Condiciones relacionadas a la existencia de retracciones de $C(X)$ sobre X

Lucero Madrid Mendoza
Dr. Félix Capulín Pérez

Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México

Noviembre 2014

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado.

Dado un contiuno X se definen los siguientes hiperespacios:

2^X = $\{A \subset X$: A es cerrado y no vacío$\}$

$C(X) = \{A \in 2^X$: A es conexo $\}$

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado.

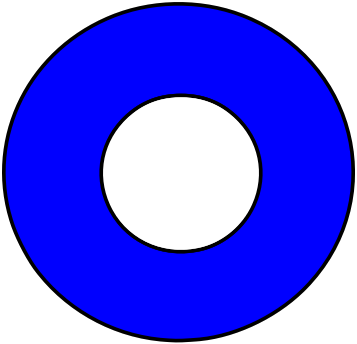
Dado un contiuno X se definen los siguientes hiperespacios:

2^X = $\{A \subset X$: A es cerrado y no vacío$\}$

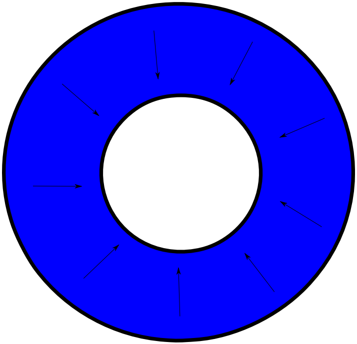
$C(X) = \{A \in 2^X$: A es conexo $\}$

Dado un espacio topológico X y $A \subset X$ cerrado. Una función continua $r : X \to A$ tal que $r\mid_A$ es la función identidad sobre A es llamada *retracción*.

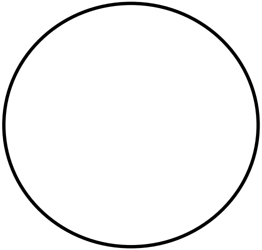
Dado un espacio topológico X y $A \subset X$ cerrado. Una función continua $r : X \to A$ tal que $r \mid_A$ es la función identidad sobre A es llamada *retracción*.



Dado un espacio topológico X y $A \subset X$ cerrado. Una función continua $r : X \to A$ tal que $r\mid_A$ es la función identidad sobre A es llamada *retracción*.



Dado un espacio topológico X y $A \subset X$ cerrado. Una función continua $r : X \to A$ tal que $r|_A$ es la función identidad sobre A es llamada *retracción*.



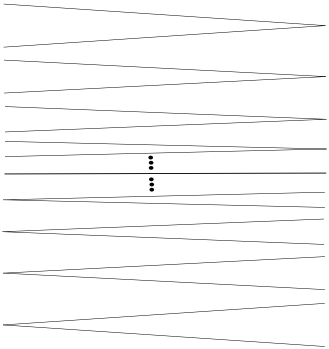
(Sam Nadler Jr, 1970)¿Qué condiciones necesarias y suficientes se necesitan para que existan retracciones de $C(X)$ sobre X?

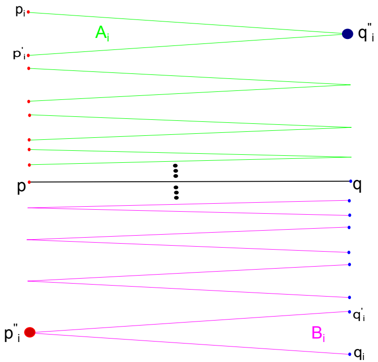
Definición

*Sean X un continuo, $p, q \in X$. Diremos que X es de **tipo** N entre los puntos p y q si: existen un arco $A = pq$, dos sucesiones de arcos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ en X tales que $A_i = p_i p_i^{'}$, $B_i = q_i q_i^{'}$ y puntos $p_i^{''} \in B_i \setminus \{q_i, q_i^{'}\}$, $q_i^{''} \in A_i \setminus \{p_i, p_i^{'}\}$ para toda $i \in \mathbb{N}$ tales que:*

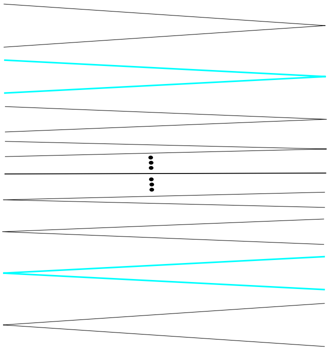
1. $A = LimA_i = LimB_i$
2. $p = Limp_i = Limp_i^{'} = Limp_i^{''}$
3. $q = Limq_i = Limq_i^{'} = Limq_i^{''}$
4. *Cada arco que une a q_i con $q_i^{'}$ debe contener a $p_i^{''}$*
5. *Cada arco que une a p_i con $p_i^{'}$ debe contener a $q_i^{''}$*

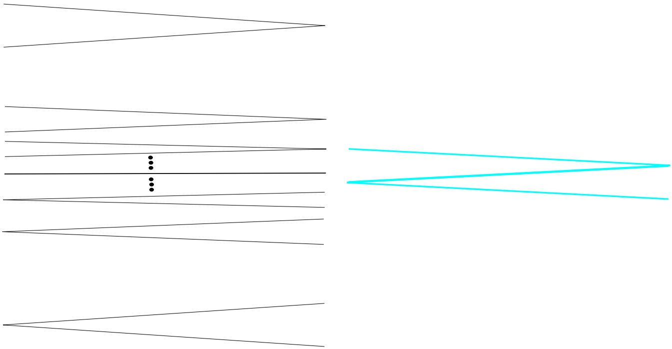
*Si X es de tipo N entre dos puntos, diremos simplemente que X es de **tipo** N.*





p_i
A_i
q''_i
p'_i
p
q
q'_i
p''_i
B_i
q_i

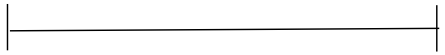




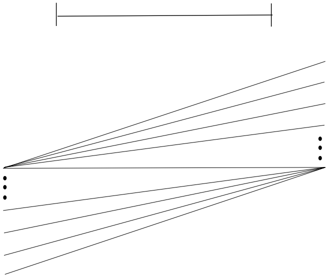
Definición

Sea X un continuo. Diremos que X es ***uniformemente arco-conexo (uac)****, si para cada $\epsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que cada arco $ab = A$ contenido en X contiene k puntos $a = a_1, a_2, a_3, \ldots a_k = b$ que dividen a A en subarcos $a_j a_{j+1}$ cada uno de ellos con diámetro menor que ϵ.*

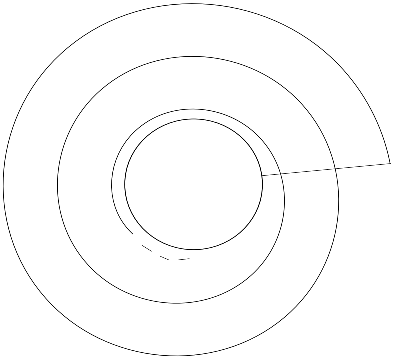
Ejemplos uac.



Ejemplos uac.

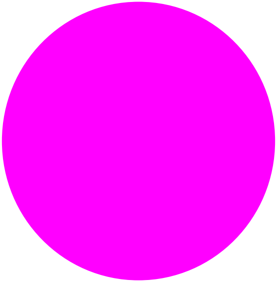


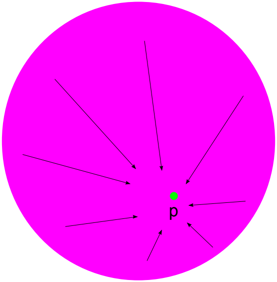
Ejemplo NO uac.



Definición

Se dice que un espacio X es contráctil con respecto a Y siempre que cada función continua $f : X \to Y$ sea homotópica a una función constante.




p

Teorema

(J.J Charatonik) *Sea X un dendroide. Si existen retracciones de $C(X)$ en X entonces X es uac.*

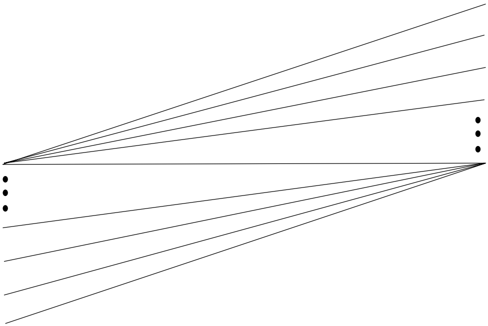
Teorema

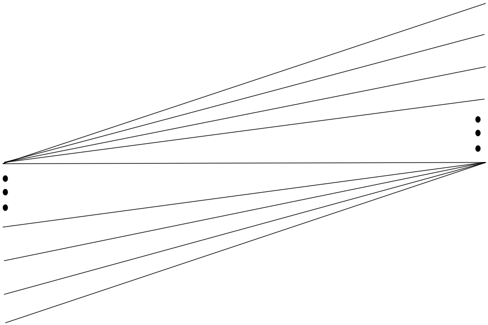
(W.J Charatonik, F. Capulín) *Sea X un continuo. Si existen retracciones de $C(X)$ sobre X entonces X no es de tipo N.*

Teorema

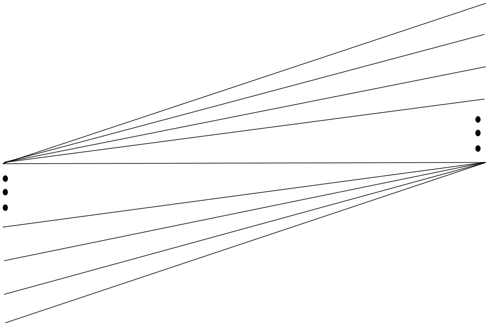
(J.J Charatonik) *Sea* X *un dendroide. Si existen retracciones de* $C(X)$ *en* X *entonces* X *es uac.*

El reciproco del Teorema anterior no se cumple.

