Algunos Resultado sobre $\frac{1}{n}$-homogeneidad

Yaziel Pacheco Juárez

Universidad Nacional Autónoma de México

IX Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios

Noviembre 2014

Espacios homogéneos

En 1920 en el artículo [7], de la revista Fundamenta Mathematicae, W. Sierpiński introdujo la definición de espacio homogéneo.

Espacios homogéneos

En 1920 en el artículo [7], de la revista Fundamenta Mathematicae, W. Sierpiński introdujo la definición de espacio homogéneo.

Definición

Un espacio X es homogéneo si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe $f : X \to X$ homeomorfismo tal que $f(x) = y$.

Espacios homogéneos

En 1920 en el artículo [7], de la revista Fundamenta Mathematicae, W. Sierpiński introdujo la definición de espacio homogéneo.

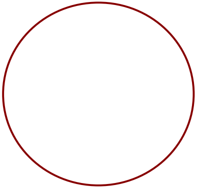
Definición

Un espacio X es homogéneo si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe $f : X \to X$ homeomorfismo tal que $f(x) = y$.

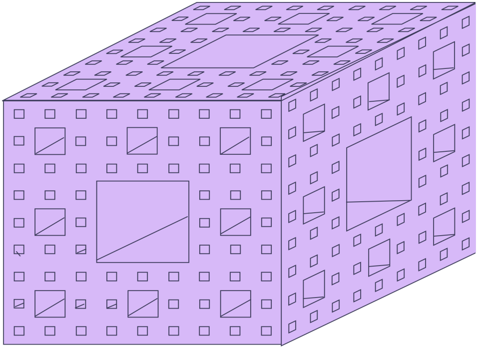
Es decir, X es homogéneo si tiene una sóla órbita bajo la acción del grupo de homeomorfismos en si mismo.

Ejemplos

intervalo abierto



circunferencia



Curva Universal de Menger

Definiciones

La órbita de x en X es el conjunto

$$\mathcal{O}_X(x) = \{h(x) : h \in \mathcal{H}(X)\}$$

Definiciones

La órbita de x en X es el conjunto

$$\mathcal{O}_X(x) = \{h(x) : h \in \mathcal{H}(X)\}$$

De la definición es fácil notar que el conjunto de las órbitas de un espacio X es una partición de X. Es decir, X es unión de sus órbitas, cada órbita es no vacía y órbitas distintas son ajenas.

Definiciones

La órbita de x en X es el conjunto

$$\mathcal{O}_X(x) = \{h(x) : h \in \mathcal{H}(X)\}$$

De la definición es fácil notar que el conjunto de las órbitas de un espacio X es una partición de X. Es decir, X es unión de sus órbitas, cada órbita es no vacía y órbitas distintas son ajenas.

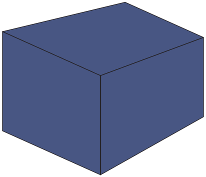
Definición

Un espacio se dice que es $\frac{1}{n}-$homogéneo si tiene exactamente n órbitas bajo la acción del grupo homeomorfismos en si mismo.

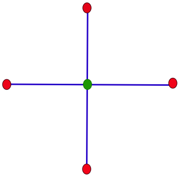
Ejemplos

2-celda

arco



3-celda



n-odo

Un dendroide es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Si X es un dendroide y $p \in X$, decimos que p **tiene orden β en el sentido clásico**, y escribimos $\mathrm{Ord}_X(p) = \beta$, si p es el único punto común de exactamente β arcos.

Un dendroide es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Si X es un dendroide y $p \in X$, decimos que p **tiene orden** β **en el sentido clásico**, y escribimos $\mathrm{Ord}_X(p) = \beta$, si p es el único punto común de exactamente β arcos.

Dado un dendroide X, consideramos los siguientes conjuntos

$$E(X) = \{x \in X : \mathrm{Ord}_X(x) = 1\}, O(X) = \{x \in X : \mathrm{Ord}_X(x) = 2\}$$

y

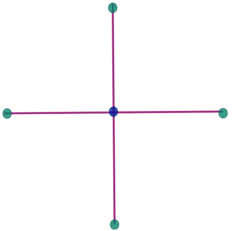
$$R(X) = \{x \in X : \mathrm{Ord}_X(x) \geq 3\}.$$

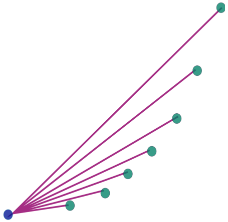
Definición

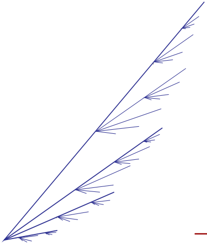
Una dendrita es un continuo localmente conexo y sin curvas cerradas simples.

