

# Introducción a los continuos Whitney equivalentes

Vianey Córdova Salazar

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero.  
FCFM-BUAP

IX Taller Estudianti de la Teoria de los Continuos y sus  
Hiperespacios

20 de noviembre de 2014.



## Definición

Sea  $X$  un continuo. Una *función de Whitney* es una función continua  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  tal que

- para cada  $p \in X$ , tenemos que  $\mu(\{p\}) = 0$ ,

## Definición

Sea  $X$  un continuo. Una *función de Whitney* es una función continua  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  tal que

- para cada  $p \in X$ , tenemos que  $\mu(\{p\}) = 0$ ,
- para cada  $A, B \in C(X)$  con  $A \subsetneq B$  tenemos que  $\mu(A) < \mu(B)$ .

## Definición

Sea  $X$  un continuo. Una *función de Whitney* es una función continua  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  tal que

- para cada  $p \in X$ , tenemos que  $\mu(\{p\}) = 0$ ,
- para cada  $A, B \in C(X)$  con  $A \subsetneq B$  tenemos que  $\mu(A) < \mu(B)$ .

Las funciones de Whitney nos proporcionan una manera de medir a los hiperespacios

## Definición

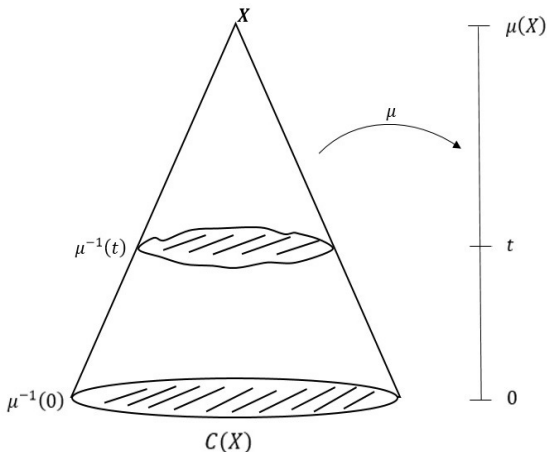
Sea  $X$  un continuo. Una *función de Whitney* es una función continua  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  tal que

- para cada  $p \in X$ , tenemos que  $\mu(\{p\}) = 0$ ,
- para cada  $A, B \in C(X)$  con  $A \subsetneq B$  tenemos que  $\mu(A) < \mu(B)$ .

Las funciones de Whitney nos proporcionan una manera de medir a los hiperespacios y constituyen una herramienta muy importante para estudiar la estructura de los hiperespacios.

## Definición

Un *nivel de Whitney positivo* para  $X$  es el conjunto de la forma  $\mu^{-1}(t)$ , donde  $\mu$  es una función de Whitney y  $t \in (0, \mu(X))$







## Teorema [1, Teorema 8.4]

Sean  $X$  un continuo y  $\mu$  una función de Whitney para  $C(X)$ . Si  $0 \leq t < \mu(X)$ , entonces  $\mu^{-1}(t)$  es no degenerado.

### Teorema [1, Teorema 8.4]

Sean  $X$  un continuo y  $\mu$  una función de Whitney para  $C(X)$ . Si  $0 \leq t < \mu(X)$ , entonces  $\mu^{-1}(t)$  es no degenerado.

### Teorema [3, Teorema 19.9]

Si  $X$  un continuo y  $\mu$  una función de Whitney para  $C(X)$ , entonces  $\mu^{-1}(t)$  es un continuo para cada  $t \in [0, \mu(X)]$ .

### Teorema [1, Teorema 8.4]

Sean  $X$  un continuo y  $\mu$  una función de Whitney para  $C(X)$ . Si  $0 \leq t < \mu(X)$ , entonces  $\mu^{-1}(t)$  es no degenerado.

### Teorema [3, Teorema 19.9]

Si  $X$  un continuo y  $\mu$  una función de Whitney para  $C(X)$ , entonces  $\mu^{-1}(t)$  es un continuo para cada  $t \in [0, \mu(X)]$ .

