Funciones que no preservan selectibilidad entre abanicos

Leonardo Juárez Villa

UAEMéx

Noviembre 2014

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado.
Un *dendroide* es definido como un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente.
Un *abanico* es un dendroide con exactamente un punto de ramificación y este punto es llamado *vértice*.

Sea X un continuo.
El hiperespacio de todos los subcontinuos de X es denotado por $C(X)$ equipado con la métrica de Hausdorff.
Una *selección* para $C(X)$ es una función continua $\sigma : C(X) \to X$ tal que $\sigma(A) \in A$ para cada $A \in C(X)$.
Diremos que X es *selectible* si existe una selección para $C(X)$.

Una función continua $g : X \longrightarrow Y$ entre continuos es

- *Monótona* si para cada subcontinuo Q de Y, $g^{-1}(Q)$ es un continuo en X.
- *Confluente* si para cada subcontinuo Q de Y y cada componente C de $g^{-1}(Q)$, se tiene que $g(C) = Q$.
- *Ligera* si para cada punto $y \in Y$ ocurre que $g^{-1}(y)$ es totalmente disconexo.
- *Abierta*, si para cada conjunto abierto U en X, $g(U)$ es abierto en $g(X)$.

T. Maćkowiak [1] .
dió la siguiente definición
Sean A y B subcontinuos de un continuo X tales que $B \subseteq A$. Si existen dos sucesiones de continuos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfaciendo las condiciones:

1. $A_n \cap A'_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
2. $\lim\ A_n = A = \lim\ A'_n$.
3. $B = \lim\ (A_n \cap A'_n)$.

diremos que B es un *conjunto de doblez* de A.
Se dice que X tiene la *propiedad de intersección doblada* si para cada A subcontinuo de X, la intersección de todos sus conjuntos de doblez es distinta del vacío.

[1] T. Maćkowiak, *Continuous selections for* $C(X)$, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., **26** (1978), 547-551.

T. Maćkowiak [1] demostró el siguiente resultado:

Teorema

Sea X a continuo, si existe una selección $\sigma : C(X) \longrightarrow X$ entonces X tiene la propiedad de intersección doblada.

[1] T. Maćkowiak, *Continuous selections for $C(X)$*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., **26** (1978), 547-551.

J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and S. Miklos[2] , formularon el problema general.

Problema

Sea M una clase de funciones y D una clase de dendroides. Para que clases M y D es cierto que si $X \in D$ es un dendroide selectible (no selectible) y f pertenece a M, entonces f(X) es selectible (no selectible, respectivamente)?

[2] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and S. Miklos, *Confluents mappings of fans*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **301** (1990), 1-82

Se sabe que la imagen de un abanico selectible (no selectible) bajo una función monótona no necesariamente es selectible (no selectible), (*Confluents mappings of fans*,Corollary 14.13).
En relación la otras funciones (confluentes, abiertas y ligeras) se tenía la pregunta (*Confluents mappings of fans*,Question 14.13)

Problema

¿Es la selectibilidad invariante bajo funciones entre abanicos que sean: (1) abiertas y ligeras, (2) abiertas, (3) ligeras y confluentes?

En *"confluent mappings of fans that do not preserve selectibility and non selectibility"*[3] los autores dan ejemplos para mostrar que la selectibilidad (no selectibilidad) no se preserva bajo funciones confluentes y ligeras.
Ellos mismos dan un ejemplo para mostrar que la no selectibilidad no es preservada bajo funciones abiertas y ligeras y formulan la siguiente pregunta:

Pregunta

Es la selectibilidad preservada bajo funciones abiertas (abiertas y ligeras) entre abanicos?

[3] F. Capulin, F. Orozco-Zitli and I. Puga, *confluent mappings of fans that do not preserve selectibility and non selectibility*, Topology Proc., **40** (2012) pp. 91-98.

Example

Existe un abanico X y una función abierta y ligera g tal que $g(X)$ es un abanico no selectible.

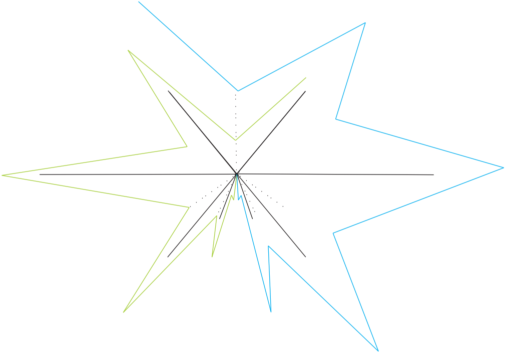

Figure: Abanico selectible

Para describir la selección $C(X)$ se usan las siguientes funciones: Definamos

$$s_p : X \times X \longrightarrow X$$

como sigue, dados dos puntos $x, y \in X$, $s_p(x, y)$ es el punto medio del arco $xp \cup py$.

