Separabilidad en algunos hiperespacios.

Victor Manuel Grijalva Altamirano

Universidad Tecnológica de la Mixteca

Queretaro. Qro, Noviembre 2014

IX taller estudiantil de teoría de los continuos y sus hiperespacios.

Completetez y compacidad en algunos hiperespacios

VICTOR MANUEL GRIJALVA ALTAMIRANO
ESCUELA/FACULTAD - UTM

Sean X un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Definimos:

(1) $\mathcal{CB}(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset, A$ acotado y A es cerrado en $X\}$,
(2) $\mathcal{CTB}(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset, A$ totalmente acotado y A es cerrado en $X\}$,
(3) $2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset$ y A compacto $\}$,
(4) $C_n(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset, A$ acotado y A tiene a lo más n componentes$\}$,
(5) $F_n(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset$ y A tiene a lo más n elementos$\}$.

Estos conjuntos se les conoce como hiperespacios de X, considerados con la métrica de Hausdorff.

En esta plática veremos condiciones necesarias y suficientes para la separabilidad, completez y compacidad de los hiperespacios $\mathcal{CB}(X)$, $\mathcal{CTB}(X)$, 2^X, $C_n(X)$ y $F_n(X)$.

kavic1.marloc@gmail.com

CONTENIDO

1. Preliminares
2. Separabilidad en $F_n(X)$
3. Separabilidad en $\mathcal{F}(X)$
4. Separabilidad en $\mathcal{CB}(X)$
5. Algunas consecuencias

CONTENIDO

1. Preliminares
2. Separabilidad en $F_n(X)$
3. Separabilidad en $\mathcal{F}(X)$
4. Separabilidad en $\mathcal{CB}(X)$
5. Algunas consecuencias

Definición

Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$ tal que $A \neq \emptyset$ y $x \in X$.

$$d(x,A) = \operatorname{ínf}\{d(x,a) : a \in A\}.$$

Definición

Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ tal que $A \neq \emptyset$ y $x \in X$.

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Definición

Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ tales que A y B son no vacíos y acotados.

$$\rho(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}.$$

Definición

Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ tal que $A \neq \emptyset$ y $\epsilon > 0$. La nube alrededor de A y radio ϵ, se define y denota por :

$$N(\epsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon\}.$$

Definición

Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ tal que $A \neq \emptyset$ y $\epsilon > 0$. La nube alrededor de A y radio ϵ, se define y denota por :

$$N(\epsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon\}.$$

Definición

Sean X un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Definimos:

$$\mathcal{CB}(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset, A \text{ acotado y } A \text{ es cerrado en } X\},$$

$$\mathcal{CTB}(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset, A \text{ totalmente acotado y } A \text{ es cerrado en } X\},$$

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ compacto }\},$$

$$F_n(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}.$$

$$\mathcal{F}(X) = \bigcup \{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$$

Teorema

Si X es un espacio métrico, entonces las función denotada por $\mathcal{H} : \mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X) \to [0, \infty)$ y definida como $\mathcal{H}(A, B) = \text{máx}\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$, para cada $A, B \in \mathcal{CB}(X)$, es una métrica sobre $\mathcal{CB}(X)$.

Teorema

Si X es un espacio métrico, entonces las función denotada por $\mathcal{H} : \mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X) \to [0, \infty)$ y definida como $\mathcal{H}(A, B) = \text{máx}\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$, para cada $A, B \in \mathcal{CB}(X)$, es una métrica sobre $\mathcal{CB}(X)$.

Teorema

Si (X, d) es un espacio métrico y $A, B \in \mathcal{CB}(X)$, entonces se tiene que:

$$\mathcal{H}(A, B) = \sup(\{d(a, B) : a \in A\} \cup \{d(b, A) : b \in B\}).$$

Teorema

Si (X,d) es un espacio métrico y $A, B \in \mathcal{CB}(X)$, entonces se cumple que:

$$\mathcal{H}(A,B) = \sup\{|d(x,B) - d(x,A)| : x \in X\}.$$

Teorema

Si (X,d) es un espacio métrico y $A,B \in \mathcal{CB}(X)$, entonces se cumple que:

$$\mathcal{H}(A,B) = \sup\{|d(x,B) - d(x,A)| : x \in X\}.$$

Teorema

Si (X,d) es un espacio métrico y $A,B \in \mathcal{CB}(X)$ y $\epsilon > 0$, entonces:

$$\mathcal{H}(A,B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}.$$

Teorema

Si (X, d) es un espacio métrico y $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, entonces se tiene que:

$$\mathcal{H}(A, B) < \epsilon \text{ si y sólo si } A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A).$$

Teorema

Si (X,d) es un espacio métrico y $A,B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, entonces se tiene que:

$$\mathcal{H}(A,B) < \epsilon \text{ si y sólo si } A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A).$$

Observación

1. $F_n(X) \subset \mathcal{F}(X) \subset 2^X \subset \mathcal{CTB}(X) \subset \mathcal{CB}(X)$.