Los niveles de Whitney para  $C(X)$  juegan un importante rol en el estudio de  $C(X)$ . Para cada función de Whitney fija  $\mu$  los niveles de Whitney correspondientes a  $\mu$  constituyen una descomposición continua de  $C(X)$ .



## Teorema [1, Teorema 8.1]

Si  $X$  es un continuo,  $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$  es una función de Whitney y  $0 \leq t < \mu(X)$ , entonces  $\bigcup\{A: A \in \mu^{-1}(t)\} = X$ .

## Teorema [1, Teorema 8.1]

Si  $X$  es un continuo,  $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$  es una función de Whitney y  $0 \leq t < \mu(X)$ , entonces  $\bigcup\{A: A \in \mu^{-1}(t)\} = X$ .

*Demostración.*

## Teorema [1, Teorema 8.1]

Si  $X$  es un continuo,  $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$  es una función de Whitney y  $0 \leq t < \mu(X)$ , entonces  $\bigcup\{A: A \in \mu^{-1}(t)\} = X$ .

*Demostración.* Por definición, la unión de los elementos de  $\mu^{-1}(t)$  está contenida en  $X$ , resta ver que todo elemento de  $X$  pertenece a un elemento de  $\mu^{-1}(t)$ .

## Teorema [1, Teorema 8.1]

Si  $X$  es un continuo,  $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$  es una función de Whitney y  $0 \leq t < \mu(X)$ , entonces  $\bigcup\{A: A \in \mu^{-1}(t)\} = X$ .

*Demostración.* Por definición, la unión de los elementos de  $\mu^{-1}(t)$  está contenida en  $X$ , resta ver que todo elemento de  $X$  pertenece a un elemento de  $\mu^{-1}(t)$ . Sea  $p \in X$ . Veamos que existe  $A \in \mu^{-1}(t)$  tal que  $p \in A$ .



## Teorema [1, Teorema 8.1]

Si  $X$  es un continuo,  $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$  es una función de Whitney y  $0 \leq t < \mu(X)$ , entonces  $\bigcup\{A: A \in \mu^{-1}(t)\} = X$ .

*Demostración.* Por definición, la unión de los elementos de  $\mu^{-1}(t)$  está contenida en  $X$ , resta ver que todo elemento de  $X$  pertenece a un elemento de  $\mu^{-1}(t)$ . Sea  $p \in X$ . Veamos que existe  $A \in \mu^{-1}(t)$  tal que  $p \in A$ .

## Teorema [1, Teorema 8.1]

Si  $X$  es un continuo,  $A, B \in C(X)$  con  $A \subsetneq B$ , entonces existe un arco ordenado de  $A$  a  $B$  contenido en  $C(X)$ .

## Teorema [1, Teorema 8.1]

Si  $X$  es un continuo,  $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$  es una función de Whitney y  $0 \leq t < \mu(X)$ , entonces  $\bigcup\{A: A \in \mu^{-1}(t)\} = X$ .

*Demostración.* Por definición, la unión de los elementos de  $\mu^{-1}(t)$  está contenida en  $X$ , resta ver que todo elemento de  $X$  pertenece a un elemento de  $\mu^{-1}(t)$ . Sea  $p \in X$ . Veamos que existe  $A \in \mu^{-1}(t)$  tal que  $p \in A$ .

## Teorema [1, Teorema 8.1]

Si  $X$  es un continuo,  $A, B \in C(X)$  con  $A \subsetneq B$ , entonces existe un arco ordenado de  $A$  a  $B$  contenido en  $C(X)$ .

Así, existe un arco ordenado  $\alpha: [0, 1] \rightarrow C(X)$  de  $\{p\}$  a  $X$ , contenido en  $C(X)$ .



