup V$, donde $U$ y $V$ son abiertos conexos, $a \in U$ y $b \in V$. En esta situación $X \setminus (\overline{U} \cup \overline{V})$ es conexo, por el Ejercicio 12. Nótese que $(K \cap L)^\circ = X \setminus (\overline{U} \cup \overline{V})$.
2. $X \setminus (K \cap L)$ es conexo. Si $W = X \setminus (K \cap L)$, entonces $\overline{W}$ es un continuo tal que $X \setminus \overline{W}$ es conexo (Ejercicio 12). Pero $X \setminus \overline{W} = (K \cap L)^\circ$.

En los casos anteriores podría suceder que $K = X$ o $L = X$. □

**Definición 3.4.** *Un continuo $X$ se dice $\mathcal{T}-$aditivo si para cada par de cerrados no vacíos $A$ y $B$ de $X$, tenemos que $\mathcal{T}(A \cup B) = \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$.*

Como mencionamos anteriormente, $\mathrm{Sus}(A)$ donde $A = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $a$ y $b$ representan las clases no degeneradas en este espacio cociente, entonces $\mathcal{T}(\{a, b\}) \neq \mathcal{T}(\{a\}) \cup \mathcal{T}(\{b\})$; es decir $\mathrm{Sus}(A)$ no es $\mathcal{T}-$aditivo.

**Proposición 3.5.** *Un continuo $X$ es $\mathcal{T}-$aditivo si y solo si $\mathcal{T}(A) = \bigcup\{\mathcal{T}(\{a\}) : a \in A\}$, para cada cerrado $A$ de $X$.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es $\mathcal{T}-$aditivo. Sea $A$ un cerrado. Es claro que $\bigcup\{\mathcal{T}(\{a\}) : a \in A\} \subset \mathcal{T}(A)$, por la Proposición 2.3. Veamos que $\mathcal{T}(A) \subset \bigcup\{\mathcal{T}(\{a\}) : a \in A\}$. Sea $x \in X \setminus \mathcal{T}(\{a\})$, para cada $a \in A$. Por el Ejercicio 7, existe una abierto $U_a$ tal que $a \in U_a$ y $x \in X \setminus \mathcal{T}(\overline{U_a})$, para cada $a \in A$. Por la compacidad de $A$, $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{U_{a_i}}$. Sabemos que $x \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^n \mathcal{T}(\overline{U_{a_i}}))$. Así, $x \in X \setminus \mathcal{T}(\bigcup_{i=1}^n \overline{U_{a_i}})$, pues $X$ es $\mathcal{T}-$aditivo. Como $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(\bigcup_{i=1}^n \overline{U_{a_i}})$, $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$ y $\mathcal{T}(A) = \bigcup\{\mathcal{T}(\{a\}) : a \in A\}$.

La implicación recíproca es inmediata. □

**Teorema 3.6.** *Todo continuo irreducible es $\mathcal{T}-$aditivo.*

*Demostración.* Sean $A$ y $B$ cerrados de $X$. Por la Proposición 2.3, $\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$. Así, es suficiente mostrar que $\mathcal{T}(A \cup B) \subset \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$. Sea $x \notin \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$. Entonces existen $K$ y $L$ continuos tales que $x \in K^\circ \cap L^\circ$, $K \cap A = \emptyset$ y $L \cap B = \emptyset$. Es claro que $x \in (K \cap L)^\circ$. Si $W = \overline{(K \cap L)^\circ}$, por el Teorema 3.3, $W$ es un continuo. Además, nótese que $x \in W^\circ$ y como $W \subset K \cap L$, $W \cap (A \cup B) = \emptyset$. De lo anterior, $x \notin \mathcal{T}(A \cup B)$ y $\mathcal{T}(A \cup B) \subset \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$. □

Como mostramos en el siguiente teorema todo continuo $\mathcal{T}-$simétrico es $\mathcal{T}-$aditivo.