Teorema

Si (X, d) es un espacio métrico y $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, entonces se tiene que:

$$\mathcal{H}(A, B) < \epsilon \text{ si y sólo si } A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A).$$

Observación

1. $F_n(X) \subset \mathcal{F}(X) \subset 2^X \subset \mathcal{CTB}(X) \subset \mathcal{CB}(X)$.
2. X es isométrico al hiperespacio $F_1(X)$.

CONTENIDO

1. Preliminares
2. Separabilidad en $F_n(X)$
3. Separabilidad en $\mathcal{F}(X)$
4. Separabilidad en $\mathcal{CB}(X)$
5. Algunas consecuencias

¿Si X es separable entonces $F_n(X)$ es separable?

¿Si X es separable entonces $F_n(X)$ es separable?
¿Qué pasa con el converso?

Teorema

Sean (X,d) un espacio métrico, $S \subset X$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces S es denso en X si y sólo si $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in F_n(X)$ y $\epsilon > 0$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in F_n(X)$ y $\epsilon > 0$.Donde $k \leqslant n$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in F_n(X)$ y $\epsilon > 0$.Donde $k \leqslant n$.Como S es denso en X, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea $s_i \in S$ tal que $d(a_i, s_i) < \epsilon$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in F_n(X)$ y $\epsilon > 0$.Donde $k \leqslant n$.Como S es denso en X, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea $s_i \in S$ tal que $d(a_i, s_i) < \epsilon$.Definimos $S_1 = \{s_1, \ldots, s_k\}$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in F_n(X)$ y $\epsilon > 0$.Donde $k \leqslant n$.Como S es denso en X, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea $s_i \in S$ tal que $d(a_i, s_i) < \epsilon$.Definimos $S_1 = \{s_1, \ldots, s_k\}$.Se sigue que $S_1 \in F_n(S)$, $A \subset N(\epsilon, S_1)$ y $S_1 \subset N(\epsilon, A)$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in F_n(X)$ y $\epsilon > 0$.Donde $k \leqslant n$.Como S es denso en X, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea $s_i \in S$ tal que $d(a_i, s_i) < \epsilon$.Definimos $S_1 = \{s_1, \ldots, s_k\}$.Se sigue que $S_1 \in F_n(S)$, $A \subset N(\epsilon, S_1)$ y $S_1 \subset N(\epsilon, A)$. Así, $\mathcal{H}(A, S_1) < \epsilon$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A=\{a_1,\ldots,a_k\}\in F_n(X)$ y $\epsilon>0$.Donde $k\leqslant n$.Como S es denso en X, para cada $i\in\{1,\ldots,k\}$, sea $s_i\in S$ tal que $d(a_i,s_i)<\epsilon$.Definimos $S_1=\{s_1,\ldots,s_k\}$.Se sigue que $S_1\in F_n(S)$, $A\subset N(\epsilon,S_1)$ y $S_1\subset N(\epsilon,A)$. Así, $\mathcal{H}(A,S_1)<\epsilon$. Por lo tanto, $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in F_n(X)$ y $\epsilon > 0$.Donde $k \leqslant n$.Como S es denso en X, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea $s_i \in S$ tal que $d(a_i, s_i) < \epsilon$.Definimos $S_1 = \{s_1, \ldots, s_k\}$.Se sigue que $S_1 \in F_n(S)$, $A \subset N(\epsilon, S_1)$ y $S_1 \subset N(\epsilon, A)$. Así, $\mathcal{H}(A, S_1) < \epsilon$. Por lo tanto, $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in F_n(X)$ y $\epsilon > 0$.Donde $k \leqslant n$.Como S es denso en X, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea $s_i \in S$ tal que $d(a_i, s_i) < \epsilon$.Definimos $S_1 = \{s_1, \ldots, s_k\}$.Se sigue que $S_1 \in F_n(S)$, $A \subset N(\epsilon, S_1)$ y $S_1 \subset N(\epsilon, A)$. Así, $\mathcal{H}(A, S_1) < \epsilon$. Por lo tanto, $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in F_n(X)$ y $\epsilon > 0$.Donde $k \leqslant n$.Como S es denso en X, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea $s_i \in S$ tal que $d(a_i, s_i) < \epsilon$.Definimos $S_1 = \{s_1, \ldots, s_k\}$.Se sigue que $S_1 \in