La función

$$\varphi = \mu \circ \alpha: [0, 1] \rightarrow [0, \mu(X)]$$

es continua;

La función

$$\varphi = \mu \circ \alpha: [0, 1] \rightarrow [0, \mu(X)]$$

es continua;

$$\varphi(0) = \mu(\alpha(0)) = \mu(\{p\}) = 0 \text{ y } \varphi(1) = \mu(\alpha(1)) = \mu(X).$$

La función

$$\varphi = \mu \circ \alpha: [0, 1] \rightarrow [0, \mu(X)]$$

es continua;

$$\varphi(0) = \mu(\alpha(0)) = \mu(\{p\}) = 0 \text{ y } \varphi(1) = \mu(\alpha(1)) = \mu(X).$$

Así, existe  $s \in [0, 1]$  tal que  $t = \varphi(s) = \mu(\alpha(s))$ .

La función

$$\varphi = \mu \circ \alpha: [0, 1] \rightarrow [0, \mu(X)]$$

es continua;

$$\varphi(0) = \mu(\alpha(0)) = \mu(\{p\}) = 0 \text{ y } \varphi(1) = \mu(\alpha(1)) = \mu(X).$$

Así, existe  $s \in [0, 1]$  tal que  $t = \varphi(s) = \mu(\alpha(s))$ . Así,  
 $\alpha(s) \in \mu^{-1}(t)$ .

La función

$$\varphi = \mu \circ \alpha: [0, 1] \rightarrow [0, \mu(X)]$$

es continua;

$$\varphi(0) = \mu(\alpha(0)) = \mu(\{p\}) = 0 \text{ y } \varphi(1) = \mu(\alpha(1)) = \mu(X).$$

Así, existe  $s \in [0, 1]$  tal que  $t = \varphi(s) = \mu(\alpha(s))$ . Así,  $\alpha(s) \in \mu^{-1}(t)$ . Como  $\alpha$  es un arco ordenado,  $\{p\} \subset \alpha(s)$ . Así,  $p \in \bigcup\{A: A \in \mu^{-1}(t)\}$ .



La función

$$\varphi = \mu \circ \alpha: [0, 1] \rightarrow [0, \mu(X)]$$

es continua;

$$\varphi(0) = \mu(\alpha(0)) = \mu(\{p\}) = 0 \text{ y } \varphi(1) = \mu(\alpha(1)) = \mu(X).$$

Así, existe  $s \in [0, 1]$  tal que  $t = \varphi(s) = \mu(\alpha(s))$ . Así,  $\alpha(s) \in \mu^{-1}(t)$ . Como  $\alpha$  es un arco ordenado,  $\{p\} \subset \alpha(s)$ . Así,  $p \in \bigcup\{A: A \in \mu^{-1}(t)\}$ . Por lo tanto,  $\bigcup\{A: A \in \mu^{-1}(t)\} = X$ .

## Definición

Sea  $X$  un continuo,  $\mathfrak{NL}(X) = \{\mathcal{A} \in C(C(X)) : \mathcal{A} \text{ es un nivel de Whitney positivo para } X\}$ .

## Definición

Sea  $X$  un continuo,  $\mathfrak{NL}(X) = \{\mathcal{A} \in C(C(X)) : \mathcal{A} \text{ es un nivel de Whitney positivo para } X\}$ .

El conjunto  $\mathfrak{NL}(X)$  incluye todos los niveles de Whitney positivos para todas las funciones de Whitney.



## Definición

Un continuo  $X$  es *Whitney equivalente* a un continuo  $Y$ , si  $\mathfrak{ML}(X)$  es topológicamente igual a  $\mathfrak{ML}(Y)$

## Definición

Un continuo  $X$  es *Whitney equivalente* a un continuo  $Y$ , si  $\mathfrak{ML}(X)$  es topológicamente igual a  $\mathfrak{ML}(Y)$

Donde *topológicamente igual*, significa que para cada  $\mathcal{A} \in \mathfrak{ML}(X)$ , existe  $\mathcal{B} \in \mathfrak{ML}(Y)$  tal que  $\mathcal{A}$  es homeomorfo a  $\mathcal{B}$  y para cada  $\mathcal{B} \in \mathfrak{ML}(Y)$ , existe  $\mathcal{A} \in \mathfrak{ML}(X)$  tal que  $\mathcal{B}$  es homeomorfo a  $\mathcal{A}$ .

