Sobre la unicidad del *n*-ésimo producto simétrico

Luis Alberto Guerrero Méndez

Coautores:
David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

IX Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios
Querétaro, México
18 de noviembre del 2014

Sobre la unicidad del n-ésimo producto simétrico

Luis Alberto Guerrero Méndez

Coautores:
David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

IX Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios
Querétaro, México
18 de noviembre del 2014

Definición

Dado $n \in \mathbb{N}$, decimos que un continuo X tiene **hiperespacio único** $F_n(X)$ si la implicación siguiente es verdadera: si Y es un continuo tal que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.

Definición

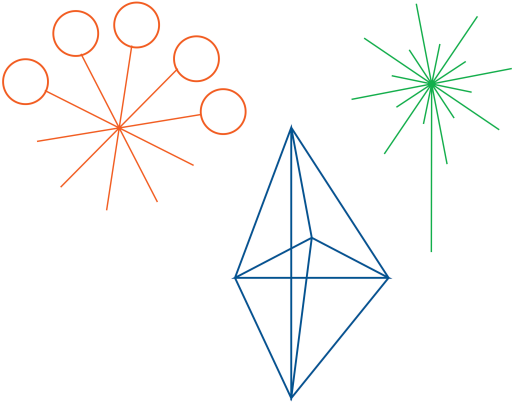
Dado $n \in \mathbb{N}$, decimos que un continuo X tiene **hiperespacio único** $F_n(X)$ si la implicación siguiente es verdadera: si Y es un continuo tal que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.

Problema

¿Que condiciones necesita tener un continuo para que se garantice la unicidad del hiperespacio $F_n(X)$?

Definición

Una **gráfica finita** es un continuo que se puede escribir como una unión finita de arcos tales que cualesquiera dos, o son ajenos o se intersectan solamente en uno o en ambos puntos extremos.

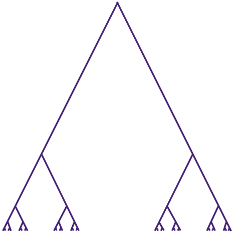


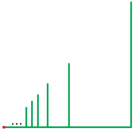
Teorema (Enrique Castañeda, Alejandro Illanes, 2006)

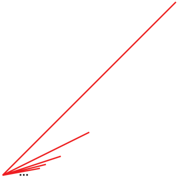
Sean X una gráfica finita, Y un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.

Definición

Una **dendrita** es un continuo localmente conexo sin curvas cerradas simples.







Sean

$$\mathfrak{G} = \{X\colon X \text{ es una gráfica finita}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{D} = \{X\colon X \text{ es una dendrita cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado en } X\}.$$

Sean

$$\mathfrak{G} = \{X\colon X \text{ es una gráfica finita}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{D} = \{X\colon X \text{ es una dendrita cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado en } X\}.$$

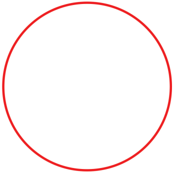
Se cumple que $\mathfrak{G} \not\subset \mathcal{D}$ y $\mathcal{D} \not\subset \mathfrak{G}$.

Sean

$$\mathfrak{G} = \{X \colon X \text{ es una gráfica finita}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{D} = \{X \colon X \text{ es una dendrita cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado en } X\}.$$

Se cumple que $\mathfrak{G} \not\subset \mathcal{D}$ y $\mathcal{D} \not\subset \mathfrak{G}$.

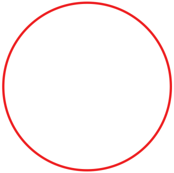


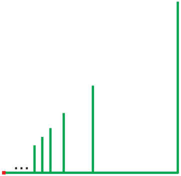
Sean

$$\mathfrak{G} = \{X\colon X \text{ es una gráfica finita}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{D} = \{X : X \text{ es una dendrita cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado en } X\}.$$

Se cumple que $\mathfrak{G} \not\subset \mathcal{D}$ y $\mathcal{D} \not\subset \mathfrak{G}$.





