Sobre el hiperespacio $K(X)$.

Jose Luis Suárez López

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (BUAP)
IX Taller estudiantil de teoría de los continuos y sus hiperespacios.

Noviembre 2014

Preliminares.

Preliminares.

Definición

Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Preliminares.

Definición

Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Definición

Un **arco** es cualquier continuo homeomorfo a $[0, 1]$.

Preliminares.

Definición

Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Definición

Un **arco** es cualquier continuo homeomorfo a $[0, 1]$.

Definición

Una **2-celda** es cualquier espacio topológico homeomorfo a $[0, 1] \times [0, 1]$.

Los hiperespacios son ciertas familias de subconjuntos de un espacio topológico, X, con alguna característica particular. Los más conocidos son:

$$2^X = \{F \subset X : F \text{ es no vacío y cerrado en } X\}$$

$$C(X) = \{F \in 2^X : F \text{ es conexo}\}.$$

En particular, cuando X es un continuo, a $C(X)$ se le conoce como el hiperespacio de subcontinuos del continuo X.

Los hiperespacios son ciertas familias de subconjuntos de un espacio topológico, X, con alguna característica particular. Los más conocidos son:

$$2^X = \{F \subset X : F \text{ es no vacío y cerrado en } X\}$$

$$C(X) = \{F \in 2^X : F \text{ es conexo}\}.$$

En particular, cuando X es un continuo, a $C(X)$ se le conoce como el hiperespacio de subcontinuos del continuo X.

A 2^X lo dotamos con la métrica de Hausdorff, denotada por H. Y a $C(X)$ como subespacio de 2^X.

Teorema

Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es un continuo.

El hiperespacio $C(p, X)$.

El hiperespacio $C(p, X)$.

Definición

Sean X un continuo y A un subcontinuo propio de X.
Definimos $C(A, X) = \{B \in C(X) : A \subset B\}$.

El hiperespacio $C(p, X)$.

Definición

Sean X un continuo y A un subcontinuo propio de X.
Definimos $C(A, X) = \{B \in C(X) : A \subset B\}$.

En particular nos interesan estos hiperespacios cuando $A = \{p\}$ con $p \in X$. Es decir, los hiperespacios de la forma $C(\{p\}, X) = \{B \in C(X) : p \in B\}$, los cuales denotaremos sólo por $C(p, X)$.

Teorema

Si X un continuo, entonces $C(p, X)$ es un continuo para cada $p \in X$.

Teorema

Si X un continuo, entonces $C(p, X)$ es un continuo para cada $p \in X$.

La prueba del teorema anterior se sigue de los siguientes dos hechos:

- Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ tal que $p \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces si el límite de esta sucesión existe también contiene al punto p, de tal manera que $C(p, X)$ es cerrado en $C(X)$.
- Podemos probar usando arcos ordenados que $C(p, X)$ es arco-conexo y así $C(p, X)$ es conexo.

Definición

Sean X un continuo, $A \in C(X)$ y $B \in C(A, X)$. Decimos que B es **terminal** en A, si para cada $D \in C(A, X)$ tenemos que $D \subset B$ o $B \subset D$.

Definición

Sean X un continuo, $A \in C(X)$ y $B \in C(A, X)$. Decimos que B es **terminal** en A, si para cada $D \in C(A, X)$ tenemos que $D \subset B$ o $B \subset D$.

Lema

Sean X un continuo y $A \in C(X)$. Si $B \in C(A, X)$ tal que $A \subsetneq B \subsetneq X$, entonces B es terminal en A si, y sólo si, B es un punto de corte de $C(A, X)$.

Definición

Sean X un continuo, $A \in C(X)$ y $B \in C(A, X)$. Decimos que B es **terminal** en A, si para cada $D \in C(A, X)$ tenemos que $D \subset B$ o $B \subset D$.