## Definición

Un continuo  $X$  es *determinado por sus niveles de Whitney*, si el continuo  $Y$  es Whitney equivalente a  $X$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

## Definición

Un continuo  $X$  es *determinado por sus niveles de Whitney*, si el continuo  $Y$  es Whitney equivalente a  $X$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

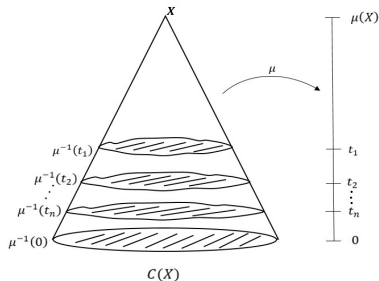
## Definición

Una propiedad topológica  $P$  es una *propiedad de Whitney* si un continuo  $X$  tiene la propiedad  $P$ , entonces  $\mu^{-1}(t)$  también tiene la propiedad  $P$  para cada función de Whitney  $\mu$  para  $C(X)$  y para cada  $0 \leq t < \mu(X)$



## Definición

Una propiedad topológica  $P$  es una *propiedad secuencial fuerte Whitney-reversible* si para cualquier continuo  $X$  tal que existe una función de Whitney  $\mu$  para  $C(X)$  y una sucesión  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $(0, \mu(X))$  tal que  $\lim t_n = 0$  y  $\mu^{-1}(t_n)$  tiene la propiedad  $P$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces el continuo  $X$  tiene la propiedad  $P$ .





## Teorema [3, Teorema 31.1]

Si  $X$  es un arco,  $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$  es una función de Whitney y  $0 \leq t < \mu(X)$ , entonces  $\mu^{-1}(t)$  es un arco.

## Teorema [3, Teorema 31.1]

Si  $X$  es un arco,  $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$  es una función de Whitney y  $0 \leq t < \mu(X)$ , entonces  $\mu^{-1}(t)$  es un arco.

## Teorema [1, Teorema 8.6]

Si  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$  es la circunferencia unitaria,  $\mu: C(S^1) \rightarrow [0, 1]$  es una función de Whitney y  $0 \leq t < \mu(S^1)$ , entonces  $\mu^{-1}(t)$  es homeomorfo a  $S^1$ .

## Teorema [3, Teorema 31.1]

Si  $X$  es un arco,  $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$  es una función de Whitney y  $0 \leq t < \mu(X)$ , entonces  $\mu^{-1}(t)$  es un arco.

## Teorema [1, Teorema 8.6]

Si  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  es la circunferencia unitaria,  $\mu: C(S^1) \rightarrow [0, 1]$  es una función de Whitney y  $0 \leq t < \mu(S^1)$ , entonces  $\mu^{-1}(t)$  es homeomorfo a  $S^1$ .

## Teorema [2, Teorema 14.7]

Si  $X$  es una curva cerrada simple,  $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$  es una función de Whitney y  $0 \leq t < \mu(X)$ , entonces  $\mu^{-1}(t)$  es homeomorfo a  $X$ .

## Teorema

La propiedad de ser un

- arco

## Teorema

La propiedad de ser un

- arco
- ciclo

## Teorema

La propiedad de ser un

- arco
- ciclo
- continuo localmente conexo



## Teorema

La propiedad de ser un

- arco
- ciclo
- continuo localmente conexo
- pseudo-arco

## Teorema

La propiedad de ser un

- arco
- ciclo
- continuo localmente conexo
- pseudo-arco
- Pseudo-solenoide

## Teorema

La propiedad de ser un

- arco
- ciclo
- continuo localmente conexo
- pseudo-arco
- Pseudo-solenoide

es una propiedad de Whitney,

## Teorema

La propiedad de ser un

- arco
- ciclo
- continuo localmente conexo
- pseudo-arco
- Pseudo-solenoide

es una propiedad de Whitney, y es una propiedad secuencial fuerte Whitney-reversible.