**Teorema 3.7.** *Sea $X$ un continuo. Entonces, $X$ es $\mathcal{T}-$simétrico si y solo si $X$ es puntualmente $\mathcal{T}-$simétrico y $\mathcal{T}-$aditivo.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es $\mathcal{T}-$simétrico. Es claro que $X$ es puntualmente $\mathcal{T}-$simétrico. Veamos que $X$ es $\mathcal{T}-$aditivo. Sean $A$ y $B$ cerrados de $X$. Por la Proposición 2.3, $\mathcal{T}(A)\cup\mathcal{T}(B) \subset \mathcal{T}(A\cup B)$. Probemos que $\mathcal{T}(A \cup B) \subset \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$. Sea $x \in \mathcal{T}(A \cup B)$. Entonces, $\{x\} \cap \mathcal{T}(A \cup B) \neq \emptyset$. Como $X$ es $\mathcal{T}-$simétrico, $\mathcal{T}(\{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Así, $\mathcal{T}(\{x\}) \cap A \neq \emptyset$ o $\mathcal{T}(\{x\}) \cap B \neq \emptyset$. Pero lo anterior implica que $\{x\} \cap \mathcal{T}(A) \neq \emptyset$ o $\{x\} \cap \mathcal{T}(B) \neq \emptyset$; es decir, $x \in \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$ y $\mathcal{T}(A \cup B) = \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$.

Recíprocamente, supongamos que $X$ es puntualmente $\mathcal{T}-$simétrico y $\mathcal{T}-$aditivo. Sean $A$ y $B$ cerrados no vacíos de $X$. Supongamos que $x \in B\cap\mathcal{T}(A)$. Como $\mathcal{T}(A) = \cup\{\mathcal{T}(\{a\}) : a \in A\}$ (Proposición 3.5), $x \in \mathcal{T}(\{a\})$, para algún $a \in A$. Como $X$ es puntualmente $\mathcal{T}-$simétrico, $a \in \mathcal{T}(\{x\}) \subset \mathcal{T}(B)$. Así, $a \in \mathcal{T}(B) \cap A$. □

Por los Teoremas 3.2 y 3.6 se deduce inmediatamente del teorema anterior, el siguiente corolario.

**Corolario 3.8.** *Todo continuo irreducible es $\mathcal{T}-$simétrico.*

Ahora mostramos una familia de continuos $\mathcal{T}-$aditivos. Recordemos que un continuo $X$ se dice unicoherente si siempre que $X = A\cup B$ donde $A$ y $B$ son subcontinuos de $X$, tenemos que $A\cap B$ es conexo. Además, diremos que $X$ es hereditariamente unicoherente si todo subcontinuo es unicoherente. La prueba del siguiente teorema no es difícil y la proponemos en el Ejercicio 17.

**Teorema 3.9.** *Todo continuo hereditariamente unicoherente es $\mathcal{T}-$aditivo.*

**Definición 3.10.** *Sea $X$ un continuo. Diremos que $\mathcal{T}$ es idempotente en $X$ si $\mathcal{T}^2(A) = (\mathcal{T} \circ \mathcal{T})(A) = \mathcal{T}(A)$, para cada $A \subset X$. Similarmente, diremos que $\mathcal{T}$ es idempotente en cerrados en $X$ si $\mathcal{T}^2(A) = \mathcal{T}(A)$, para cada cerrado $A$ de $X$.*

Es claro que si $\mathcal{T}$ es idempotente, entonces $\mathcal{T}$ es idempotente en cerrados. Sea $X = \mathrm{Sus}(A)$ donde $A = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, la suspensión armónica. Como denotamos anteriormente, sean $a$ y $b$ las clases no degeneradas $A \times \{0\}$ y $A \times \{1\}$ en el espacio cociente $X$. Sean $J_1$ y $J_0$ arcos en $X$ que unen los puntos $a$ y $b$, y contienen a $(1, \frac{1}{2})$ y $(0, \frac{1}{2})$, respectivamente. Si $U = J_1 \setminus \{a, b\}$, es claro que $U$ es abierto, $\mathcal{T}(U) = J_1$ y $\mathcal{T}^2(U) = J_0 \cup J_1$. No es difícil ver que $\mathcal{T}$ es idempotente en cerrados en $X$. (Ver Ejercicio 19.)

El siguiente teorema caracteriza la idempotencia.