Lema

Sean X un continuo y $A \in C(X)$. Si $B \in C(A, X)$ tal que $A \subsetneq B \subsetneq X$, entonces B es terminal en A si, y sólo si, B es un punto de corte de $C(A, X)$.

Lema

Sean X un continuo y $A \in C(X) \setminus \{X\}$. Entonces $C(A, X)$ es una arco con extremos A y X, si y sólo si, cualesquiera par de elementos de $C(A, X)$ se pueden comparar, es decir, si $B, B^{'} \in C(A, X)$ se tiene que $B \subset B^{'}$ o $B^{'} \subset B$.

El hiperespacio $K(X)$.

El hiperespacio $K(X)$.

Definición

Sean X un continuo y A un subconjunto de X. Definimos $K(A,X)=\{C(p,X) : p\in A\}$.

El hiperespacio $K(X)$.

Definición

Sean X un continuo y A un subconjunto de X. Definimos $K(A, X) = \{C(p, X) : p \in A\}$.

En particular al hiperespacio $K(X, X)$ lo denotamos simplemente por $K(X)$.

El hiperespacio $K(X)$.

Definición

Sean X un continuo y A un subconjunto de X. Definimos $K(A, X) = \{C(p, X) : p \in A\}$.

En particular al hiperespacio $K(X, X)$ lo denotamos simplemente por $K(X)$.

A $K(X)$ lo consideramos como un subespacio de $C(C(X))$ y con la métrica de Hausdorff respectiva, denotada por H^2.

Pregunta 1:

¿Será suficiente que X sea un continuo para que $K(X)$ sea un continuo?

Pregunta 1:

¿Será suficiente que X sea un continuo para que $K(X)$ sea un continuo?

Pregunta 2:

¿Qué propiedades debe tener X para que $K(X)$ sea un continuo?

Continuos de Kelley.

Definición

Sea X un continuo. Diremos que **X es de Kelley en el punto p** con $p \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $q \in X$ con $d(p,q) < \delta$ y cada $A \in C(p,X)$, existe $B \in C(q,X)$ tal que $H(A,B) < \varepsilon$.
Diremos que X **es de Kelley** si es de Kelley en cada uno de sus puntos.

Proposición

Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

Proposición

Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:
a) X es de Kelley en p;

Proposición

Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) X es de Kelley en p;

b) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $q \in X$ con $d(p,q) < \delta$ y para cada $A \in C(p,X)$, existe $B \in C(q,X)$ tal que $H(A,B) < \varepsilon$;

Proposición

Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) X es de Kelley en p;

b) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $q \in X$ con $d(p,q) < \delta$ y para cada $A \in C(p,X)$, existe $B \in C(q,X)$ tal que $H(A,B) < \varepsilon$;

c) Para cada $A \in C(p,X)$ y para toda $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X con $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$, existe $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$ tal que $p_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Proposición

Sean X un continuo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

Proposición

Sean X un continuo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:
a) X es de Kelley;

Proposición

Sean X un continuo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) X es de Kelley;

b) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $p, q \in X$ con $d(p, q) < \delta$ y para cada $A \in C(p, X)$, existe $B \in C(q, X)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$;

Observación

Para un continuo X y $\varepsilon > 0$, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) Para cada $A \in C(p, X)$ existe $B \in C(q, X)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$;

b) $H^2(C(p, X), C(q, X)) < \varepsilon$.

Observación

Para un continuo X y $\varepsilon > 0$, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) Para cada $A \in C(p, X)$ existe $B \in C(q, X)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$;

b) $H^2(C(p, X), C(q, X)) < \varepsilon$.

Corolario

Un continuo X es de Kelley si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $p, q \in X$ y $d(p, q) < \delta$ entonces $H^2(C(p, X), C(q, X)) < \varepsilon$.

Lema

Para un continuo X, la función $\alpha_X : X \to K(X)$ dada por $\alpha_X(p) = C(p, X)$ para cada $p \in X$, es biyectiva.