Teoremas 31.1, 31.2, 38.1, 38.2, 56.1, 56.2, 57.2 y 57.3 de [3]

Por el teorema anteriores, concluimos que

- arco

Por el teorema anteriores, concluimos que

- arco
- ciclo

Por el teorema anteriores, concluimos que

- arco
- ciclo
- continuo localmente conexo

Por el teorema anteriores, concluimos que

- arco
- ciclo
- continuo localmente conexo
- pseudo-arco



Por el teorema anteriores, concluimos que

- arco
- ciclo
- continuo localmente conexo
- pseudo-arco
- Pseudo-solenoide

Por el teorema anteriores, concluimos que

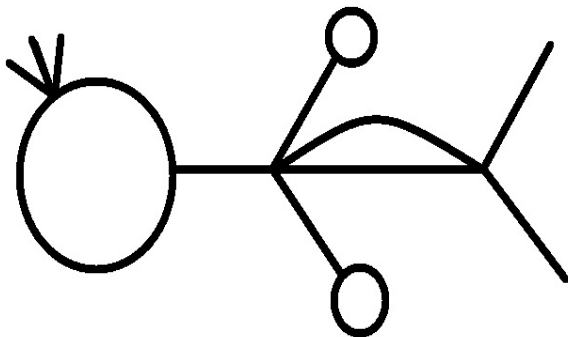
- arco
- ciclo
- continuo localmente conexo
- pseudo-arco
- Pseudo-solenoide

son determinados por sus niveles de Whitney.



## Definición

Una *gráfica finita* es un continuo  $X$ , diferente de una curva cerrada simple, que se puede escribir como una unión finita de arcos de manera que cada dos de ellos se intersecta en un conjunto finito.



## Teorema

Si  $X$  es una gráfica finita y  $Y$  es un continuo tal que  $Y$  es Whitney equivalente a  $X$ , entonces  $Y$  es una gráfica finita.

## Teorema

Si  $X$  es una gráfica finita y  $Y$  es un continuo tal que  $Y$  es Whitney equivalente a  $X$ , entonces  $Y$  es una gráfica finita.

*Demostración.*

## Teorema

Si  $X$  es una gráfica finita y  $Y$  es un continuo tal que  $Y$  es Whitney equivalente a  $X$ , entonces  $Y$  es una gráfica finita.

*Demostración.* Sea  $X$  una gráfica finita,

## Teorema

Si  $X$  es una gráfica finita y  $Y$  es un continuo tal que  $Y$  es Whitney equivalente a  $X$ , entonces  $Y$  es una gráfica finita.

*Demostración.* Sea  $X$  una gráfica finita, así  $X$  es un continuo localmente conexo,



## Teorema

Si  $X$  es una gráfica finita y  $Y$  es un continuo tal que  $Y$  es Whitney equivalente a  $X$ , entonces  $Y$  es una gráfica finita.

*Demostración.* Sea  $X$  una gráfica finita, así  $X$  es un continuo localmente conexo, tenemos que cada nivel de Whitney positivo para  $X$  es localmente conexo.

## Teorema

Si  $X$  es una gráfica finita y  $Y$  es un continuo tal que  $Y$  es Whitney equivalente a  $X$ , entonces  $Y$  es una gráfica finita.

*Demostración.* Sea  $X$  una gráfica finita, así  $X$  es un continuo localmente conexo, tenemos que cada nivel de Whitney positivo para  $X$  es localmente conexo. Como  $X$  y  $Y$  son Whitney equivalentes, tenemos que los niveles de Whitney positivos para  $Y$  son localmente conexos.

## Teorema

Si  $X$  es una gráfica finita y  $Y$  es un continuo tal que  $Y$  es Whitney equivalente a  $X$ , entonces  $Y$  es una gráfica finita.

*Demostración.* Sea  $X$  una gráfica finita, así  $X$  es un continuo localmente conexo, tenemos que cada nivel de Whitney positivo para  $X$  es localmente conexo. Como  $X$  y  $Y$  son Whitney equivalentes, tenemos que los niveles de Whitney positivos para  $Y$  son localmente conexos. Por lo tanto,  $Y$  es localmente conexo.