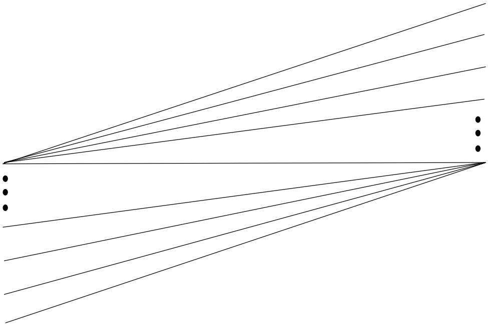




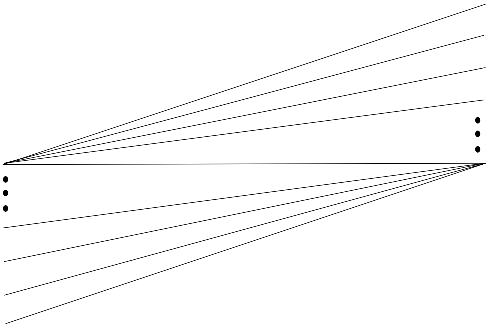
• X es Tipo N.



- X no es contráctil pues X es Tipo N.



- X no es contráctil pues X es Tipo N.
- $C(X)$ es contráctil.

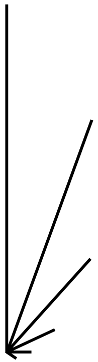


- X no es contráctil pues X es Tipo N.
- $C(X)$ es contráctil.
- La contractibilidad se preserva bajo retracciones.

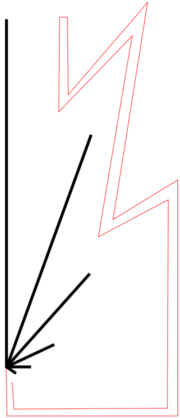
Teorema

(W.J Charatonik, F. Capulín) *Sea X un continuo. Si existen retracciones de $C(X)$ sobre X entonces X no es de tipo N.*

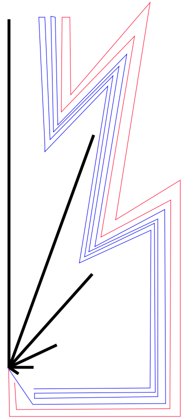
El reciproco del Teorema anterior no es válido.



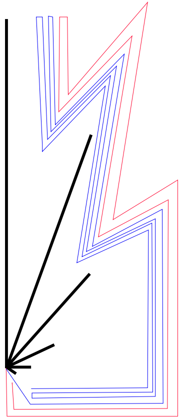
El reciproco del Teorema anterior no es válido.



El reciproco del Teorema anterior no es válido.

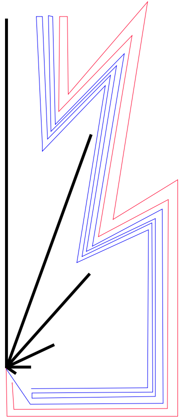


El reciproco del Teorema anterior no es válido.



- NO es uac.

El reciproco del Teorema anterior no es válido.



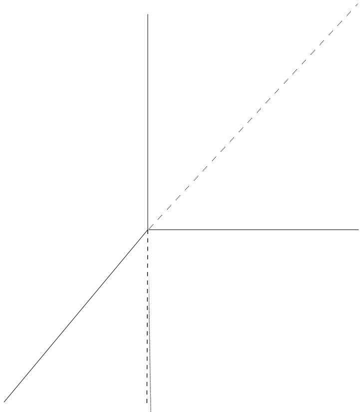
- NO es uac.
- Por el Teorema anterior si existieran retracciones de $C(X)$ en X entonces X es uac.

¿Si X es un dendroide uac y no es de tipo N, entonces existen retracciones de $C(X)$ a X?

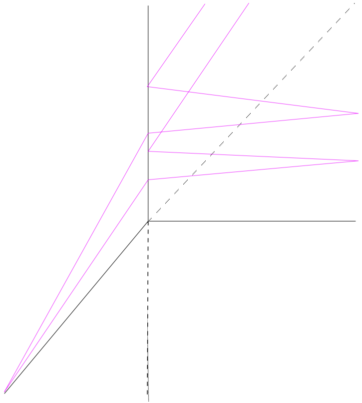
¿Si X es un dendroide uac y no es de tipo N, entonces existen retracciones de $C(X)$ a X?

NO

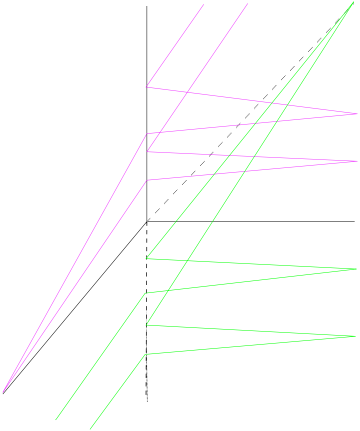
Contraejemplo.



Contraejemplo.



Contraejemplo.



Definición

Sea X un continuo Tipo N entre p y q. Se dice que (X, g, Y) tiene la propiedad $(*)$ si Y es un continuo hereditariamente unicoherente y $g : X \to Y$ es una función continua tal que:

a)$g(p) \neq g(q)$

b)$g(p_i q_i^{''}) \cap g(q_i^{''} p_i^{'}) = \{g(q_i^{''})\}$

c)$g(q_i p_i^{''}) \cap g(p_i^{''} q_i^{'}) = \{g(p_i^{''})\}$

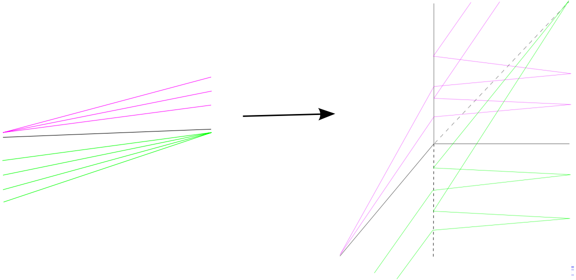
Definición

Sea X un continuo Tipo N entre p y q. Se dice que (X, g, Y) tiene la propiedad $(*)$ si Y es un continuo hereditariamente unicoherente y $g : X \to Y$ es una función continua tal que:

a)$g(p) \neq g(q)$

b)$g(p_i q_i^{''}) \cap g(q_i^{''} p_i^{'}) = \{g(q_i^{''})\}$

c)$g(q_i p_i^{''}) \cap g(p_i^{''} q_i^{'}) = \{g(p_i^{''})\}$



Teorema

(T.Czuba) *Sean X y Y dos continuos y $g : X \to Y$ una función continua. Si (X, g, Y) tiene la propiedad $(*)$, entonces para cada función $f : X \to Y$ homotópica a la función g tenemos que $g(p), g(q) \in f(pq) \subset f(X)$.*

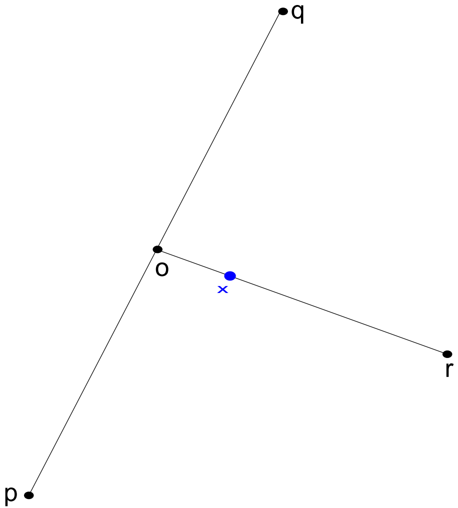
Teorema

(A.Illanes, S.Nadler Jr.) *Sea X un continuo. $C(X)$ es contráctil si y sólo si existe una función continua $\alpha : X \to \gamma(X)$. En donde $\gamma(X) = \{$arcos ordenados en $C(X)$ que unen a un elemento de $F_1(X)$ con $X\}$*

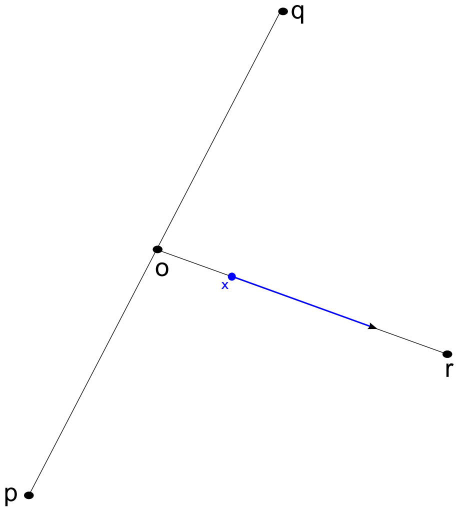
- **Arcos Ordenados**

- **Arcos Ordenados**
- Si x pertenece al triodo de convergencia:

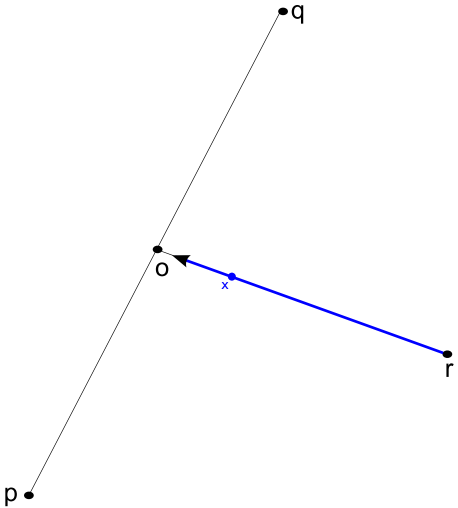
$\bullet x \in or$



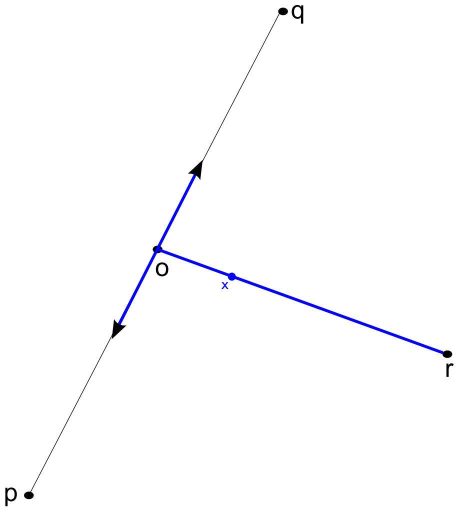
• $x \in or$



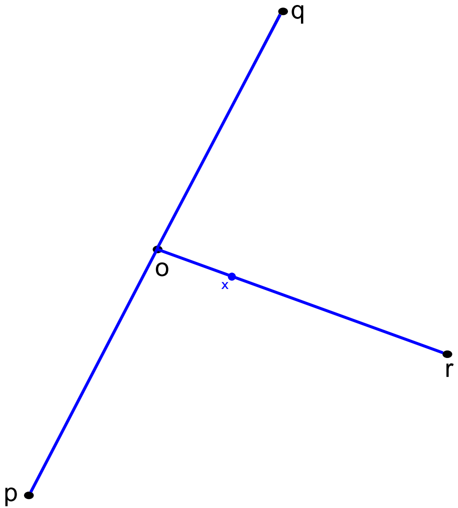
•$x \in or$



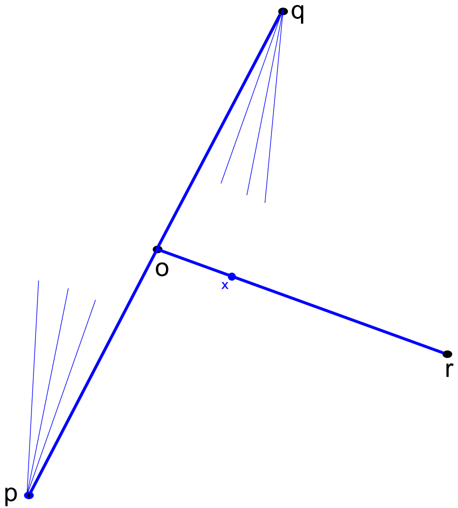
- $x \in or$



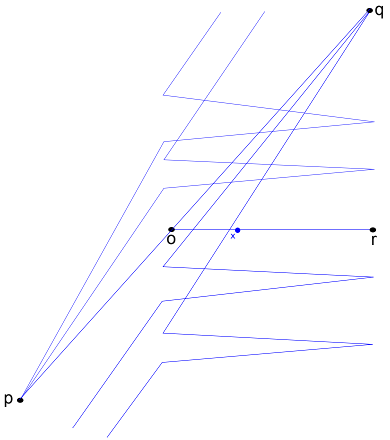
• $x \in or$



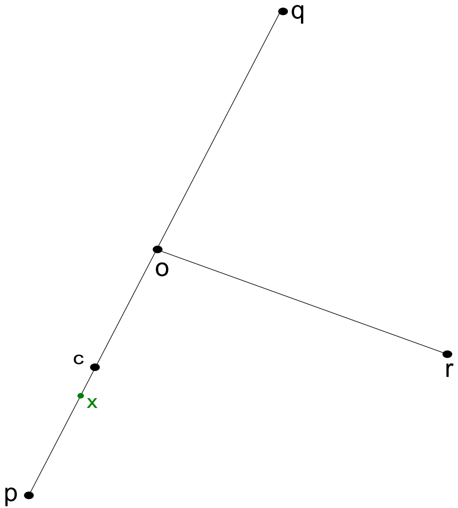
•$x \in or$



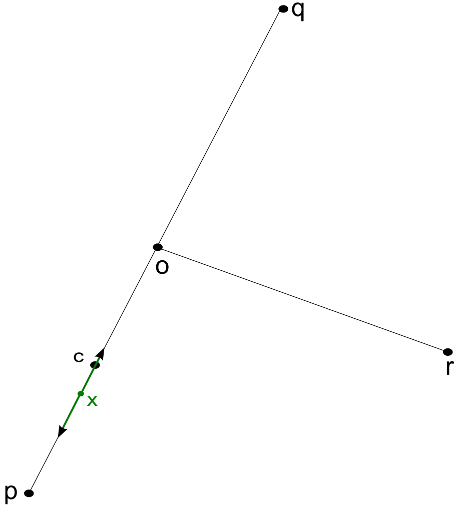
$\bullet x \in or$



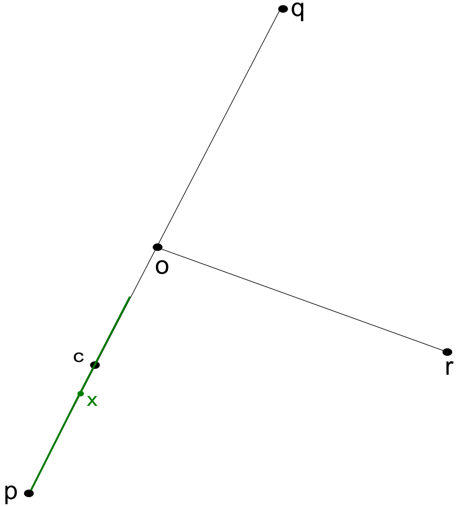
• $x \in pc$ donde c es el punto medio de op.



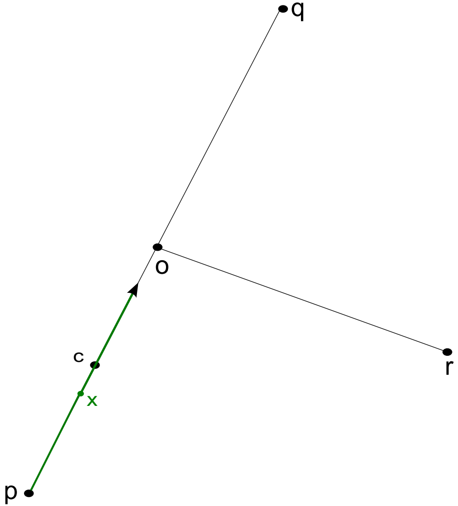
•$x \in pc$ donde c es el punto medio de op.



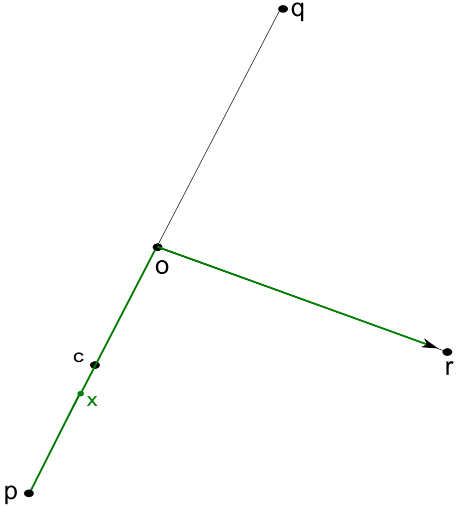
• $x \in pc$ donde c es el punto medio de op.



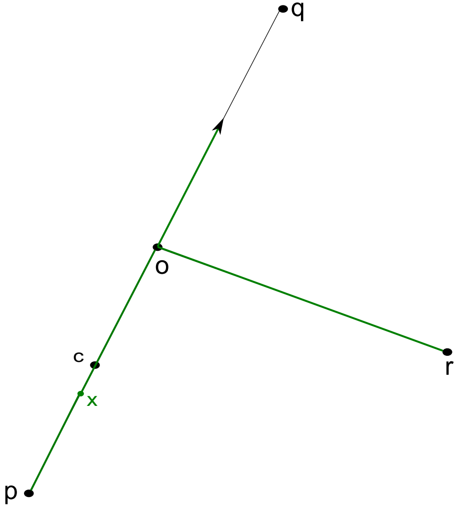
• $x \in pc$ donde c es el punto medio de op.



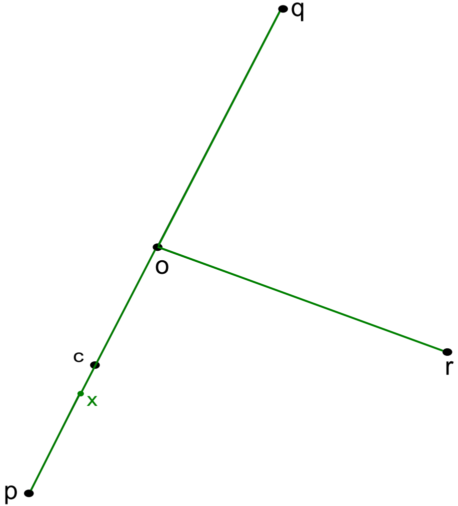
•$x \in pc$ donde c es el punto medio de op.



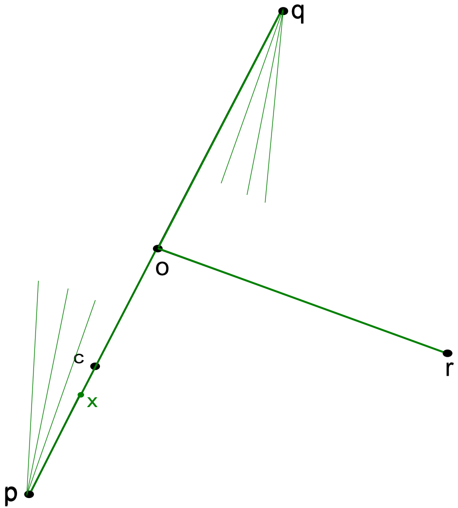
• $x \in pc$ donde c es el punto medio de op.



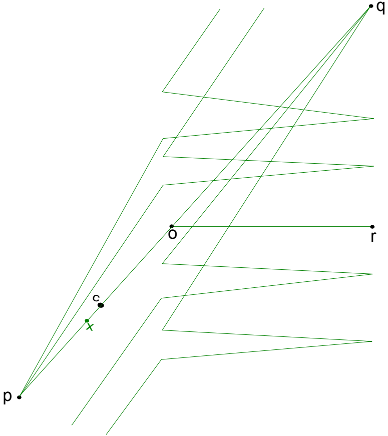
•$x \in pc$ donde c es el punto medio de op.