Lema

Para un continuo X, la función $\alpha_X : X \to K(X)$ dada por $\alpha_X(p) = C(p, X)$ para cada $p \in X$, es biyectiva.

Lema

Si X es un continuo y $\omega_X : K(X) \to X$ denota la inversa de α_X, entonces ω_X es continua.

Lema

Para un continuo X, la función $\alpha_X : X \to K(X)$ dada por $\alpha_X(p) = C(p, X)$ para cada $p \in X$, es biyectiva.

Lema

Si X es un continuo y $\omega_X : K(X) \to X$ denota la inversa de α_X, entonces ω_X es continua.

Observación

Notemos que $\omega_X : K(X) \to X$ se define de la siguiente manera $\omega(C(p, X)) = p$.

Teorema

Sea X un continuo. Entonces X es de Kelley si, y sólo si, α_X es uniformemente continua.

Teorema

Sea X un continuo. Entonces X es de Kelley si, y sólo si, α_X es uniformemente continua.

Demostración:

$\Rightarrow$] Como X es de Kelley, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $p, q \in X$ con $d(p, q) < \delta$ entonces $H^2(C(p, X), C(q, X)) < \varepsilon$, es decir, $H^2(\alpha_X(p), \alpha_X(q)) < \varepsilon$. Se sigue que α_X es uniformemente continua.

$\Leftarrow$] De forma análoga a la necesidad, dado que α_X es uniformemente continua tenemos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $p, q \in X$ con $d(p, q) < \delta$ entonces $H^2(\alpha_X(p), \alpha_X(q)) < \varepsilon$, es decir, $H^2(C(p, X), C(q, X)) < \varepsilon$. Tenemos que X es de Kelley. $\square$

Teorema

Para un continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes:

Teorema

Para un continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes:
a) X es de Kelley;

Teorema

Para un continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes:
a) X es de Kelley;

b) La función α_X es continua;

Teorema

Para un continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) X es de Kelley;

b) La función α_X es continua;

c) La función α_X es un homeomorfismo;

Teorema

Para un continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) X es de Kelley;

b) La función α_X es continua;

c) La función α_X es un homeomorfismo;

d) El hiperespacio $K(X)$ es homeomorfo a X;

Teorema

Para un continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) X es de Kelley;

b) La función α_X es continua;

c) La función α_X es un homeomorfismo;

d) El hiperespacio $K(X)$ es homeomorfo a X;

e) El hiperespacio $K(X)$ es un continuo;

Teorema

Para un continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) X es de Kelley;

b) La función α_X es continua;

c) La función α_X es un homeomorfismo;

d) El hiperespacio $K(X)$ es homeomorfo a X;

e) El hiperespacio $K(X)$ es un continuo;

f) El hiperespacio $K(X)$ es compacto.

Continuos localmente conexos.

Continuos localmente conexos.

Definición

Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **localmente conexo** si para cada $p \in X$ y para cada abierto U de X tal que $p \in U$, existe V un abierto y conexo en X tal que $p \in V \subset U$.

Continuos localmente conexos.

Definición

Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **localmente conexo** si para cada $p \in X$ y para cada abierto U de X tal que $p \in U$, existe V un abierto y conexo en X tal que $p \in V \subset U$.

Lema

Sea X un continuo. Si B es un subespacio localmente conexo de X, entonces $\alpha_B : B \to K(B, X)$ es continua.

Teorema

Sea X un continuo. Si B es un subespacio localmente conexo de X, entonces B es homeomorfo a $K(B, X)$. En particular, $K(B, X)$ es localmente conexo.

Teorema

Sea X un continuo. Si B es un subespacio localmente conexo de X, entonces B es homeomorfo a $K(B,X)$. En particular, $K(B,X)$ es localmente conexo.

Corolario

Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces $K(X)$ es homeomorfo a X.