Si  $Y$  no es una gráfica finita,

Si  $Y$  no es una gráfica finita, entonces  $Y$  es una curva cerrada simple

Si  $Y$  no es una gráfica finita, entonces  $Y$  es una curva cerrada simple o existe un subespacio  $Q$  de  $C(Y)$  tal que  $Q$  es homeomorfo al cubo de Hilbert  $[0, 1]^\omega$ .

Si  $Y$  no es una gráfica finita, entonces  $Y$  es una curva cerrada simple o existe un subespacio  $Q$  de  $C(Y)$  tal que  $Q$  es homeomorfo al cubo de Hilbert  $[0, 1]^\omega$ .

Teorema [2, Teorema 1.111]

Sea  $X$  un continuo localmente conexo. Entonces  $C(X)$  contiene un cubo de Hilbert si y sólo si  $X$  no es una gráfica finita



Dado que  $X$  no es una curva cerrada simple,

Dado que  $X$  no es una curva cerrada simple, implicamos que  $Y$  no es una curva cerrada simple.

Dado que  $X$  no es una curva cerrada simple, implicamos que  $Y$  no es una curva cerrada simple.

Teorema [1, Teorema 6.19]

Si  $X$  es un continuo no degenerado y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $C_n(X)$  contiene  $n$ -celdas.

Dado que  $X$  no es una curva cerrada simple, implicamos que  $Y$  no es una curva cerrada simple.

Teorema [1, Teorema 6.19]

Si  $X$  es un continuo no degenerado y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $C_n(X)$  contiene  $n$ -celdas.

Teorema [3, Teorema 70.1]

Sea  $X$  un continuo. Entonces  $C(X)$  contiene  $n$ -celdas si y sólo si  $X$  contine  $n$ -odos.

Dado que  $X$  no es una curva cerrada simple, implicamos que  $Y$  no es una curva cerrada simple.

Teorema [1, Teorema 6.19]

Si  $X$  es un continuo no degenerado y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $C_n(X)$  contiene  $n$ -celdas.

Teorema [3, Teorema 70.1]

Sea  $X$  un continuo. Entonces  $C(X)$  contiene  $n$ -celdas si y sólo si  $X$  contine  $n$ -odos.

Así, para cada  $n \geq 3$ , el continuo  $Y$  contiene un  $n$ -odo.

Así, para cada  $n \geq 3$ , el continuo  $Y$  contiene un  $n$ -odo.

### Teorema [2, Teorema 14.33]

Si el continuo  $X$  contiene un  $n$ -odo, entonces existe  $t_0 \in (0, \mu(X))$  tal que  $\mu^{-1}(t_0)$  contiene una  $(n - 1)$ -celda.

Así, para cada  $n \geq 3$ , el continuo  $Y$  contiene un  $n$ -odo.

### Teorema [2, Teorema 14.33]

Si el continuo  $X$  contiene un  $n$ -odo, entonces existe  $t_0 \in (0, \mu(X))$  tal que  $\mu^{-1}(t_0)$  contiene una  $(n - 1)$ -celda.

Así, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{B}$  para  $Y$  tal que  $\mathcal{B}$  contiene una  $n$ -celda.

Así, para cada  $n \geq 3$ , el continuo  $Y$  contiene un  $n$ -odo.

### Teorema [2, Teorema 14.33]

Si el continuo  $X$  contiene un  $n$ -odo, entonces existe  $t_0 \in (0, \mu(X))$  tal que  $\mu^{-1}(t_0)$  contiene una  $(n - 1)$ -celda.

Así, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{B}$  para  $Y$  tal que  $\mathcal{B}$  contiene una  $n$ -celda. Como  $X$  y  $Y$  son Whitney equivalentes, para cada  $n \geq 2$ ,



Así, para cada  $n \geq 3$ , el continuo  $Y$  contiene un  $n$ -odo.