Teorema (Acosta, Hernández Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2009)

Sean $X \in \mathcal{D}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si Y es un continuo tal que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces $Y \in \mathcal{D}$.

Teorema (Acosta, Hernández Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2009)

Sean $X \in \mathcal{D}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si Y es un continuo tal que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces $Y \in \mathcal{D}$.

Teorema (Herrera-Carrasco, Macías-Romero, López-Toriz, 2009)

Sean $X, Y \in \mathcal{D}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.

Teorema (Acosta, Hernández Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2009)

Sean $X \in \mathcal{D}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si Y es un continuo tal que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces $Y \in \mathcal{D}$.

Teorema (Herrera-Carrasco, Macías-Romero, López-Toriz, 2009)

Sean $X, Y \in \mathcal{D}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.

Teorema (Herrera-Carrasco, Macías-Romero, López-Toriz, 2009)

Si $X \in \mathcal{D}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Dado un continuo X, sea

$$\mathcal{G}(X) = \{x \in X \colon x \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X$$

$$\text{tal que } G \text{ es una gráfica finita}\}$$

y sea

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

Dado un continuo X, sea

$$\mathcal{G}(X) = \{x \in X \colon x \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X$$

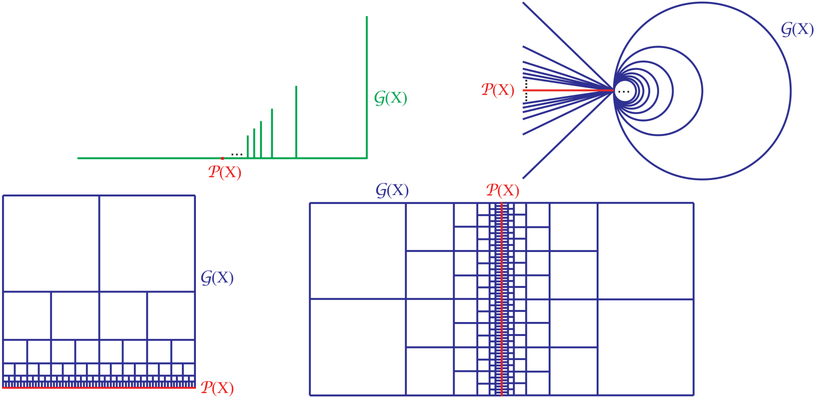
$$\text{tal que } G \text{ es una gráfica finita}\}$$

y sea

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

Definición

Un continuo X es **casi enrejado** si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X. Un continuo casi enrejado X es **enrejado** si X tiene una base de vecindades $\mathfrak{B}$ tal que para todo $U \in \mathfrak{B}$ se cumple que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.



$\mathcal{G}(X)$
$\mathcal{P}(X)$
$\mathcal{G}(X)$
$\mathcal{P}(X)$
$\mathcal{G}(X)$
$\mathcal{P}(X)$
$\mathcal{G}(X)$
$\mathcal{P}(X)$

Teorema (Illanes, Hernández-Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2013)

La clase de los continuos enrejados contiene a las clases siguientes

(i) La clase $\mathfrak{G}$.

(ii) La clase $\mathcal{D}$.

Teorema (Illanes, Hernández-Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2013)

Si X es un continuo enrejado, entonces X es localmente conexo.

Sean

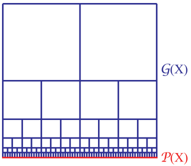
$$\mathcal{M} = \{X\colon X \text{ es un continuo enrejado}\},$$

$$\mathcal{AM} = \{X\colon X \text{ es continuo casi enrejado}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{LC} = \{X\colon X \text{ es un continuo localmente conexo}\}.$$

Notemos que

$$\mathfrak{G}, \mathcal{D} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{AM} \cap \mathcal{LC} \subsetneq \mathcal{AM}.$$