Definición

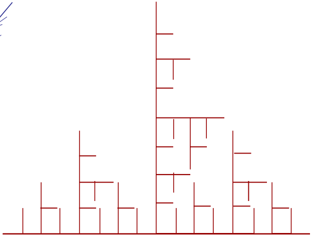
Una *dendrita* *es un continuo localmente conexo y sin curvas cerradas simples.*



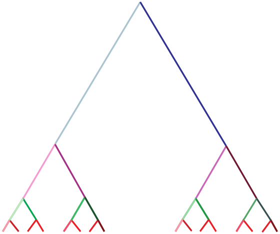




Dendrita P



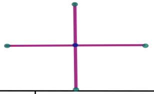
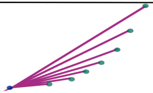
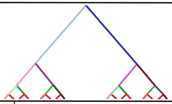
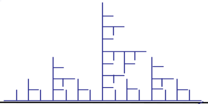
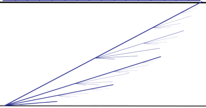
Dendrita Unviversal D_n



Dendrita de Gehman G_3

Clasificación Dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas

Clasificación Dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas

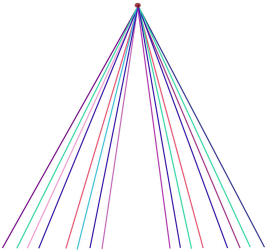
R(X) finito			 
R(X) no finito	E(X) cerrado		
	E(X) no cerrado	sin arcos libres	
		con arcos libres	

Definición

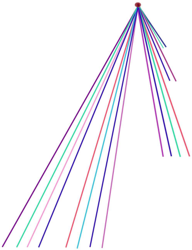
Un **abanico** *es un dendroide con sólo un punto de ramificación, al cual llamaremos el* **vértice** *del abanico.*

Definición

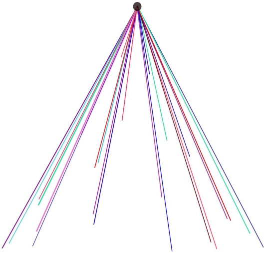
Un **abanico** *es un dendroide con sólo un punto de ramificación, al cual llamaremos el* **vértice** *del abanico.*



Abanico de Cantor



F_Y



Abanico de Lelek

Definición

Sea X un abanico con vértice t, decimos que X es suave si para cada $a \in X$ y para cada sucesión $\{a_n\}_n$ que converge a a, entonces $ta_n \to ta$.

Definición

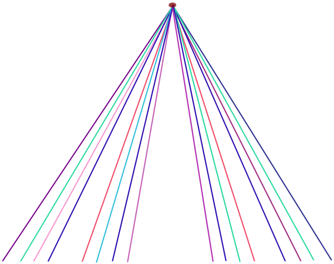
Sea X un abanico con vértice t, decimos que X es suave si para cada $a \in X$ y para cada sucesión $\{a_n\}_n$ que converge a a, entonces $ta_n \to ta$.

Es sabido que un abanico X es suave si y sólo si X se puede encajar en el Abanico de Cantor.

Definición

Sea X un abanico con vértice t, decimos que X es suave si para cada $a \in X$ y para cada sucesión $\{a_n\}_n$ que converge a a, entonces $ta_n \to ta$.

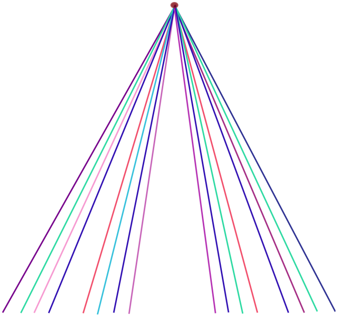
Es sabido que un abanico X es suave si y sólo si X se puede encajar en el Abanico de Cantor.



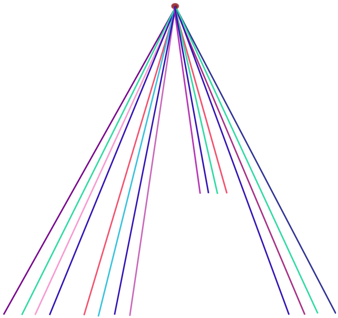
Abanico de Cantor

A partir del abanico de Cantor construiremos un abanico F_Y.

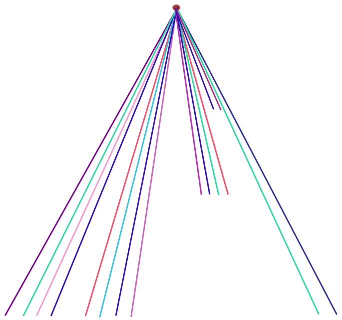
A partir del abanico de Cantor construiremos un abanico F_Y.