### Teorema [2, Teorema 14.33]

Si el continuo  $X$  contiene un  $n$ -odo, entonces existe  $t_0 \in (0, \mu(X))$  tal que  $\mu^{-1}(t_0)$  contiene una  $(n - 1)$ -celda.

Así, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{B}$  para  $Y$  tal que  $\mathcal{B}$  contiene una  $n$ -celda. Como  $X$  y  $Y$  son Whitney equivalentes, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{A}$  para  $X$  tal que  $\mathcal{A}$  contiene una  $n$ -celda.

Así, para cada  $n \geq 3$ , el continuo  $Y$  contiene un  $n$ -odo.

### Teorema [2, Teorema 14.33]

Si el continuo  $X$  contiene un  $n$ -odo, entonces existe  $t_0 \in (0, \mu(X))$  tal que  $\mu^{-1}(t_0)$  contiene una  $(n - 1)$ -celda.

Así, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{B}$  para  $Y$  tal que  $\mathcal{B}$  contiene una  $n$ -celda. Como  $X$  y  $Y$  son Whitney equivalentes, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{A}$  para  $X$  tal que  $\mathcal{A}$  contiene una  $n$ -celda. Por lo tanto, la dimensión de  $C(X)$  es infinita.

Así, para cada  $n \geq 3$ , el continuo  $Y$  contiene un  $n$ -odo.

### Teorema [2, Teorema 14.33]

Si el continuo  $X$  contiene un  $n$ -odo, entonces existe  $t_0 \in (0, \mu(X))$  tal que  $\mu^{-1}(t_0)$  contiene una  $(n - 1)$ -celda.

Así, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{B}$  para  $Y$  tal que  $\mathcal{B}$  contiene una  $n$ -celda. Como  $X$  y  $Y$  son Whitney equivalentes, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{A}$  para  $X$  tal que  $\mathcal{A}$  contiene una  $n$ -celda. Por lo tanto, la dimensión de  $C(X)$  es infinita.

### Teorema [2, Teorema 1.109]

Si  $X$  es un continuo localmente conexo. Entonces  $\dim[C(X)] < \infty$  si y sólo si  $X$  es una gráfica finita.

## Teorema [2, Teorema 14.33]

Si el continuo  $X$  contiene un  $n$ -odo, entonces existe  $t_0 \in (0, \mu(X))$  tal que  $\mu^{-1}(t_0)$  contiene una  $(n - 1)$ -celda.

Así, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{B}$  para  $Y$  tal que  $\mathcal{B}$  contiene una  $n$ -celda. Como  $X$  y  $Y$  son Whitney equivalentes, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{A}$  para  $X$  tal que  $\mathcal{A}$  contiene una  $n$ -celda. Por lo tanto, la dimensión de  $C(X)$  es infinita.

## Teorema [2, Teorema 1.109]

Si  $X$  es continuo localmente conexo. Entonces  $\dim[C(X)] < \infty$  si y sólo si  $X$  es una gráfica finita.

## Teorema [2, Teorema 14.33]

Si el continuo  $X$  contiene un  $n$ -odo, entonces existe  $t_0 \in (0, \mu(X))$  tal que  $\mu^{-1}(t_0)$  contiene una  $(n - 1)$ -celda.

Así, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{B}$  para  $Y$  tal que  $\mathcal{B}$  contiene una  $n$ -celda. Como  $X$  y  $Y$  son Whitney equivalentes, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{A}$  para  $X$  tal que  $\mathcal{A}$  contiene una  $n$ -celda. Por lo tanto, la dimensión de  $C(X)$  es infinita.

## Teorema [2, Teorema 1.109]

Si  $X$  es continuo localmente conexo. Entonces  $\dim[C(X)] < \infty$  si y sólo si  $X$  es una gráfica finita.

Lo cual es una contradicción.

## Teorema [2, Teorema 14.33]

Si el continuo  $X$  contiene un  $n$ -odo, entonces existe  $t_0 \in (0, \mu(X))$  tal que  $\mu^{-1}(t_0)$  contiene una  $(n - 1)$ -celda.