**Teorema 3.11.** *Sea $X$ un continuo. Entonces, $\mathcal{T}$ es idempotente si y solo si, para cada continuo $W$ de $X$ y cada $x \in W^\circ$, existe un continuo $M$ tal que $x \in M^\circ \subset M \subset W^\circ$.*

*Demostración.* Supongamos primero que $\mathcal{T}$ es idempotente. Sean $W$ un continuo en $X$ y $x \in W^\circ$. Nótese que $x \notin \mathcal{T}(X \setminus W)$ y como $\mathcal{T}$ es idempotente, tenemos que $x \notin \mathcal{T}(\mathcal{T}(X \setminus W))$; es decir, existe un continuo $M$ tal que $x \in M^\circ$ y $M \cap \mathcal{T}(X \setminus W) = \emptyset$. Observe que para cada $z \in M$, existe un continuo $W_z$ tal que $z \in W_z^\circ$ y $W_z \subset W$; esto es, $z \in W^\circ$ y por tanto, $M \subset W^\circ$.

Recíprocamente, sea $A \subset X$. Probemos que $\mathcal{T}^2(A) = \mathcal{T}(A)$. Sabemos de la Proposición 2.3 que $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}^2(A)$. Así, debemos ver que $\mathcal{T}^2(A) \subset \mathcal{T}(A)$. Sea $x \notin \mathcal{T}(A)$. Entonces existe un continuo $W$ tal que $x \in W^\circ$ y $W \cap A = \emptyset$. Por hipótesis, existe un continuo $M$ tal que $x \in M^\circ \subset M \subset W^\circ$. Es claro que $W^\circ \cap \mathcal{T}(A) = \emptyset$, pues el mismo $W$ aplica en la definición de $\mathcal{T}$ para cada punto de su interior. Así, $M\cap\mathcal{T}(A) = \emptyset$ y $x \notin \mathcal{T}^2(A)$. De lo anterior $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}^2(A)$ y $\mathcal{T}$ es idempotente en $X$. □

Sea $X$ un continuo, definimos la relación

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X \mid \mathcal{T}(\{x\}) \subset \mathcal{T}(\{y\})\}. \tag{1}$$

Note que $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva y transitiva; es decir, $\mathcal{R}$ es un preorden en $X$. Algunos aspectos relacionados con esta relación los proponemos en los Ejercicios 20 y 21.

# 4. Continuidad

Dado un continuo $X$ definimos los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ que llamaremos *hiperespacios de $X$*:

1. $2^X = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\}$.

2. $C(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es conexo}\}$.

3. $F_n(X) = \{A \in 2^X \mid |A| \leq n\}$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Si $d$ representa la métrica de $X$, para cada $A, B \in 2^X$, definimos la *métrica de Hausdorff* como

$$H(A,B) = \text{ínf}\{r > 0 \mid A \subset N_d(B;r) \text{ y } B \subset N_d(A;r)\}, \tag{2}$$

donde $N_d(D,s) = \{x \in X \mid d(x,z) < s, \text{ para algún } z \in D\}$, para $D \in 2^X$ y $s > 0$. Una prueba del siguiente teorema se puede consultar en [4] o [6].

**Teorema 4.1.** *Para cada continuo $X$, el hiperespacio $2^X$ con la métrica de Hausdorff es un continuo. Además, $C(X)$ y $F_n(X)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, son subcontinuos de $2^X$.*

Por otra parte, para cada $A_1, ..., A_n$ subconjuntos de $X$, definimos

$$\langle A_1, ..., A_n \rangle = \{B \in 2^X \mid B \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ y } B \cap A_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i\}.$$

En [4] se muestra que

$$\beta = \{\langle U_1, ..., U_n \rangle \mid U_1, ..., U_n \text{ son abierto de } X\} \tag{3}$$

es base de una topología en $2^X$, y si $\tau_V$ es la topología generada por la base $\beta$, entonces $\tau_V = \tau_H$, donde $\tau_H$ es la topología generada por la métrica de Hausdorff definida en (2). La topología $\tau_V$ se conoce como *Topología de Vietoris*. En adelante, usaremos indistintamente abiertos generados con la métrica de Hausdorff o abiertos de Vietoris generados por (3).

Nótese que $\langle U_1, ..., U_n \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \langle X, U_i \rangle)$, esto es, si

$$\mathcal{S} = \{\langle U \rangle \mid U \text{ es abierto de } X\} \cup \{\langle X, V \rangle \mid V \text{ es abierto de } X\},$$

entonces $\mathcal{S}$ es una subbase de la topología de Vietoris $\tau_V$.

A continuación mostramos algunas propiedades que proponemos demostrar en los ejercicios en la última sección.