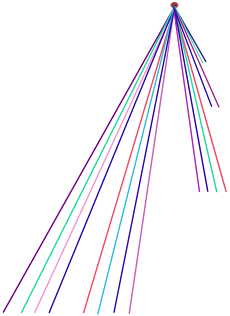
A partir del abanico de Cantor construiremos un abanico F_Y.



A partir del abanico de Cantor construiremos un abanico F_Y.



A partir del abanico de Cantor construiremos un abanico F_Y.

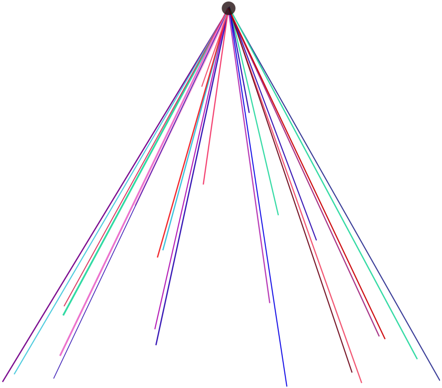


Un abanico suave importante para nuestro estudio lo construyó A. Lelek en 1961 como un ejemplo de un dendroide cuyo conjunto de puntos extremos es denso y 1-dimensional. Tal abanico es conocido como el Abanico de Lelek y está caracterizado de la siguiente manera.

Un abanico suave importante para nuestro estudio lo construyó A. Lelek en 1961 como un ejemplo de un dendroide cuyo conjunto de puntos extremos es denso y 1-dimensional. Tal abanico es conocido como el Abanico de Lelek y está caracterizado de la siguiente manera.

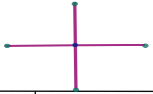
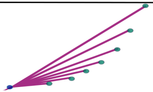
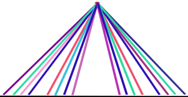
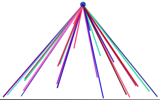
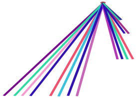
Teorema

Sea X un abanico suave. Entonces $E(X)$ es denso en X si y sólo si X es el abanico de Lelek.



Abanico de Lelek

Clasificación abanicos suaves

Localmente Conexo	 		
No localmente Conexo	E(X) cerrado		
	E(X) no cerrado	E(X) denso	
		E(X) no denso	

Sea X un abanico con vértice t, decimos que X es suave en t con respecto a a si, para cada $\{a_n\}_n$ sucesión tal que $a_n \to a$, entonces $ta_n \to ta$. Definimos también el siguiente conjunto

$$S(t) = \{a \in X : X \text{ es una suave en } t \text{ con respecto a } a\}.$$

Sea X un abanico con vértice t, decimos que X es suave en t con respecto a a si, para cada $\{a_n\}_n$ sucesión tal que $a_n \to a$, entonces $ta_n \to ta$. Definimos también el siguiente conjunto

$$S(t) = \{a \in X : X \text{ es una suave en } t \text{ con respecto a } a\}.$$

Teorema

Si X es un abanico no suave y $\frac{1}{3}$-homogéneo, entonces $S(t) \subset E(X) \cup \{t\}$.

Sea X un abanico con vértice t, decimos que X es suave en t con respecto a a si, para cada $\{a_n\}_n$ sucesión tal que $a_n \to a$, entonces $ta_n \to ta$. Definimos también el siguiente conjunto

$$S(t) = \{a \in X : X \text{ es una suave en } t \text{ con respecto a } a\}.$$

Teorema

Si X es un abanico no suave y $\frac{1}{3}$-homogéneo, entonces $S(t) \subset E(X) \cup \{t\}$.

Teorema

Si X es un abanico no suave y $\frac{1}{3}$-homogéneo, entonces $E(X)$ es denso.

Sea X un abanico con vértice t, decimos que X es suave en t con respecto a a si, para cada $\{a_n\}_n$ sucesión tal que $a_n \to a$, entonces $ta_n \to ta$. Definimos también el siguiente conjunto

$$S(t) = \{a \in X : X \text{ es una suave en } t \text{ con respecto a } a\}.$$

Teorema

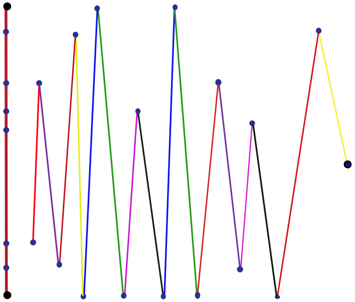
Si X es un abanico no suave y $\frac{1}{3}$-homogéneo, entonces $S(t) \subset E(X) \cup \{t\}$.