Sean

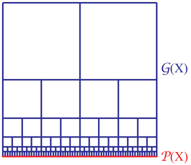
$$\mathcal{M} = \{X\colon X \text{ es un continuo enrejado}\},$$

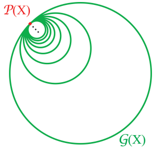
$$\mathcal{AM} = \{X : X \text{ es continuo casi enrejado}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{LC} = \{X\colon X \text{ es un continuo localmente conexo}\}.$$

Notemos que

$$\mathfrak{G}, \mathcal{D} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{AM} \cap \mathcal{LC} \subsetneq \mathcal{AM}.$$





Sean

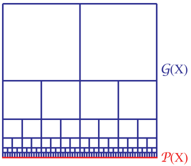
$$\mathcal{M} = \{X \colon X \text{ es un continuo enrejado}\},$$

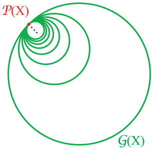
$$\mathcal{AM} = \{X \colon X \text{ es continuo casi enrejado}\} \text{ y}$$

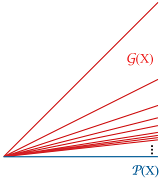
$$\mathcal{LC} = \{X \colon X \text{ es un continuo localmente conexo}\}.$$

Notemos que

$$\mathfrak{G}, \mathcal{D} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{AM} \cap \mathcal{LC} \subsetneq \mathcal{AM}.$$







Teorema (Herrera-Carrasco, Macías-Romero, Vázquez-Juárez, 2012)

Si $X \in \mathcal{AM} \cap \mathcal{LC}$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Definición

Un **alambre** en un continuo X es un un subconjunto A de X tal que A es una componente de un conjunto abierto en X y A es homeomorfo a alguno de los espacios $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]$ o S^1.

Definición

Un **alambre** en un continuo X es un un subconjunto A de X tal que A es una componente de un conjunto abierto en X y A es homeomorfo a alguno de los espacios $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]$ o S^1.

Dado un continuo X, sea

$$W(X) = \bigcup\{A \subset X \colon A \text{ es un alambre en } X\}.$$

Definición

Un **alambre** en un continuo X es un un subconjunto A de X tal que A es una componente de un conjunto abierto en X y A es homeomorfo a alguno de los espacios $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]$ o S^1.

Dado un continuo X, sea

$$W(X) = \bigcup\{A \subset X \colon A \text{ es un alambre en } X\}.$$

Definición

Un continuo X es **alambrado** si el conjunto $W(X)$ es denso en X.

Teorema (Hernández-Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2013)

Si X es un continuo alambrado y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Teorema (Hernández-Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2013)

Si X es un continuo alambrado y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Sea $\mathcal{W} = \{X \colon X \text{ es continuo alambrado}\}$.

Teorema (Hernández-Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2013)

Si X es un continuo alambrado y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Sea $\mathcal{W} = \{X\colon X \text{ es continuo alambrado}\}$.

Se cumple que $\mathcal{AM} \subset \mathcal{W}$. Luego, $\mathcal{AM} \cap \mathcal{LC} \subset \mathcal{W}$

Teorema (Hernández-Gutiérrez, Martínez de la Vega, 2013)

Si X es un continuo alambrado y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Sea $\mathcal{W} = \{X \colon X \text{ es continuo alambrado}\}$.

Se cumple que $\mathcal{AM} \subset \mathcal{W}$. Luego, $\mathcal{AM} \cap \mathcal{LC} \subset \mathcal{W}$

Ejemplo

Un solenoide es un ejemplo de un continuo alambrado que no es localmente conexo.

Así, $\mathcal{AM} \cap \mathcal{LC} \subsetneq \mathcal{W}$.

Otras clases de continuos que están contenidas en $\mathcal{W}$ son

(a) La clase de las compactaciones del rayo $[0, \infty)$.

(b) La clase de las compactaciones de la recta real.

(c) La clase de los continuos indescomponibles tales que sus subcontinuos propios son arcos.

(d) La clase de los abanicos suaves.