**Proposición 4.2.** *Sea $X$ un continuo.*

1. *$\langle A_1, ..., A_n \rangle$ es cerrado de $2^X$ siempre que $A_1, ..., A_n$ sean cerrados de $X$.*

2. *$\overline{\langle U_1, ..., U_n \rangle} = \langle \overline{U_1}, ..., \overline{U_n} \rangle$, para cualesquiera abiertos $U_1, ..., U_n$ de $X$.*

Como mencionamos en la introducción, las funciones semicontinuas superiormente son una herramienta para abordar problemas en diferentes áreas de las matemáticas. A continuación definimos este concepto.

**Definición 4.3.** *Sea $f\colon X \to 2^Y$ una función. Diremos que $f$ es semicontinua superiormente si para cada $x \in X$ y cada abierto $V$ tal que $f(x) \subset V$, existe un abierto $U$ de $X$, donde $x \in U$ y $f(z) \subset V$ para cada $z \in U$.*

La semicontinuidad superior se puede describir en términos de los abiertos dados en (3), como mostramos en el siguiente resultado. La prueba la proponemos en el Ejercicio 24.

**Proposición 4.4.** *Una función $f\colon X \to 2^Y$ es semicontinua superiormente si y solo si $f^{-1}(\langle V \rangle)$ es abierto de $X$, para cada abierto $V$ de $Y$.*

De manera natural, podemos decir que $f\colon X \to 2^Y$ es semicontinua inferiormente si $f^{-1}(\langle X, V \rangle)$ es abierto para cada abierto $V$ de $Y$. Así, $f$ será continua si $f^{-1}(\langle U_1, ..., U_n \rangle) = f^{-1}(\langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \langle X, U_i \rangle)) = f^{-1}(\langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \rangle) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(\langle X, U_i \rangle))$ es un abierto; es decir, si $f$ es tanto semicontinua superiormente como semicontinua inferiormente.

**Teorema 4.5.** *La función $\mathcal{T}\colon 2^X \to 2^X$ es semicontinua superiormente, para cada continuo $X$.*

*Demostración.* Sea $V$ un abierto de $X$. Veamos que $\mathcal{T}^{-1}(\langle V\rangle)$ es abierto. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X \setminus \mathcal{T}^{-1}(\langle V\rangle)$ tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, para algún $A \in 2^X$. Probemos que $A \in 2^X \setminus \mathcal{T}^{-1}(\langle V\rangle)$. Nótese que $\mathcal{T}(A_n)\cap(X\setminus V) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $x_n \in \mathcal{T}(A_n) \cap (X \setminus V)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, para algún $x \in X$. Observe que $x \in X \setminus U$.

Probemos que $x \in \mathcal{T}(A)$. Supongamos que $x \notin \mathcal{T}(A)$. Existe un continuo $W$ tal que $x \in W^\circ$ y $W\cap A = \emptyset$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $x_n \in \mathcal{T}(A_n)$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in W^\circ$ para cada $n \geq n_0$ y por tanto $W \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq n_0$. Por otra parte $A \subset X \setminus W$ y $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, con lo cual existe $n_1$ tal que $A_n \subset X \setminus W$, para cada $n \geq n_1$. Así, si $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, tenemos que $A_n \subset X \setminus W$ y $A_n\cap W \neq \emptyset$, contradicción. De lo anterior, $x \in \mathcal{T}(A)$. Como $x \in X\setminus V$, $\mathcal{T}(A) \notin \langle V\rangle$ y $A \in 2^X\setminus\mathcal{T}^{-1}(\langle V\rangle)$. Así, $2^X\setminus\mathcal{T}^{-1}(\langle V\rangle)$ es cerrado y $\mathcal{T}^{-1}(\langle V\rangle)$ es abierto. Por la Proposición 4.4, $\mathcal{T}$ es semicontinua superiormente. $\square$

En esta sección estudiaremos algunos aspectos relacionados con la continuidad de la función $\mathcal{T}$, cuando $\mathcal{T}\colon 2^X \to 2^X$. Hasta este momento sabemos que si $X$ es localmente conexo o indescomponible, entonces, por la Proposición 2.8 y el Teorema 2.12, respectivamente, tenemos que $\mathcal{T}$ es la identidad o una función constante; es decir, $\mathcal{T}$ es continua.