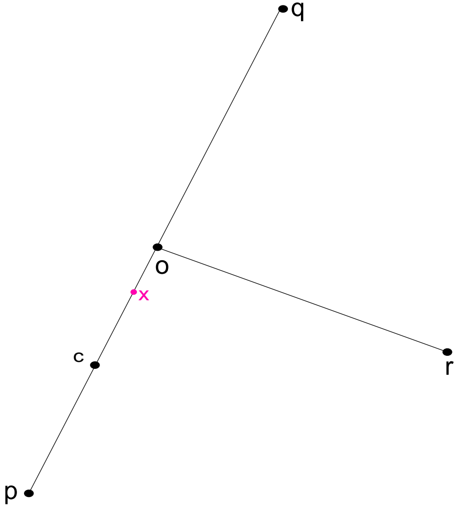
•$x \in pc$ donde c es el punto medio de op.



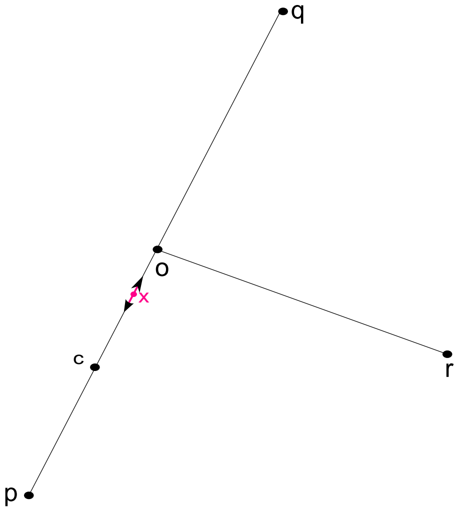
•$x \in pc$ donde c es el punto medio de op.



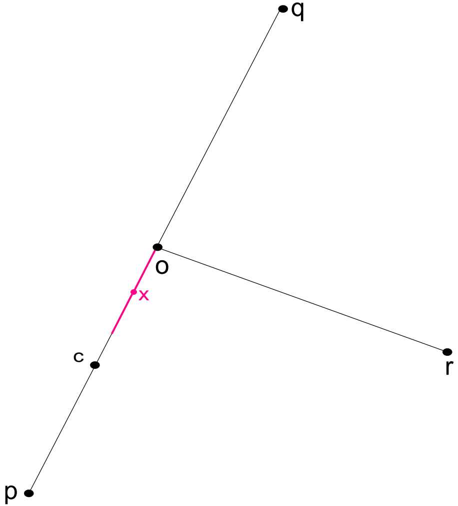
• $x \in oc$ donde c es el punto medio de op.



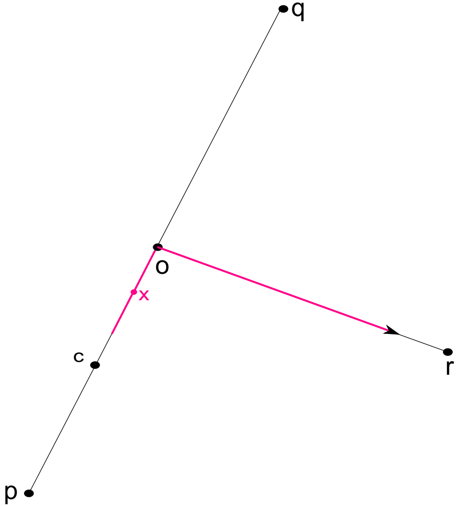
•$x \in oc$ donde c es el punto medio de op.



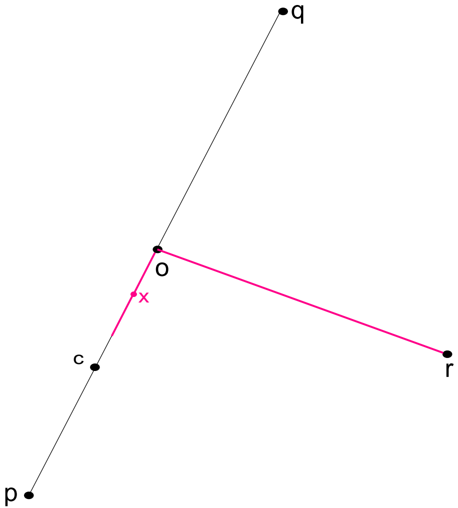
•$x \in oc$ donde c es el punto medio de op.



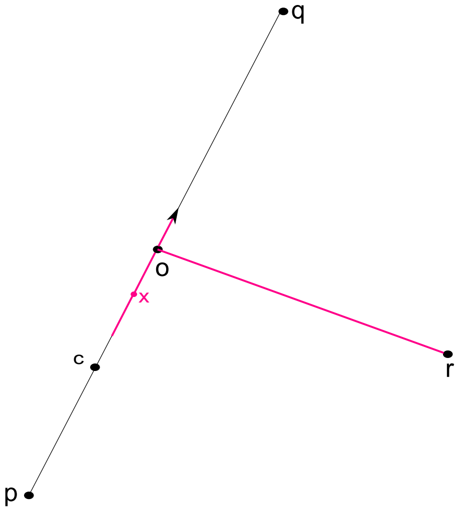
•$x \in oc$ donde c es el punto medio de op.



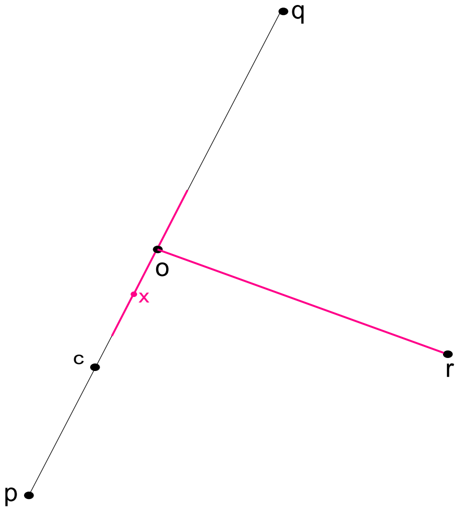
• $x \in oc$ donde c es el punto medio de op.



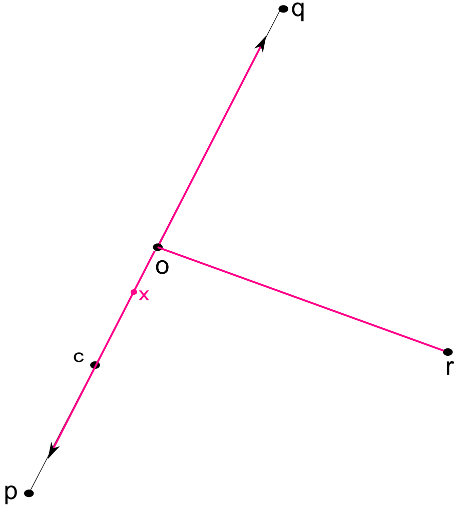
•$x \in oc$ donde c es el punto medio de op.



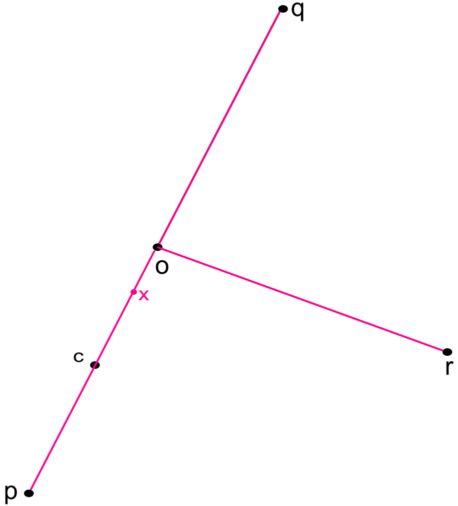
• $x \in oc$ donde c es el punto medio de op.



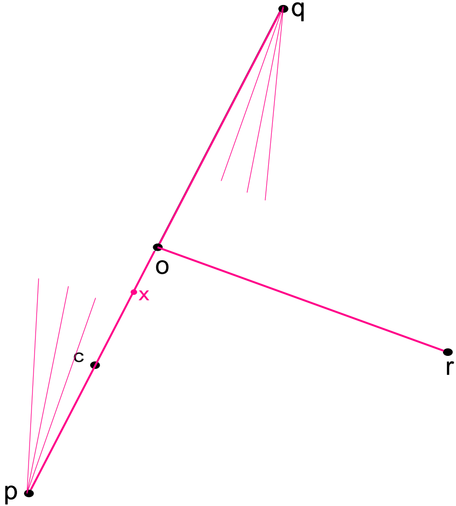
• $x \in oc$ donde c es el punto medio de op.



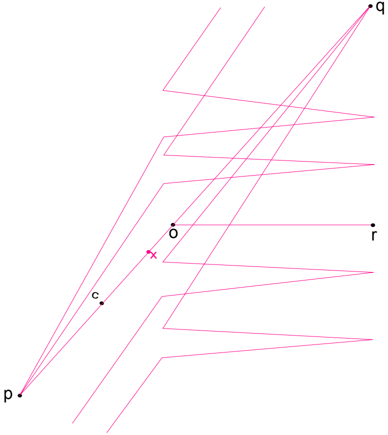
$\bullet x \in oc$ donde c es el punto medio de op.



•$x \in oc$ donde c es el punto medio de op.

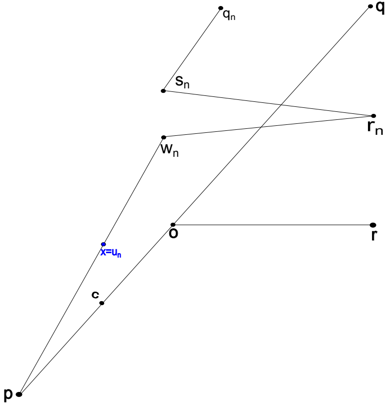


•$x \in oc$ donde c es el punto medio de op.