Así, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{B}$  para  $Y$  tal que  $\mathcal{B}$  contiene una  $n$ -celda. Como  $X$  y  $Y$  son Whitney equivalentes, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel de Whitney positivo  $\mathcal{A}$  para  $X$  tal que  $\mathcal{A}$  contiene una  $n$ -celda. Por lo tanto, la dimensión de  $C(X)$  es infinita.

## Teorema [2, Teorema 1.109]

Si  $X$  es continuo localmente conexo. Entonces  $\dim[C(X)] < \infty$  si y sólo si  $X$  es una gráfica finita.

Lo cual es una contradicción. En conclusión,  $Y$  es una gráfica finita.

## Teorema [2, Teorema 2.5]

Si  $X$  es una gráfica finita, entonces  $X$  es determinado por sus niveles de Whitney.

### Teorema [2, Teorema 2.5]

Si  $X$  es una gráfica finita, entonces  $X$  es determinado por sus niveles de Whitney.

### Teorema [2, Teorema 3.2]

La propiedad de ser una compactación del rayo es una propiedad secencial fuerte Whitney-reversible.



### Teorema [2, Teorema 2.5]

Si  $X$  es una gráfica finita, entonces  $X$  es determinado por sus niveles de Whitney.

### Teorema [2, Teorema 3.2]

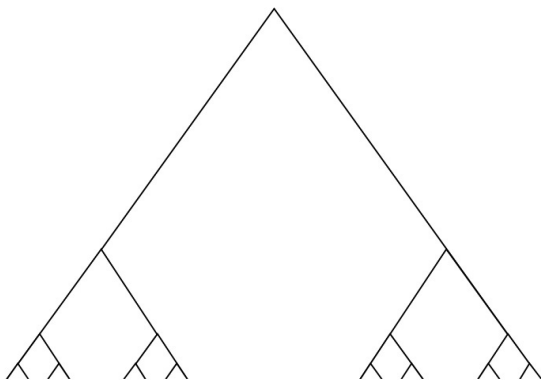
La propiedad de ser una compactación del rayo es una propiedad secencial fuerte Whitney-reversible.

### Teorema [2, Corolario 3.6]

El continuo  $sen(\frac{1}{x})$  es Whitney determinado.

## Definición

Una *Dendrita* es un continuo localmente conexo que no tiene curvas cerradas simples.





En general, las dendritas no son Whitney determinadas.

En general, las dendritas no son Whitney determinadas.

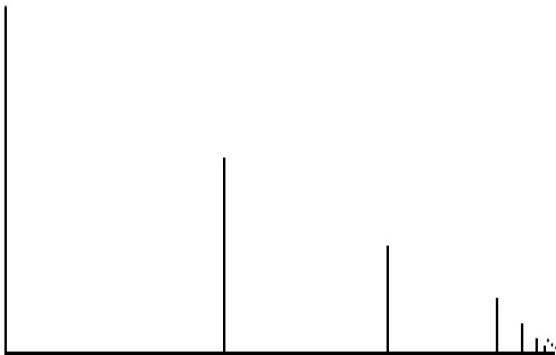
### Teorema [2, Teorema 5.2]

Sea  $X$  un continuo. El continuo  $X$  es una dendrita sin arcos libres si y sólo si cada nivel de Whitney positivo para  $X$  es un cubo de Hilbert.



## Teorema [2, Pregunta 5.1]




¿Las dendritas con el conjunto de puntos extremos cerrado, son Whitney determinadas?





GRACIAS



# Bibliografía

-  A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie de textos N. 28, Sociedad Matemática Mexicana ISBN:968-36-3594-6, 2004.
-  A. Illanes and R. Leonel, *Whitney Equivalent Continua*, *Topology Proc.*, 39 (2012), 293-315.
-  A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y. 1999.

-  Sergio Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, vol. 275, Chapman and Hall/CRC, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.
-  Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-6768-3, 1978.