**Lema 4.6.** *Sea $X$ un continuo. Si $\mathcal{T}\colon 2^X \to 2^X$ es continua y $W$ es un subcontinuo de $X$, entonces $\mathcal{T}(X \setminus W^\circ) = X \setminus W^\circ$.*

*Demostración.* Sean $W$ un continuo y $x \in W^\circ$. Sea $\mathcal{F} = \langle X \setminus W^\circ\rangle$. Por la Proposición 4.2, $\mathcal{F}$ es cerrado de $2^X$. Como $\mathcal{T}$ es continua, $\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{F})$ es cerrado de $2^X$. Como $X\setminus W \subset X\setminus W^\circ$ y $W^\circ\cap\mathcal{T}(X\setminus W) = \emptyset$, tenemos que

$$\mathcal{T}(\langle X \setminus W\rangle) \subset \mathcal{F};\ \text{esto es},\ \langle X \setminus W\rangle \subset \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{F}).$$

Supongamos ahora que $W \neq X$. Como $\overline{X \setminus W} = X \setminus W^\circ$, $X \setminus W^\circ$ es un punto límite de $\langle X \setminus W\rangle$, por la Proposición 4.2. Así, $X \setminus W^\circ \in \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{F})$ y $\mathcal{T}(X \setminus W^\circ) \in \mathcal{F}$. Lo anterior implica que $\mathcal{T}(X \setminus W^\circ) \subset X \setminus W^\circ$. Por la Proposición 2.3, $X \setminus W^\circ \subset \mathcal{T}(X \setminus W^\circ)$ y así, $\mathcal{T}(X \setminus W^\circ) = X \setminus W^\circ$. Si $X = W$, la igualdad es inmediata. $\square$

La siguiente proposición muestra que si $X$ es tal que $\mathcal{T}$ es continua, entonces $\mathcal{T}$ es idempotente.

**Proposición 4.7.** *Sea $X$ un continuo. Si $\mathcal{T}\colon 2^X \to 2^X$ es continua, entonces $\mathcal{T}$ es idempotente.*

*Demostración.* Sean $W$ un continuo y $x \in W^\circ$. Como $\mathcal{T}(X \setminus W^\circ) = X \setminus W^\circ$ y $x \notin X \setminus W^\circ$, tenemos que existe un continuo $M$ tal que $x \in M^\circ$ y $M \cap (X \setminus W^\circ)$; es decir $M \subset W^\circ$. Así, por el Teorema 3.11, $\mathcal{T}$ es idempotente. $\square$

Otra propiedad importante relacionada con la continuidad de $\mathcal{T}$ la mostramos en el siguiente teorema. Su demostración no es sencilla y se sugiere revisar [3, Corolario 3.2.15] para estudiar una demostración.

**Teorema 4.8.** *Sea $X$ un continuo tal que $\mathcal{T}\colon 2^X \to 2^X$ es continua. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$X$ es puntualmente $\mathcal{T}-$simétrico;*

2. *$X$ es $\mathcal{T}-$simétrico;*

3. *$X$ es $\mathcal{T}-$aditivo.*

Para cada $f\colon X \to Y$ una función continua entre continuos, definimos *la función inducida entre hiperespacios* , $2^f\colon 2^X \to 2^Y$ por $2^f(A) = f(A)$, para cada $A \in 2^X$. Por el Ejercicio 26, tenemos que $2^f$ es una función continua. Además, definamos $2^{f^-}\colon 2^Y \to 2^X$ por $2^{f^-}(A) = f^{-1}(A)$, para cada $A \in 2^Y$. La función $2^{f^-}$ no siempre es continua. Sin embargo, por el Ejercicio 26, es inmediata la prueba de la siguiente proposición.

**Proposición 4.9.** *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua entre continuos. Si $f$ es abierta, entonces $2^{f^-}$ es continua.*

Con el siguiente teorema caracterizamos los continuos donde la función $\mathcal{T}$ de Jones es continua. Una prueba se podrá consultar en [2].

**Teorema 4.10.** *Sea $X$ un continuo. Entonces, $\mathcal{T}$ es continua si y solo si existen un continuo localmente conexo $Y$ y una función monótona y abierta $f\colon X \to Y$ tales que $\mathcal{T}(A) = f^{-1}(f(A))$, para cada $A \in 2^X$.*

Como consecuencia del Teorema 4.10, tenemos el siguiente resultado que responde de manera afirmativa un par de preguntas planteadas en [3].