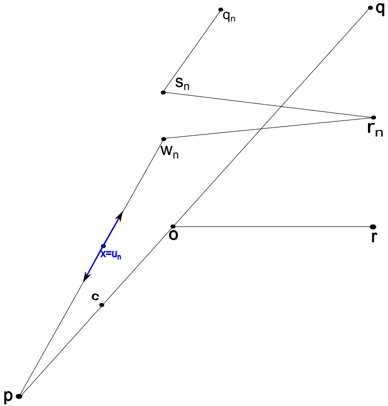


- **Arcos Ordenados**
- Si $x \in pq_n$:

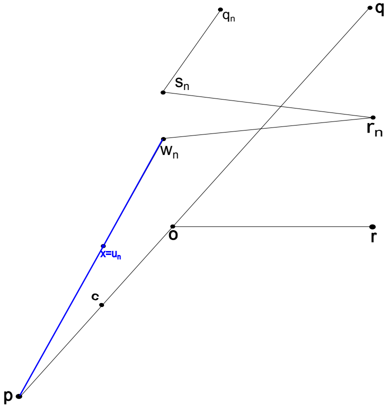
• $x = u_n$



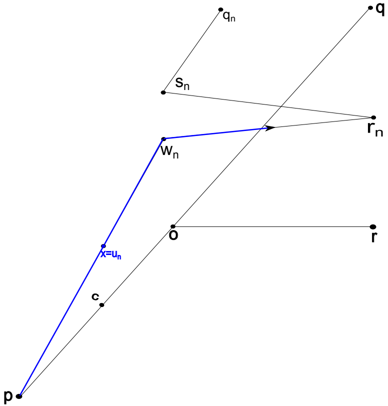
$\bullet x = u_n$



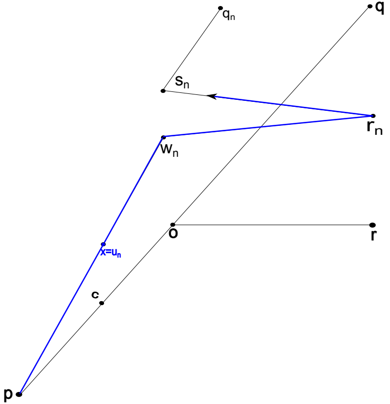
• $x = u_n$



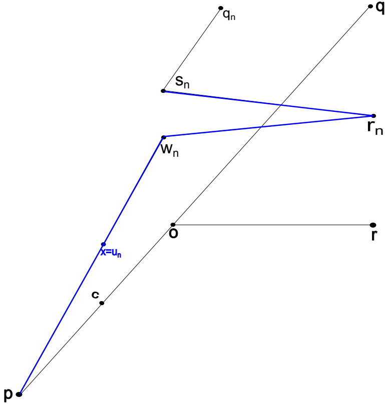
• $x = u_n$



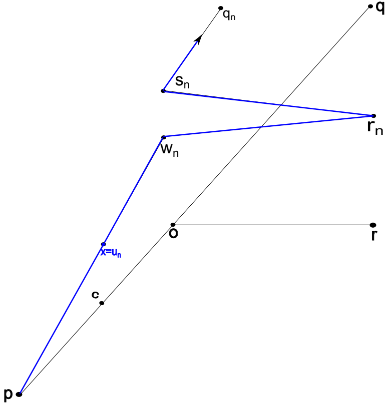
• $x = u_n$



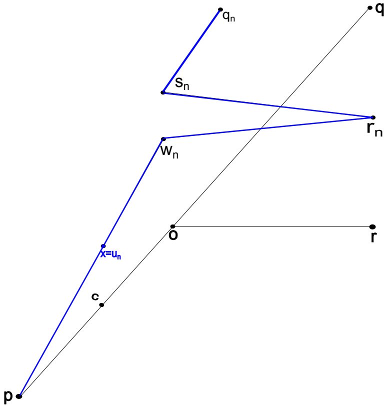
• $x = u_n$



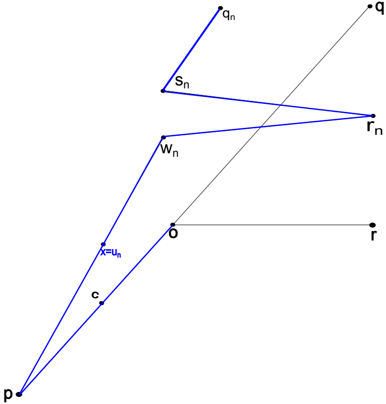
•$x = u_n$



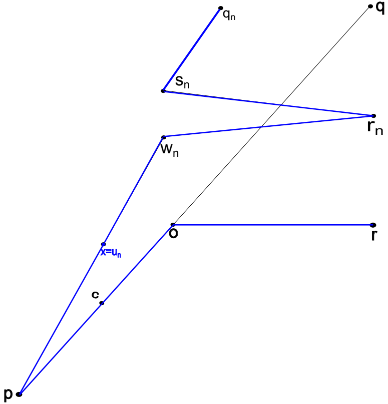
• $x = u_n$



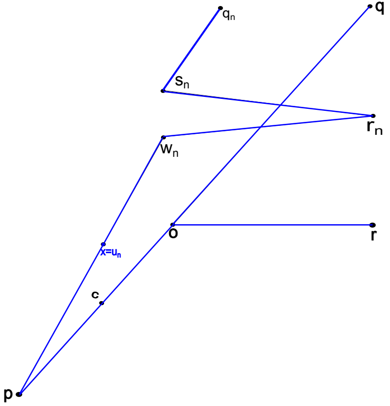
•$x = u_n$



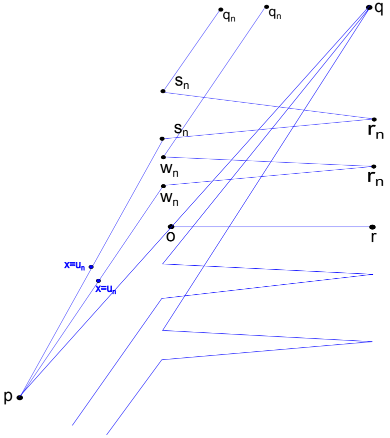
• $x = u_n$



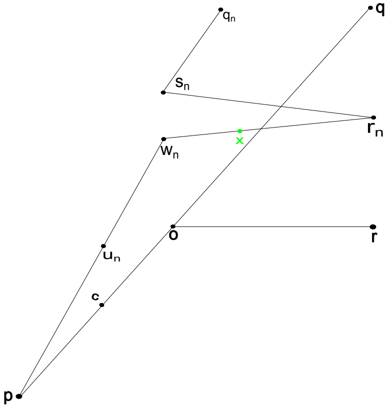
•$x = u_n$



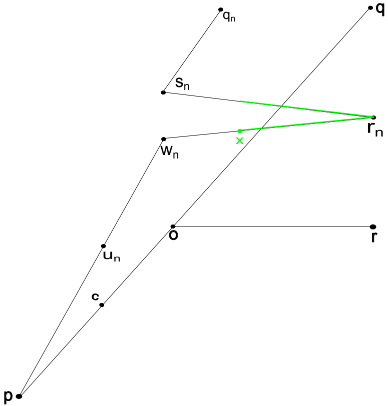
$\bullet x = u_n$



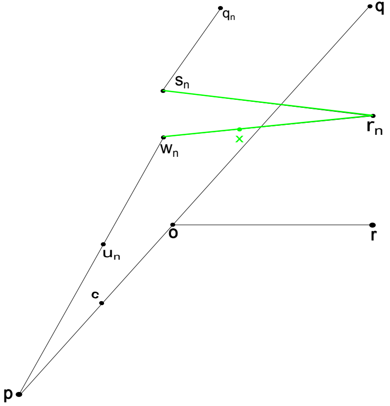
•$x > u_n$



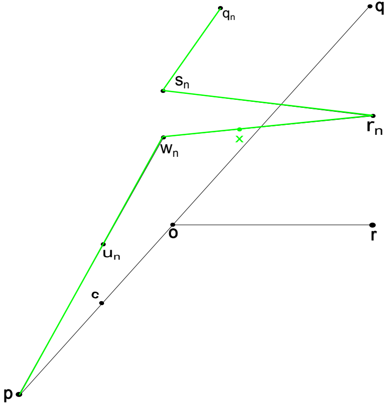
• $x > u_n$



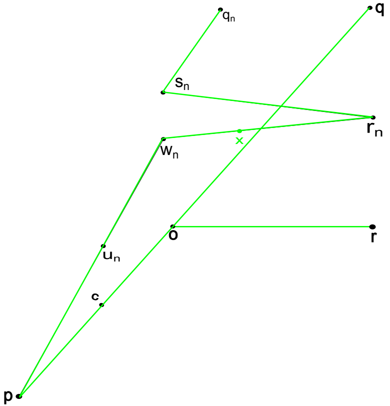
•$x > u_n$



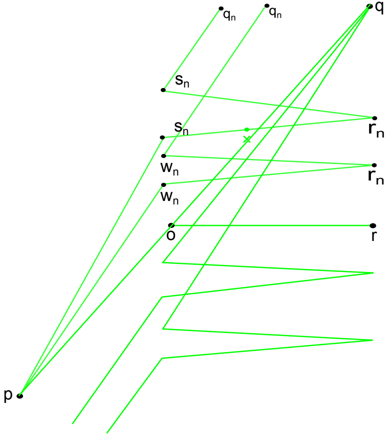
•$x > u_n$



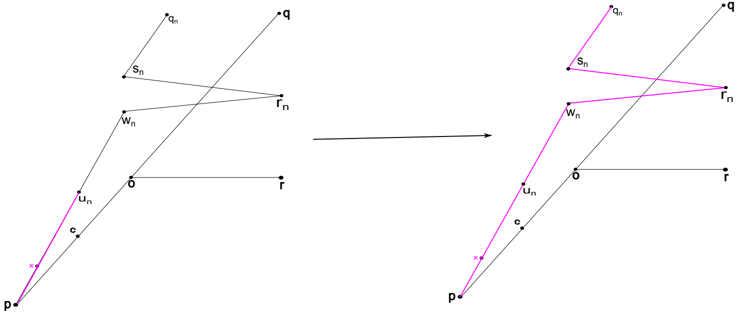
• $x > u_n$



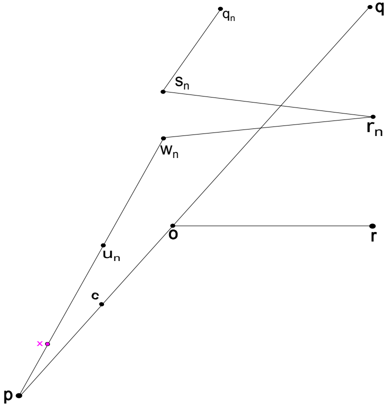
$\bullet x > u_n$



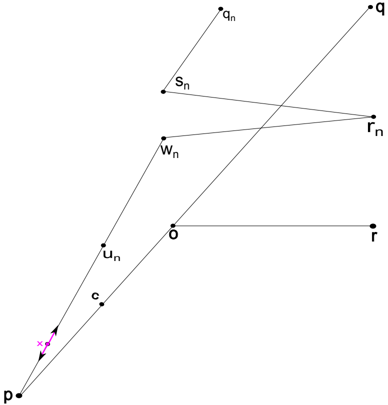
$\bullet x \in pu_n \setminus \{u_n\}$



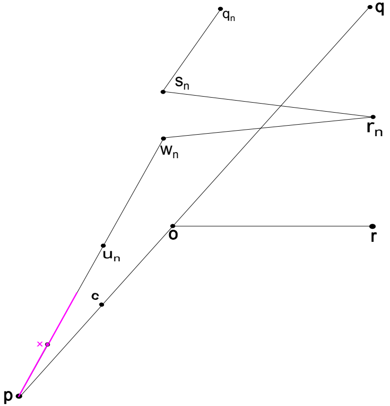
•$x \in pu_n \setminus \{u_n\}$



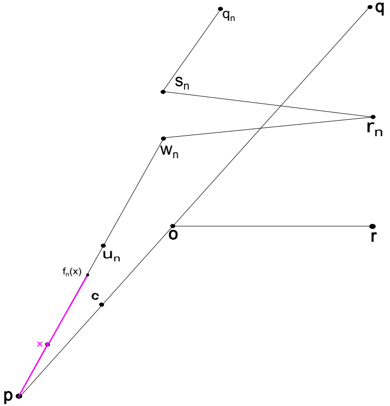
•$x \in pu_n \setminus \{u_n\}$



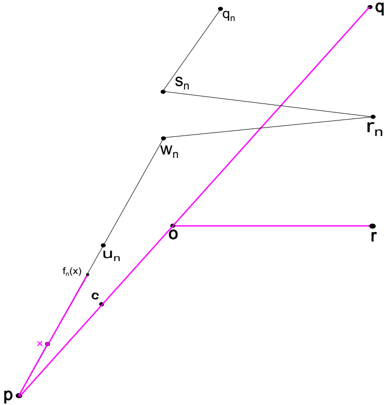
•$x \in pu_n \setminus \{u_n\}$