F_n(S)$, $A \subset N(\epsilon, S_1)$ y $S_1 \subset N(\epsilon, A)$. Así, $\mathcal{H}(A, S_1) < \epsilon$. Por lo tanto, $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$.Entonces $\{x\} \in F_n(X)$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in F_n(X)$ y $\epsilon > 0$.Donde $k \leqslant n$.Como S es denso en X, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea $s_i \in S$ tal que $d(a_i, s_i) < \epsilon$.Definimos $S_1 = \{s_1, \ldots, s_k\}$.Se sigue que $S_1 \in F_n(S)$, $A \subset N(\epsilon, S_1)$ y $S_1 \subset N(\epsilon, A)$. Así, $\mathcal{H}(A, S_1) < \epsilon$. Por lo tanto, $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$.Entonces $\{x\} \in F_n(X)$.Por lo supuesto, existe $A \in F_n(S)$ tal que $\mathcal{H}(A, \{x\}) < \epsilon$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A=\{a_1,\ldots,a_k\}\in F_n(X)$ y $\epsilon>0$.Donde $k\leqslant n$.Como S es denso en X, para cada $i\in\{1,\ldots,k\}$, sea $s_i\in S$ tal que $d(a_i,s_i)<\epsilon$.Definimos $S_1=\{s_1,\ldots,s_k\}$.Se sigue que $S_1\in F_n(S)$, $A\subset N(\epsilon,S_1)$ y $S_1\subset N(\epsilon,A)$. Así, $\mathcal{H}(A,S_1)<\epsilon$. Por lo tanto, $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sea $x\in X$ y $\epsilon>0$.Entonces $\{x\}\in F_n(X)$.Por lo supuesto, existe $A\in F_n(S)$ tal que $\mathcal{H}(A,\{x\})<\epsilon$.Así, $\{x\}\subset N(\epsilon,A)$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A = \{a_1, \dots, a_k\} \in F_n(X)$ y $\epsilon > 0$.Donde $k \leqslant n$.Como S es denso en X, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, sea $s_i \in S$ tal que $d(a_i, s_i) < \epsilon$.Definimos $S_1 = \{s_1, \dots, s_k\}$.Se sigue que $S_1 \in F_n(S)$, $A \subset N(\epsilon, S_1)$ y $S_1 \subset N(\epsilon, A)$. Así, $\mathcal{H}(A, S_1) < \epsilon$. Por lo tanto, $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$.Entonces $\{x\} \in F_n(X)$.Por lo supuesto, existe $A \in F_n(S)$ tal que $\mathcal{H}(A, \{x\}) < \epsilon$.Así, $\{x\} \subset N(\epsilon, A)$.De donde, existe $a \in A$, tal que $d(x, a) < \epsilon$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in F_n(X)$ y $\epsilon > 0$.Donde $k \leqslant n$.Como S es denso en X, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea $s_i \in S$ tal que $d(a_i, s_i) < \epsilon$.Definimos $S_1 = \{s_1, \ldots, s_k\}$.Se sigue que $S_1 \in F_n(S)$, $A \subset N(\epsilon, S_1)$ y $S_1 \subset N(\epsilon, A)$. Así, $\mathcal{H}(A, S_1) < \epsilon$. Por lo tanto, $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$.Entonces $\{x\} \in F_n(X)$.Por lo supuesto, existe $A \in F_n(S)$ tal que $\mathcal{H}(A, \{x\}) < \epsilon$.Así, $\{x\} \subset N(\epsilon, A)$.De donde, existe $a \in A$, tal que $d(x, a) < \epsilon$.Así, $a \in S \cap B(x, \epsilon)$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es denso en X.Veamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sean $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in F_n(X)$ y $\epsilon > 0$.Donde $k \leqslant n$.Como S es denso en X, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea $s_i \in S$ tal que $d(a_i, s_i) < \epsilon$.Definimos $S_1 = \{s_1, \ldots, s_k\}$.Se sigue que $S_1 \in F_n(S)$, $A \subset N(\epsilon, S_1)$ y $S_1 \subset N(\epsilon, A)$. Así, $\mathcal{H}(A, S_1) < \epsilon$. Por lo tanto, $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $F_n(S)$ es denso en $F_n(X)$.Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$.Entonces $\{x\} \in F_n(X)$.Por lo supuesto, existe $A \in F_n(S)$ tal que $\mathcal{H}(A, \{x\}) < \epsilon$.Así, $\{x\} \subset N(\epsilon, A)$.De donde, existe $a \in A$, tal que $d(x, a) < \epsilon$.Así, $a \in S \cap B(x, \epsilon)$.En consecuencia, S es denso en X.