Ejemplo:

Consideremos $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-2, 2]\}$ y $B = \{(x, \sin(\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \pi]\}$. Definimos $X = A \cup B$. Veamos que $K(X)$ es localmente conexo.

Ejemplo:

Consideremos $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-2, 2]\}$ y $B = \{(x, \sin(\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \pi]\}$. Definimos $X = A \cup B$. Veamos que $K(X)$ es localmente conexo.

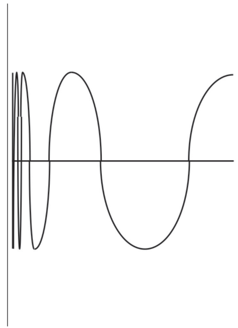

Figura : $X = A \cup B$.

Primero, notemos que $X = A \cup \overline{B}$ y que $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Por esto, X es un continuo. Observemos que X no es localmente conexo en todos los puntos de $A \cap \overline{B}$. Veamos que $K(X)$ es localmente conexo. Observemos que A y B son subespacios localmente conexos de X, entonces tenemos que $K(A, X)$ es un arco y $K(B, X)$ es un rayo.

Primero, notemos que $X = A \cup \overline{B}$ y que $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Por esto, X es un continuo. Observemos que X no es localmente conexo en todos los puntos de $A \cap \overline{B}$. Veamos que $K(X)$ es localmente conexo. Observemos que A y B son subespacios localmente conexos de X, entonces tenemos que $K(A, X)$ es un arco y $K(B, X)$ es un rayo.

Afirmación. $K(A, X)$ y $K(B, X)$ son cerrados en $K(X)$.

Primero, notemos que $X = A \cup \overline{B}$ y que $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Por esto, X es un continuo. Observemos que X no es localmente conexo en todos los puntos de $A \cap \overline{B}$. Veamos que $K(X)$ es localmente conexo. Observemos que A y B son subespacios localmente conexos de X, entonces tenemos que $K(A, X)$ es un arco y $K(B, X)$ es un rayo.

Afirmación. $K(A, X)$ y $K(B, X)$ son cerrados en $K(X)$.

Notemos que $K(A, X)$ es cerrado en $K(X)$, ya que $K(A, X)$ es homeomorfo a A.

Primero, notemos que $X = A \cup \overline{B}$ y que $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Por esto, X es un continuo. Observemos que X no es localmente conexo en todos los puntos de $A \cap \overline{B}$. Veamos que $K(X)$ es localmente conexo. Observemos que A y B son subespacios localmente conexos de X, entonces tenemos que $K(A, X)$ es un arco y $K(B, X)$ es un rayo.

Afirmación. $K(A, X)$ y $K(B, X)$ son cerrados en $K(X)$.

Notemos que $K(A, X)$ es cerrado en $K(X)$, ya que $K(A, X)$ es homeomorfo a A.

Veamos que $K(B, X)$ es cerrado en $K(X)$.

Supongamos lo contrario, es decir, que $K(B,X)$ no es cerrado en $K(X)$, entonces existe un $\{C(b_n,X)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $K(B,X)$ que converge a $C(x,X) \in K(X) \setminus K(B,X)$.
De esta manera, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en B. Como $\lim_{n\to\infty} C(b_n,X) = C(x,X)$ y ya que ω_X es continua, tenemos que $\lim_{n\to\infty} b_n = x$. Como $C(x,X) \in K(X) \setminus K(B,X)$, entonces $x \in A$.

Supongamos lo contrario, es decir, que $K(B,X)$ no es cerrado en $K(X)$, entonces existe un $\{C(b_n,X)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $K(B,X)$ que converge a $C(x,X) \in K(X) \setminus K(B,X)$.
De esta manera, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en B. Como $\lim\limits_{n\to\infty} C(b_n,X) = C(x,X)$ y ya que ω_X es continua, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$. Como $C(x,X) \in K(X) \setminus K(B,X)$, entonces $x \in A$.