Por lo tanto, los continuos que pertenecen a las clases de los incisos (a)-(d) tienen n-ésimo producto simétrico único cuando $n \geq 4$.

Teorema (Illanes, Martínez-Montejano, 2009)

Si X es una compactación del rayo $[0, \infty)$ y $n \in \mathbb{N} - \{3\}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Teorema (Illanes, Martínez-Montejano, 2009)

Si X es una compactación del rayo $[0, \infty)$ tal que su residuo es ANR, entonces X tiene hiperespacio único $F_3(X)$.

Teorema (Guerrero-Méndez, Herrera-Carrasco, López-Toriz, Macías-Romero)

Si X es un continuo enrejado y $n \in \{2,3\}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Teorema (Guerrero-Méndez, Herrera-Carrasco, López-Toriz, Macías-Romero)

Si X es un continuo enrejado y $n \in \{2, 3\}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Corolario (Guerrero-Méndez, Herrera-Carrasco, López-Toriz, Macías-Romero)

Si X es un continuo enrejado y $n \in \mathbb{N}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Teorema (Guerrero-Méndez, Herrera-Carrasco, López-Toriz, Macías-Romero)

Si X es un continuo enrejado y $n \in \{2, 3\}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

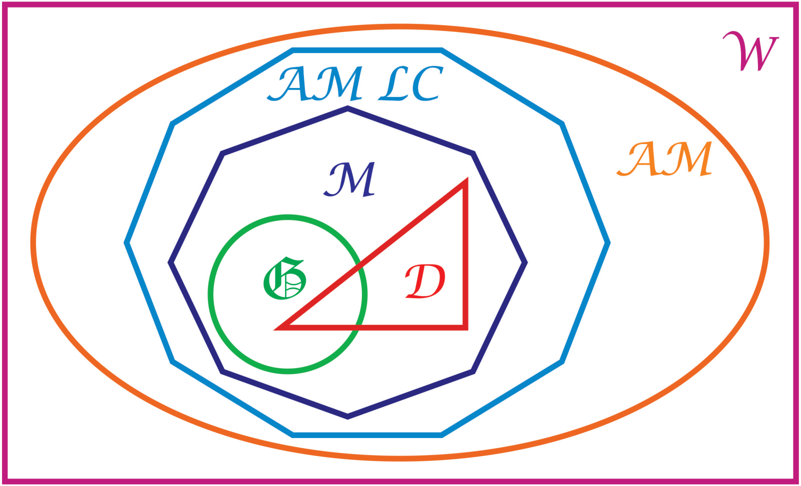
Corolario (Guerrero-Méndez, Herrera-Carrasco, López-Toriz, Macías-Romero)

Si X es un continuo enrejado y $n \in \mathbb{N}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Pregunta

Si X es un continuo alambrado y $n \in \{2, 3\}$, ¿tiene X hiperespacio único $F_n(X)$?

En resumen tenemos que



Pregunta

Si X es un continuo indescomponible tal que todos sus subcontinuos propios son arcos, ¿tiene X hiperespacio único $F_2(X)$?

Pregunta

Si X es una dendrita y $n \in \mathbb{N}$, ¿tiene X hiperespacio único $F_n(X)$?

Pregunta

Si X es cualquier compactación del rayo $[0, \infty)$, ¿tiene X hiperespacio único $F_3(X)$?

Pregunta

Si X es un continuo encadenable y $n \in \mathbb{N}$, ¿tiene X hiperespacio único $F_n(X)$?

Pregunta

Si X es cualquier abanico y $n \in \mathbb{N}$, ¿tiene X hiperespacio único $F_n(X)$?

Pregunta

Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, ¿tiene X hiperespacio único $F_2(X)$?

Pregunta

Sean $n \in \mathbb{N}$. ¿Existirá un continuo de dimensión finita tal que no tenga hiperespacio único $F_n(X)$?

Pregunta

¿El Pseudo Arco tendrá segundo producto simétrico único?

Gracias por su fina y amable atención ;)