Corolario

Sean (X, d) un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces X es separable si y sólo si $F_n(X)$ es separable.

CONTENIDO

1 Preliminares

2 Separabilidad en $F_n(X)$

3 Separabilidad en $\mathcal{F}(X)$

4 Separabilidad en $\mathcal{CB}(X)$

5 Algunas consecuencias

Teorema

Sean (X, d) un espacio métrico y $S \subset X$. Entonces S es denso en X si y sólo si $\mathcal{F}(S)$ es denso en $\mathcal{F}(X)$.

Teorema

Sean (X, d) un espacio métrico y $S \subset X$. Entonces S es denso en X si y sólo si $\mathcal{F}(S)$ es denso en $\mathcal{F}(X)$.

Teorema

Sean (X, d) un espacio métrico. Entonces X es separable si y sólo si $\mathcal{F}(X)$ es separable.

CONTENIDO

1. Preliminares
2. Separabilidad en $F_n(X)$
3. Separabilidad en $\mathcal{F}(X)$
4. Separabilidad en $\mathcal{CB}(X)$
5. Algunas consecuencias

¿X es separable si y sólo si $\mathcal{CB}(X)$ es separable?

Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico. Si $\mathcal{CB}(X)$ es separable, entonces X es separable.

Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico. Si $\mathcal{CB}(X)$ es separable, entonces X es separable.

¿Si X es separable entonces $\mathcal{CB}(X)$ es separable?

Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subset X$ tal que S es denso en X. Entonces $\mathcal{F}(S)$ es denso en $\mathcal{CB}(X)$ si y sólo si $\mathcal{CB}(X) = \mathcal{CTB}(X)$.

Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subset X$ tal que S es denso en X. Entonces $\mathcal{F}(S)$ es denso en $\mathcal{CB}(X)$ si y sólo si $\mathcal{CB}(X) = \mathcal{CTB}(X)$.

Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $\mathcal{F}(X)$ es denso en $\mathcal{CB}(X)$ si sólo si $\mathcal{CB}(X) = \mathcal{CTB}(X)$.

Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico. Si $\mathcal{CB}(X) = \mathcal{CTB}(X)$, entonces X es separable.

Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico. Si $\mathcal{CB}(X) = \mathcal{CTB}(X)$, entonces X es separable.

Teorema

Sean (X, d) un espacio métrico. Entonces $\mathcal{CB}(X)$ es separable si y sólo si $\mathcal{CB}(X) = \mathcal{CTB}(X)$.

CONTENIDO

1. Preliminares
2. Separabilidad en $F_n(X)$
3. Separabilidad en $\mathcal{F}(X)$
4. Separabilidad en $\mathcal{CB}(X)$
5. Algunas consecuencias

Observación

Dado un espacio métrico (X, d) tal que $\mathcal{CB}(X) = \mathcal{CTB}(X)$, los espacios $F_n(X)$, $C_n(X)$, $\mathcal{F}(X)$ y 2^X son separables.

Observación

Dado un espacio métrico (X, d) tal que $\mathcal{CB}(X) = \mathcal{CTB}(X)$, los espacios $F_n(X)$, $C_n(X)$, $\mathcal{F}(X)$ y 2^X son separables.

Teorema

Sean (X, d) un espacio métrico acotado. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

1. X es totalmente acotado
2. $\mathcal{CB}(X)$ es totalmente acotado
3. $\mathcal{CB}(X)$ es separable.

Teorema

Sea X un espacio normado de dimensión finita. Entonces el espacio $\mathcal{CB}(X)$ es separable.

Teorema

Sea X un espacio normado de dimensión finita. Entonces el espacio $\mathcal{CB}(X)$ es separable.

Teorema

Sea X un espacio normado de dimensión finita y conexo. Entonces los espacios 2^X y $\mathcal{CB}(X)$ son conexos.

Muchas Gracias!!!