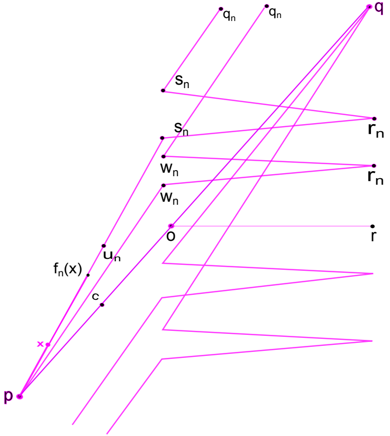
$\bullet x \in pu_n \setminus \{u_n\}$



•$x \in pu_n \setminus \{u_n\}$



$\bullet x \in pu_n \setminus \{u_n\}$



- **Continuidad**

Sea $\epsilon > 0$. P.d. Existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ entonces $H^2(A_x, A_y) < \epsilon$.

- **Continuidad**

Sea $\epsilon > 0$. P.d. Existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ entonces $H^2(A_x, A_y) < \epsilon$.

$A_x \subset N^H(\epsilon, A_y)$ y $A_y \subset N^H(\epsilon, A_x)$

• **Continuidad**

Sea $\epsilon > 0$. P.d. Existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ entonces $H^2(A_x, A_y) < \epsilon$.

$A_x \subset N^H(\epsilon, A_y)$ y $A_y \subset N^H(\epsilon, A_x)$

Para todo $C \in A_x$, existe $K \in A_y$ tal que $H(C, K) < \epsilon$.

- **Continuidad**

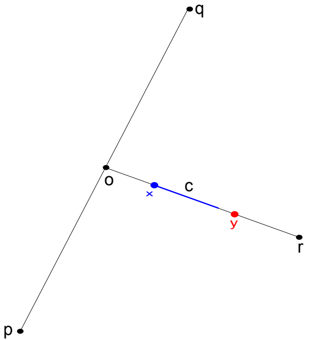
Sea $\epsilon > 0$. P.d. Existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ entonces $H^2(A_x, A_y) < \epsilon$.

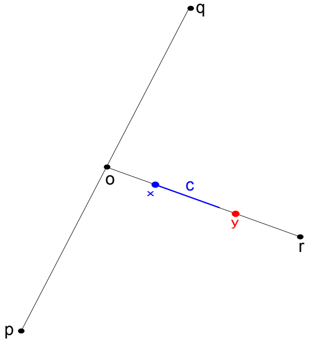
$A_x \subset N^H(\epsilon, A_y)$ y $A_y \subset N^H(\epsilon, A_x)$

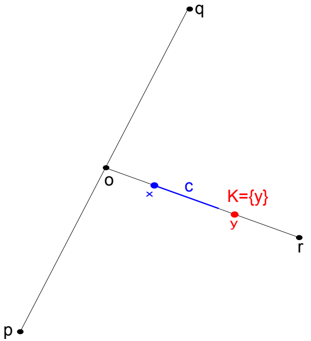
Para todo $C \in A_x$, existe $K \in A_y$ tal que $H(C, K) < \epsilon$

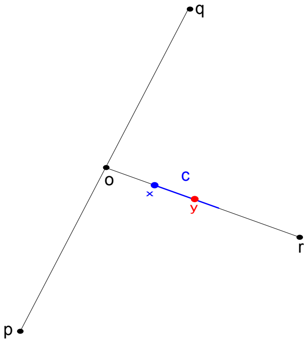
$C \subset N(\epsilon, K)$ y $K \subset N(\epsilon, C)$.

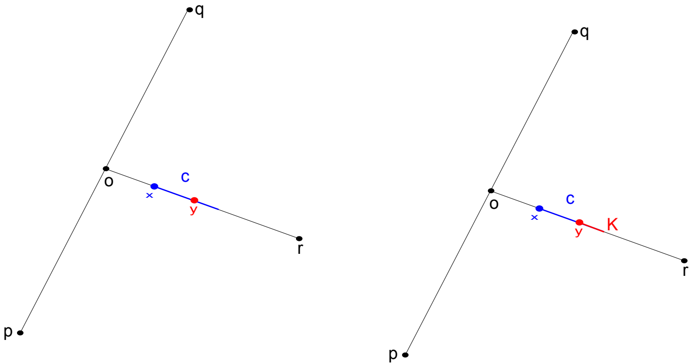
- **Continuidad**
- $x \in or \setminus \{o\}$, $y \in T$:

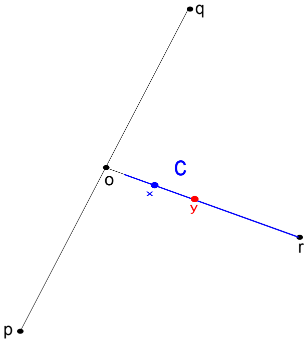

q
o
c
x
y
r
p

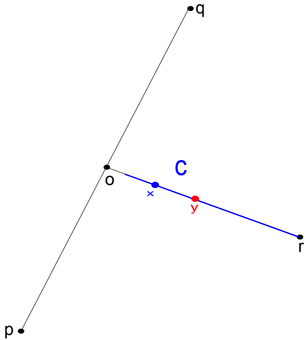

q
o
x
c
y
r
p

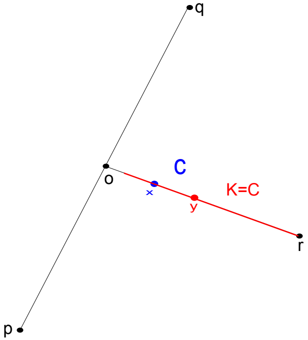

q
o
x
c
K={y}
y
r
p

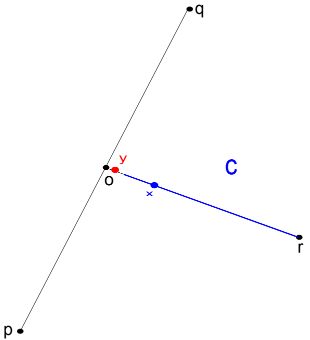

q
o
c
x
y
r
p

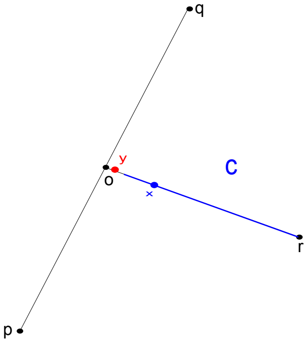

q
o
c
x
y
r
p
q
o
c
x
y
K
r
p

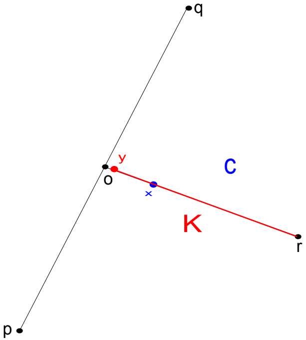

q
C
o
x
y
r
p

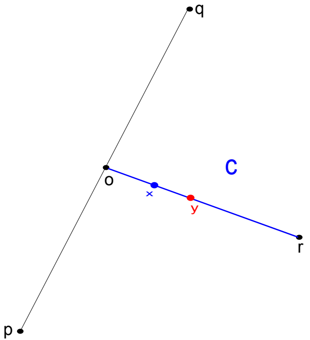

q
C
o
x
y
r
p

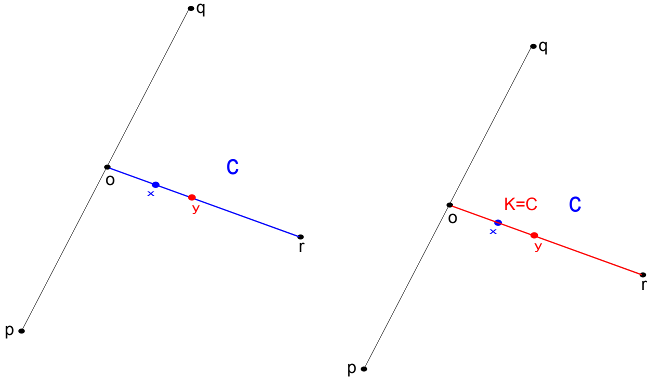

q
C
o
x
y
K=C
r
p


q
y
C
o
x
r
p


q
y
C
o
x
r
p

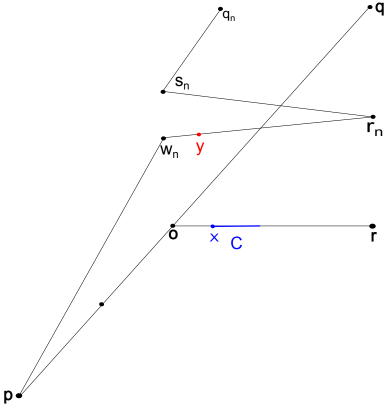

q
y
C
o
x
K
r
p

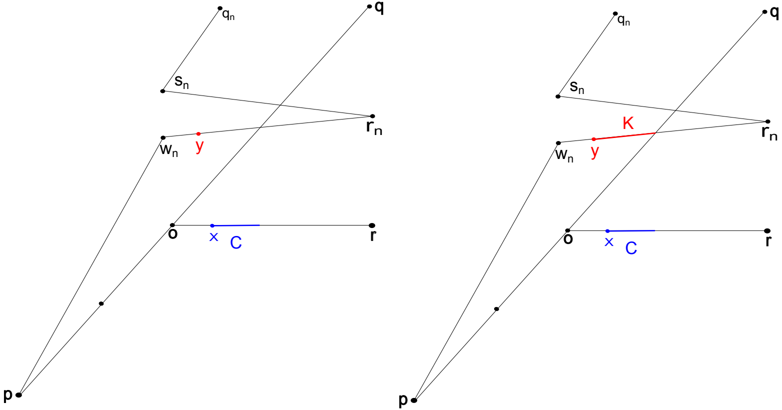

q
C
o
x
y
r
p

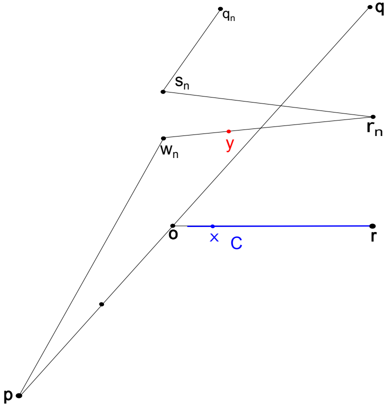

q
o
x
y
r
p
C
q
o
x
y
r
p
K=C
C

- **Continuidad**

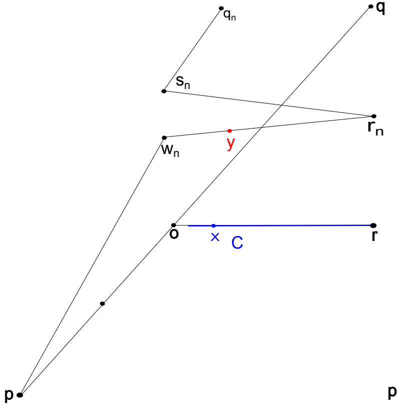
•$x \in or \setminus \{o\}$, $y \notin T$:


q_n
q
s_n
r_n
w_n
y
o
x
C
r
p

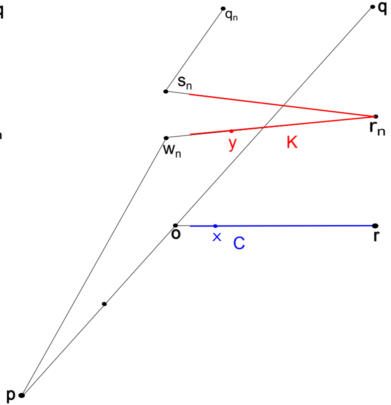

q
q_n
s_n
r_n
w_n
y
o
x
C
r
p
q
q_n
s_n
K
r_n
w_n
y
o
x
C
r
p



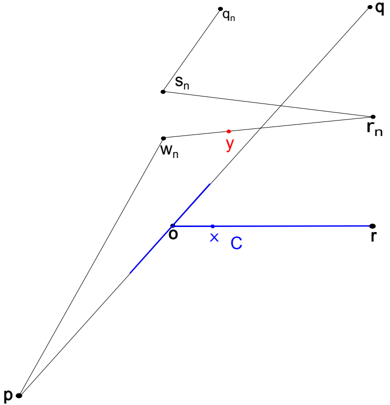
q_n
q
s_n
r_n
w_n
y
o
x
C
r
p



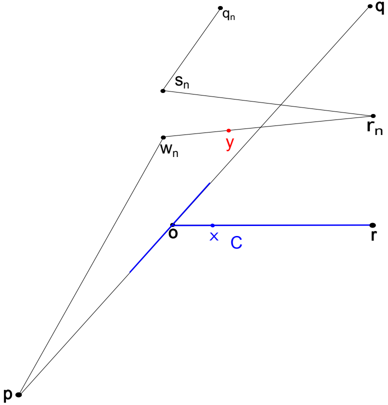
q
q_n
s_n
r_n
w_n
y
o
x
C
r
p

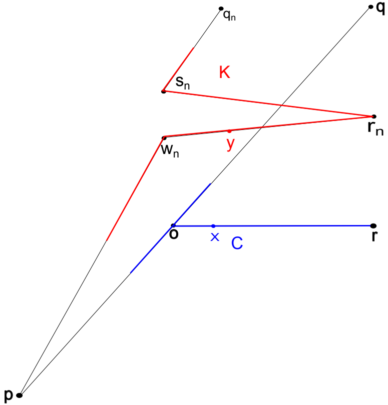


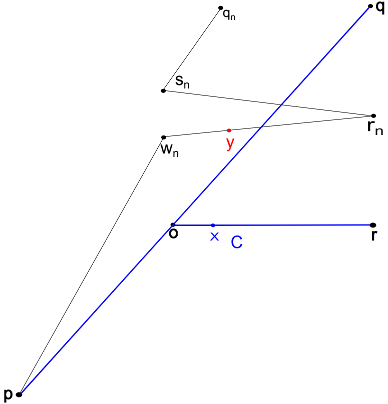
q
q_n
s_n
r_n
w_n
y
K
o
x
C
r
p



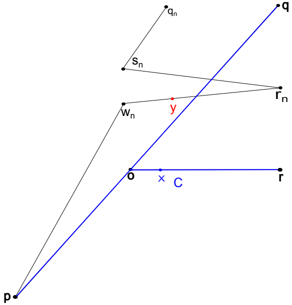
q
q_n
s_n
r_n
w_n
y
o
x
C
r
p


q
qn
sn
rn
wn
y
o
x
C
r
p

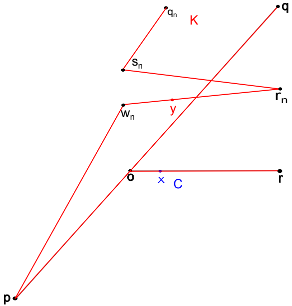

qn
q
K
sn
rn
wn
y
o
x
C
r
p



q_n
q
s_n
r_n
w_n
y
o
x
C
r
p



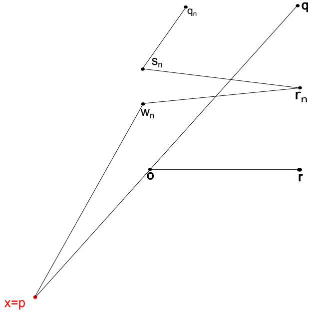
q
qn
sn
rn
wn
y
o
x
C
r
p



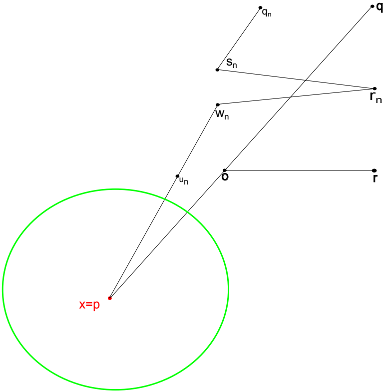
qn
K
q
sn
rn
wn
y
o
x
C
r
p

- **Continuidad**

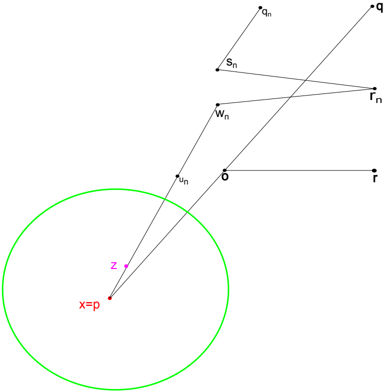
•$x = p$:

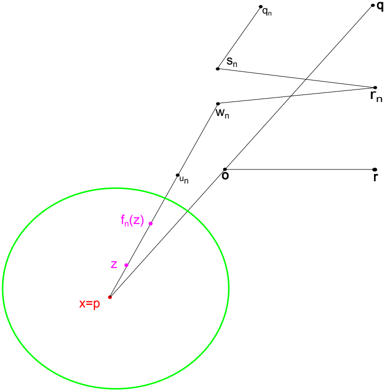


q$_n$
q
s$_n$
r$_n$
w$_n$
o
r
x=p

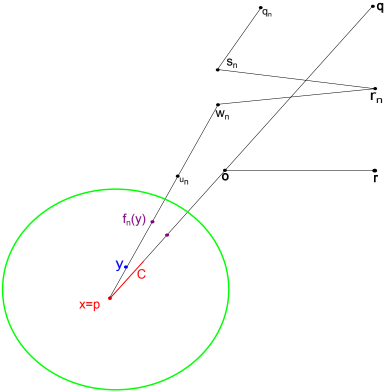


q

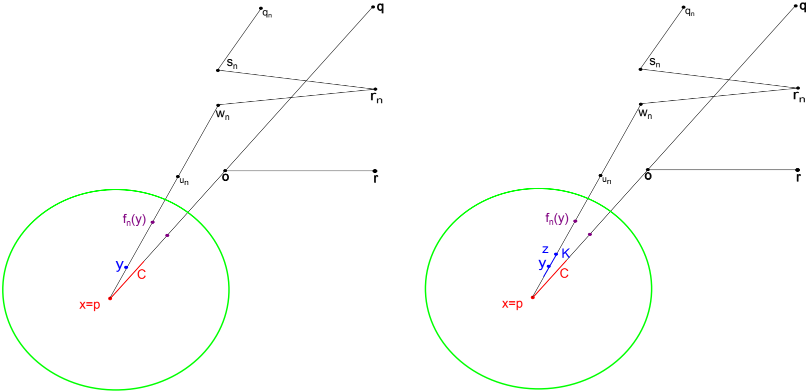

q
qn
sn
rn
wn
un
o
r
z
x=p



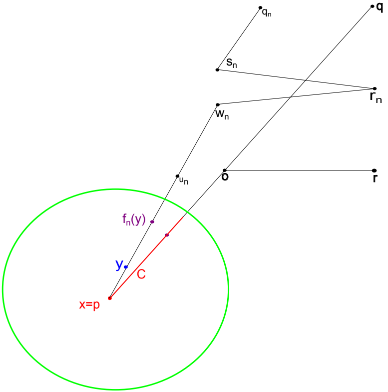
q_n
q
s_n
r_n
w_n
u_n
o
r
f_n(z)
z
x=p



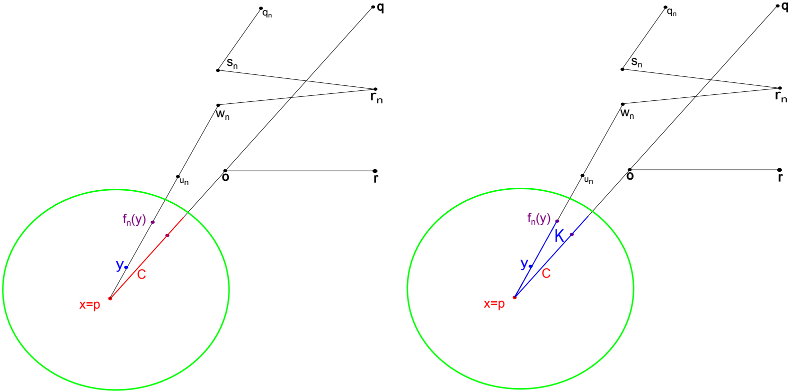
q
n
q
s
n
r
n
w
n
u
n
o
r
f
n
(y)
y
C
x=p



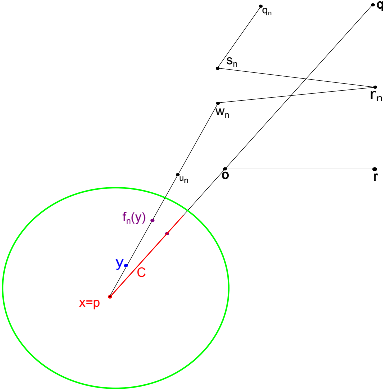
q_n
q
s_n
r_n
w_n
u_n
o
r
f_n(y)
y
C
x=p
q_n
q
s_n
r_n
w_n
u_n
o
r
f_n(y)
z
K
y
C
x=p

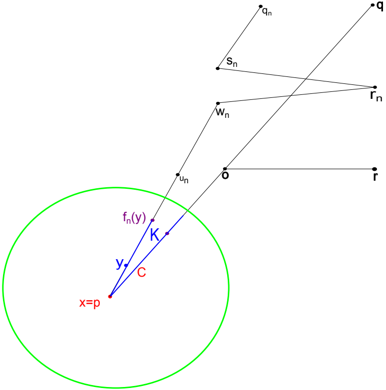


q
q_n
s_n
r_n
w_n
u_n
o
r
$f_n(y)$
y
C
x=p

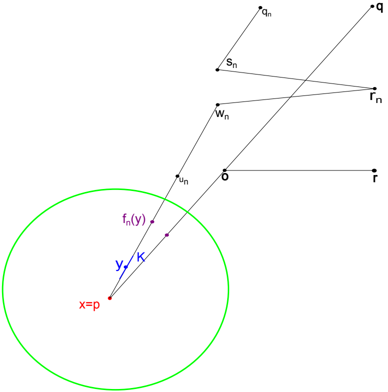


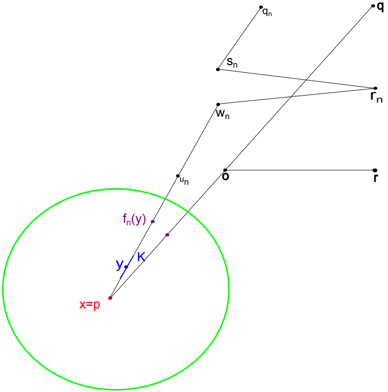
q
q_n
s_n
r_n
w_n
u_n
o
r
$f_n(y)$
y
C
x=p
K



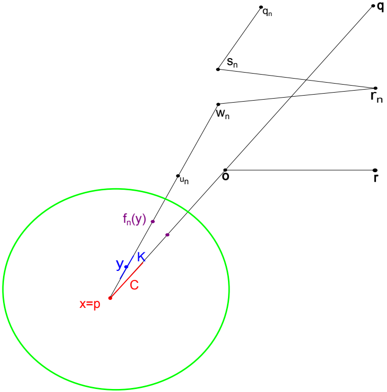


$$A_x \subset N^H(\epsilon, A_y)$$

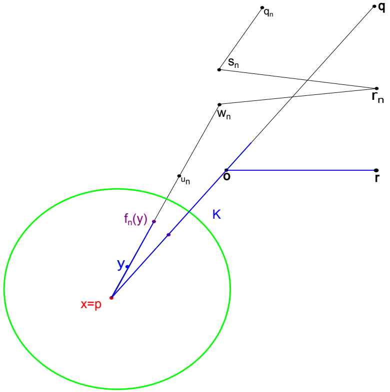

q
qn
sn
rn
wn
un
o
r
fn(y)
y
K
x=p



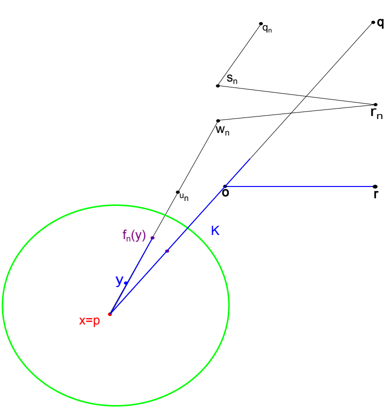
q
q_n
s_n
r_n
w_n
u_n
o
r
$f_n(y)$
y
K
x=p

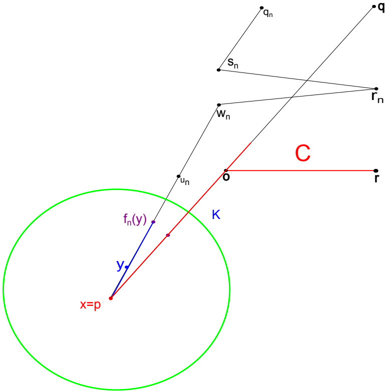


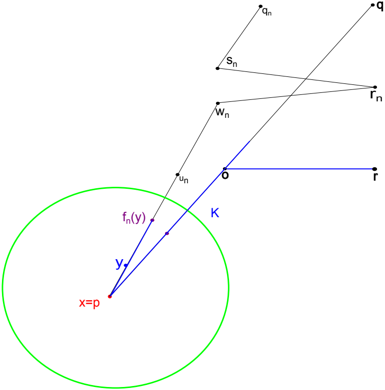
q
q_n
s_n
r_n
w_n
u_n
o
r
$f_n(y)$
y
K
C
x=p

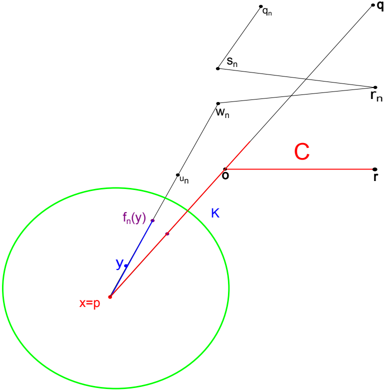


q_n
q
s_n
r_n
w_n
u_n
o
r
K
f_n(y)
y
x=p


q
q_n
s_n
r_n
w_n
u_n
o
r
K
$f_n(y)$
y
x=p


q
q_n
s_n
r_n
w_n
C
o
r
u_n
K
$f_n(y)$
y
x=p





$$A_y \subset N^H(\epsilon, A_x)$$

¡GRACIAS!