Teorema

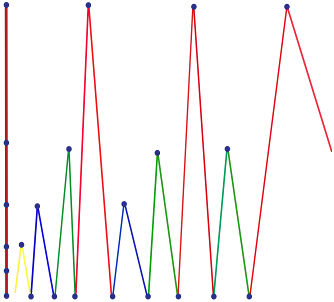
Si X es un abanico no suave y $\frac{1}{3}$-homogéneo, entonces $E(X)$ es denso.

Un elsa continuo o E-continuo es una compactación del rayo con residuo el arco.

Un elsa continuo o E-continuo es una compactación del rayo con residuo el arco.



Separado



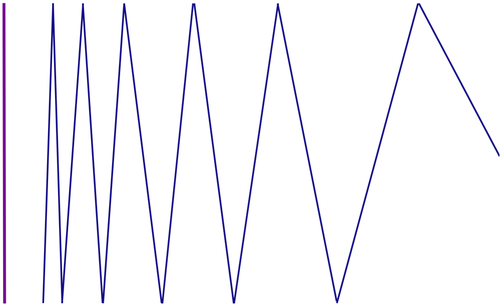
No Separado

Teorema

Sea E un E-continuo $\frac{1}{4}$-homogéneo. Si E está separado entonces E es homeomorfo al Continuo seno de $\frac{1}{x}$.

Teorema

Sea E un E-continuo $\frac{1}{4}$-homogéneo. Si E está separado entonces E es homeomorfo al Continuo seno de $\frac{1}{x}$.



Si X es un continuo decimos que $c \in X$ es un punto de corte si $X - \{c\}$ no es conexo. Denotaremos por $Cut(X)$ al conjunto de puntos de corte de X y por $\mathcal{A}_c$ a la familia de las componentes de $X - \{c\}$.

Si X es un continuo decimos que $c \in X$ es un punto de corte si $X - \{c\}$ no es conexo. Denotaremos por $Cut(X)$ al conjunto de puntos de corte de X y por $\mathcal{A}_c$ a la familia de las componentes de $X - \{c\}$.

Teorema

Sea X un continuo tal que $Cut(X) = \{c\}$. Si $A \in \mathcal{A}_c$ y $a \in A$, entonces:

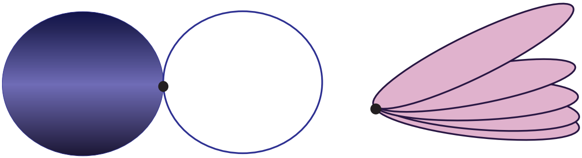
1. $O_A(a) = O_X(a) \cap A$;
2. $O_X(a) = \cup\{O_B(b) : B \in \mathcal{A}_c \text{ y } b \in O_X(a) \cap B\}$.

Corolario

Sean X un continuo y $c \in X$ tales que $Cut(X) = c$. Si X es $\frac{1}{3}$-homogéneo, entonces cada $A \in \mathcal{A}_c$ es homogéneo o bien cada $A \in \mathcal{A}_c$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo.

Corolario

Sean X un continuo y $c \in X$ tales que $Cut(X) = c$. Si X es $\frac{1}{3}$-homogéneo, entonces cada $A \in \mathcal{A}_c$ es homogéneo o bien cada $A \in \mathcal{A}_c$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo.



En los siguientes resultados M denotará la Curva Universal de Menger.

En los siguientes resultados M denotará la Curva Universal de Menger.

Lema

Sean $c \in M \times M$, entonces $(M \times M) - \{c\}$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo.

En los siguientes resultados M denotará la Curva Universal de Menger.

Lema

Sean $c \in M \times M$, entonces $(M \times M) - \{c\}$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo.

Corolario

Sea X el espacio que se obtiene al pegar dos copias de $M \times M$ por un punto c. Entonces X es $\frac{1}{3}$-homogéneo y para cada $A \in \mathcal{A}_c$, A es $\frac{1}{2}$-homogéneo y $\mathrm{Cl}_X(A)$ es homogéneo.

D. Arévalo, W. J. Charatonik, P. Pellicer-Covarrubias, L. Simón, *Dendrites whit a closed set of end points*, Topology Appl. 115 (2001), 1-17.

J. J. Charatonik, *Homeomorphisms of Universal Dendrites.* Rediconti Del Circolo Matematico Di Palermo Serie II. Tomo XLIV (1995), 457-468.

W. J. Charatonik, *The Lelek fan is unique.* Houston Journal of Math., Volume 14, No. 1 (1989).

W. J. Charatonik y A. Dilks, *On self homeomorphic spaces.* Topology Appl. 55(1994) 215-238.

S.B. Nadler, Jr., P. Pellicer-Covarrubias, I. Puga, $\frac{1}{2}$-*homogeneous continua with cut points*, Topology Appl. 154 (2007), No.10, 2154-2166.

V. Neumann-Lara, P. Pellicer-Covarrubias, I. Puga, *On*