**Corolario 4.11.** *Sea $X$ un continuo tal que $\mathcal{T}$ es continua. Entonces:*

1. *$X$ es puntualmente $\mathcal{T}-$simétrico;*

2. *$X$ es $\mathcal{T}-$simétrico;*

3. *$X$ es $\mathcal{T}-$aditivo.*

*Demostración.* Por el Teorema 4.8, es suficiente mostrar una de las tres afirmaciones. Sabemos que existe una función $f\colon X \to Y$ tal que $\mathcal{T}(A) = f^{-1}(f(A))$, para cada $A \in 2^X$, por el Teorema 4.10. De lo anterior, es inmediato mostrar que $X$ es puntualmente $\mathcal{T}-$simétrico y concluimos nuestra prueba. □

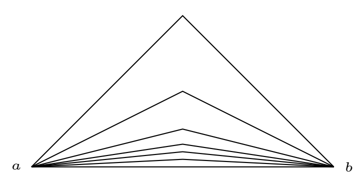
# 5. Ejercicios complementarios

En esta sección proponemos una serie de ejercicios que complementan algunos resultados e ideas que propusimos en el desarrollo de estas notas.

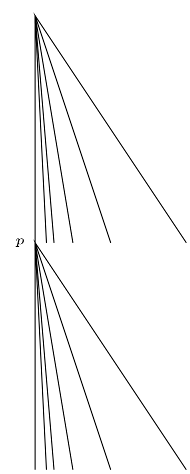
1. Sea $X$ un espacio métrico compacto. Demuestre $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$ si y solo si $X$ tiene un número finito de componentes.

2. Demuestre que si $X$ es localmente conexo, $\mathcal{T}(A) = \overline{A}$ para cada $A \subset X$.

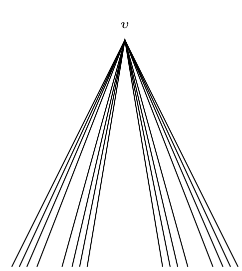
3. Para cada continuo $X$ representado a continuación, calcule $\mathcal{T}(A)$, donde $A$ es un subconjunto arbitrario de $X$.



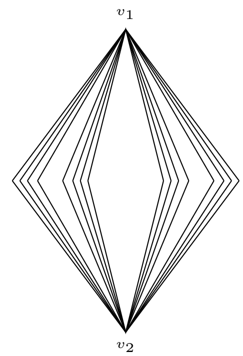

$X = \mathrm{Sus(A)}$, donde $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$




$X = \mathrm{Cono(A)} \cup_{\mathrm{p}} \mathrm{Cono(A)}$,
donde $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$



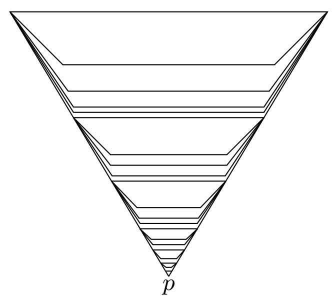

$X = \mathrm{Cono}(\mathcal{C})$, donde $\mathcal{C}$ es Cantor




$X = \mathrm{Sus}(\mathcal{C})$, donde $\mathcal{C}$ es Cantor

4. Demuestre que un continuo $X$ es localmente conexo si y solo si para cada abierto $U$ de $X$ y cada componente $L$ de $U$, $L$ es abierto de $X$.

5. Muestre que el espacio descrito a continuación es conexo en pequeño en el punto $p$, pero no es localmente conexo en $p$. El espacio es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por una sucesión de trapecios que convergen a un punto $p$, donde a su vez, cada trapecio es límite de trapecios que comparten una arista, como se muestra en la figura a continuación.




6. Demuestre que un continuo $X$ es localmente conexo si y solo si $X$ es conexo en pequeño.

7. Sean $X$ un continuo y $A$ un cerrado de $X$. Si $x \notin \mathcal{T}(A)$, demuestre que existe un abierto $U$ tal que $A \subset U$ y $x \notin \mathcal{T}(\overline{U})$.

8. Sean $X$ un continuo y $p \in X$. Demuestre o refute cada afirmación:

   *a*) Si $X$ es localmente conexo en $p$, entonces $X$ es aposindético en $p$.
   *b*) Si $X$ es aposindético en $p$, entonces $X$ es localmente conexo en $p$.
   *c*) Si $X$ es aposindético en $p$, entonces $X$ es semilocalmente conexo en $p$.
   *d*) Si $X$ es semilocalmente conexo en $p$, entonces $X$ es aposindético en $p$.
   *e*) $X$ es localmente conexo si y solo si $X$ es aposindético.