Sea $C(K,p) = \{K \in C(X) : p \in K\}$ y

$$\alpha : C(X,p) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow X$$

una función tal que para cada continuo $K \in C(X)$ y cada punto $z \in \mathbb{R}^2$ el punto $\alpha(K,z)$ en $pz \cap K$ tiene la mayor norma.

Primero se dará una selección $\sigma' : C(F) \longrightarrow F$. Finalmente se extenderá la función σ' a todo $C(X)$.

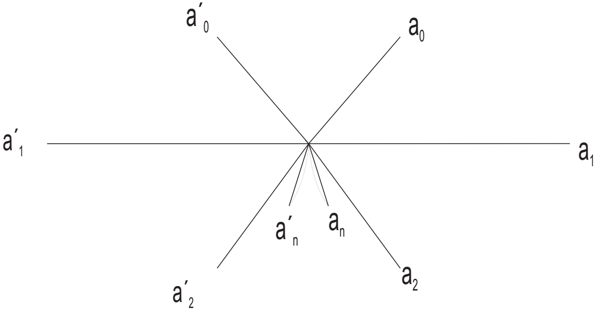

Figure: Abanico F

Consideramos dos casos:
Caso 1. si $K \in C(F)$
Denotemos por
$t_n = \alpha(K, a_n)$ y $t'_n = \alpha(K, a'_n)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
Sean

$$x_1 = \alpha(K, 4s(s(t_0, 2t'_1), s(t'_0, 2t_1)))$$

y

$$x_n = 2s(t_n, t'_n)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.
Ahora consideramos la sucesión de puntos y_n de K tal que, $y_0 = p$
y

$$y_n = \alpha(K, 2s(y_{n-1}, 3x_n))$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.
Entonces

$$\sigma'(K) = \alpha(K, \lim y_n)$$

Caso 2. Si $p \notin K$.
En este caso K es un arco $xy \subset F$. Supongamos que $|x| \geq |y|$, y hacemos $\sigma'(K) = x$.
Entonces σ' es una selección para $C(F)$

Para definir la selección $\sigma : C(X) \longrightarrow X$, consideramos $\beta : B \longrightarrow F$ una retracción de X en F.

Consideramos dos casos:

(1) Si $K \cap F \neq \emptyset$ entonces $\sigma(K) = \sigma'(K \cap F)$.

(2) Si $K \cap F = \emptyset$ observemos que K es un arco y el conjunto

$$(\beta|_K)^{-1}(\sigma'(\beta(K)))$$

es finito

Se define una relación de equivalencia sobre X.
Entonces $Y = X/\sim$ es homeomorfo al siguiente abanico.

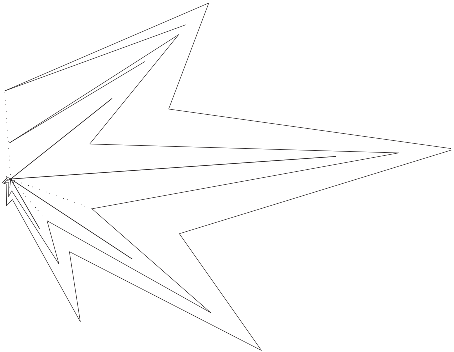

Figure: Abanico no selectible Y

Sea $g : X \longrightarrow Y$ la función cociente.
-g es una función abierta y ligera.
-X es abanico selectible.
-Y no tiene la propiedad de intersección doblada, en consecuencia Y no es selectible.

- F. Capulin, F. Orozco-Zitli and I. Puga, *Bend intersection property and continua of generalized type N*, Topology Proc., **40** (2012), 259-270.
- F. Capulin, F. Orozco-Zitli and I. Puga, *confluent mappings of fans that do not preserve selectibility and non selectibility*, Topology Proc., **40** (2012) pp. 91-98.
- J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and S. Miklos, *Confluents mappings of fans*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **301** (1990), 1-82.
- T. Maćkowiak, *Continuous selections for $C(X)$*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., **26** (1978), 547-551.