Sea $M = \{0\} \times [-1,1]$. Ya que $M \in C(x,A)$ y x no es punto extremo de A, por el *Lema 2*, existe $K \in C(x,A)$ tal que $K \not\subset M$ y $M \not\subset K$. Notemos que $K \in C(x,X)$. Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} C(b_n,X) = C(x,X)$, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in C(b_n,X)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = K$. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1.

Existe $\{n_s\}_{s=1}^{\infty}$ una sucesión de tal manera que $B_{n_s} \subset B$ para cada $s \in \mathbb{N}$.

En este caso, $\lim_{s\to\infty} B_{n_s} = K \subset \overline{B}$ y dado que $K \subset A$, entonces $K \subset M$, lo cual es una contradicción ya que $K \not\subset M$.

Caso 1.

Existe $\{n_s\}_{s=1}^{\infty}$ una sucesión de tal manera que $B_{n_s} \subset B$ para cada $s \in \mathbb{N}$.
En este caso, $\lim\limits_{s\to\infty} B_{n_s} = K \subset \overline{B}$ y dado que $K \subset A$, entonces $K \subset M$, lo cual es una contradicción ya que $K \not\subset M$.

Caso 2.

Existe $\{n_s\}_{s=1}^{\infty}$ una sucesión de tal manera que $B_{n_s} \not\subset B$ para cada $s \in \mathbb{N}$.
En este caso, $M \subset B_{n_s}$, para cada $s \in \mathbb{N}$, así que
$M \subset \lim\limits_{s\to\infty} B_{n_s} = K$, lo cual es una contradicción ya que $M \not\subset K$.

Se sigue que $K \notin \lim_{n \to \infty} C(b_n, X)$, es una contradicción al supuesto de que $K(B, X)$ no es cerrado en $K(X)$.

Se sigue que $K \notin \lim\limits_{n\to\infty} C(b_n, X)$, es una contradicción al supuesto de que $K(B, X)$ no es cerrado en $K(X)$.

Finalmente, $K(X) = K(A, X) \cup K(B, X)$, donde $\overline{K(A, X)}^{K(X)} \cap \overline{K(B, X)}^{K(X)} = \emptyset$. Por esto, $K(X)$ es localmente conexo.

$\square$

Continuos arco conexos.

Continuos arco conexos.

Definición

Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **arco conexo** o **conexo por arcos** si para cualesquiera $p, q \in X$ existe un arco A en X cuyos extremos son los puntos p y q.

Teorema

Sea X un continuo. Entonces $B \subset X$ es arco conexo si, y sólo si, $K(B, X)$ es arco conexo.

Teorema

Sea X un continuo. Entonces $B \subset X$ es arco conexo si, y sólo si, $K(B, X)$ es arco conexo.

Demostración:

$\Leftarrow$] Supongamos que $K(B, X)$ es arco conexo. Entonces, dado que ω_B es continua y $\omega_B(K(B, X)) = B$ se sigue que B es arco conexo.

Teorema

Sea X un continuo. Entonces $B \subset X$ es arco conexo si, y sólo si, $K(B, X)$ es arco conexo.

Demostración:

$\Leftarrow$] Supongamos que $K(B, X)$ es arco conexo. Entonces, dado que ω_B es continua y $\omega_B(K(B, X)) = B$ se sigue que B es arco conexo.

$\Rightarrow$] Supongamos que B es arco conexo en X. Consideremos $C(p, X), C(q, X) \in K(B, X)$ y un arco, A, en B que contine a los puntos p y q como extremos. Dado que A es localmente conexo como subespacio de X, $\alpha_X|_A$ es un homeomorfismo entre A y $\alpha_X(A)$. Como A es localmente conexo se sigue que A es arco conexo, más aún, $\alpha_X(A) \subset K(B, X)$ es un espacio arco conexo que contiene a $C(p, X)$ y a $C(q, X)$. Por esto, $K(B, X)$ es arco conexo. $\square$

Gracias por su atención.