9. Demuestre que un continuo es indescomponible si y solo si todo subcontinuo propio tiene interior vacío.

10. Demuestre que un continuo $X$ es indescomponible si y solo si $\mathcal{T}(\{p\}) = X$, para cada $p \in X$.

11. Muestre un continuo puntualmente $\mathcal{T}-$simétrico que no sea $\mathcal{T}-$simétrico.

12. Sea $X$ un continuo irreducible. Demuestre las siguientes propiedades:

*a*) Si $K$ es un subcontinuo de $X$ tal que $X \setminus K$ no es conexo, entonces $X \setminus K$ tiene exactamente dos componentes, cada una de las cuales contiene uno de los puntos de irreducibilidad.

*b*) Si $K$ y $L$ son continuos cada uno de los cuales tiene uno de los puntos de irreducibilidad de $X$, entonces $X \setminus (K \cup L)$ es conexo.

13. Mostrar un ejemplo de un continuo $\mathcal{T}-$simétrico que no sea irreducible.

14. Mostrar un ejemplo de un continuo $X$ tal que $X$ es $\mathcal{T}-$aditivo, pero $X$ no es $\mathcal{T}-$simétrico.

15. Muestre un ejemplo de un continuo $X$ tal que $\mathcal{T}(\{p,q\}) = \mathcal{T}(\{p\}) \cup \mathcal{T}(\{q\})$, para cualesquiera $p, q \in X$, y $X$ no sea $\mathcal{T}-$aditivo.

16. Demuestre que $X$ es hereditariamente unicoherente si y solo si para cada par de subcontinuos $A$ y $B$ de $X$, tenemos que $A \cap B$ es conexo.

17. Demuestre el Teorema 3.9.

18. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos $\mathcal{T}^n = \mathcal{T} \circ ... \circ \mathcal{T}$ ($n$-veces). Mostrar un ejemplo de un continuo $X$ tal que existe $p \in X$, donde $\mathcal{T}^n(\{p\}) \neq \mathcal{T}^{n+1}(\{p\})$, para cada entero positivo $n$.

19. Muestre que para la suspensión armónica Sus$(A)$, donde $A = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, tenemos que $\mathcal{T}$ es idempotente en cerrados. ¿Es $\mathcal{T}$ idempotente en cerrados en Cono$(A)$?

20. Demuestre que si $\mathcal{T}$ es idempotente en $X$, entonces $\mathcal{R}$, la relación descrita en (1), es cerrado de $X \times X$.

21. Muestre un continuo $X$ tal que $\mathcal{R}$ sea cerrado de $X \times X$, pero $\mathcal{T}$ no sea idempotente.

22. Demuestre que la familia $\beta$ definida en (3) es base de topología en $2^X$.

23. Demuestre las propiedades descritas en la Proposición 4.2.

24. Demuestre la Proposición 4.4.

25. Muestre que para cada uno de los continuos descritos en el punto 3, la función $\mathcal{T}$ no es continua.

26. Sea $f\colon X \to Y$ una función continua entre continuos. Demuestre:

    *a*) $(2^f)^{-1}(\langle V \rangle) = \langle f^{-1}(V) \rangle$ y $(2^f)^{-1}(\langle Y, V \rangle) = \langle X, f^{-1}(V) \rangle$, para cada $V \subset Y$.

    *b*) $(2^{f^-})^{-1}(\langle U \rangle) = \langle f(U) \rangle$ y $(2^{f^-})^{-1}(\langle X, U \rangle) = \langle Y, f(U) \rangle$, para cada $U \subset X$.

Agradezco a los organizadores del *X Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, Patricia Pellicer, Isabel Puga y Raúl Escobedo, por la invitación a impartir este minicurso.

# Referencias

[1] D. P. Bellamy, Continua for which the set function $\mathcal{T}$ is continuous, Trans. Amer. Math. Soc., 1511 (1970), 581-587.

[2] J. Camargo and C. Uzcátegui, Continuity of the Jones' set function $\mathcal{T}$, preprint.

[3] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[4] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances,* Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, New York, 1999.

[5] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[6] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets. A Text with Research Questions,* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N° 33, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2006.