Contraejemplos en Propiedades de Whitney

Iván Serapio Ramos

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (BUAP)
IX Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios.

Noviembre 2014

Introducción.

Presentaremos la construcción de una celda bidimensional cuyo hiperespacio de subcontinuos admite un nivel de Whitney con un retracto homeomorfo a una esfera. El ejemplo se debe a A. Petrus y se encuentra en *Contractibility of Whitney Continua in* $C(X)$, Gen. Top. and its Applications, 9 (1978), 275-288.

Convenciones.

Definición

Un **continuo** es un espacio topológico no vacío, conexo, compacto y metrizable.

Ejemplo

El intervalo cerrado $I = [0, 1]$.

Ejemplo

La bola *n*-dimensional unitaria,

$$D^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}.$$

Ejemplo

La esfera unitaria *n*-dimensional,

$$S^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}.$$

S^1 es la circunferencia unitaria y S^2 es la esfera unitaria.

Retractos.

Definición

Sea X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se dirá que Y es un retracto de X si existe una función continua $r : X \to Y$ de manera que, para cada $y \in Y$, $r(y) = y$.

Ejemplo

El intervalo cerrado I es un retracto de la recta real $\mathbb{R}$.
Considérese $r : \mathbb{R} \to I$ definida como,

$$r(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Proposición

Sean X y Y espacios topológicos cualesquiera. Si existen funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ de manera que $f(g(y)) = y$, para todo $y \in Y$, entonces X tiene un retracto homeomorfo a Y.

Definición

Un espacio topológico X tiene la propiedad del punto fijo si cualquier función continua $f : X \to X$ admite un punto fijo, esto es, existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Observación

La propiedad del punto fijo es una propiedad topológica.

Ejemplo

El intervalo cerrado I tiene la propiedad del punto fijo.

Teorema (del Punto Fijo de Brouwer)

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la bola n-dimensional D^n tiene la propiedad del punto fijo.

Ejemplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la esfera n-dimensioanl D^n no tiene la propiedad del punto fijo.
La función $f : S^n \to S^n$ dada por,

$$\forall \boldsymbol{x} \in S^n : f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x},$$

es una función continua que no tiene ningún punto fijo.

Proposición

Si X es un espacio topológico con la propiedad del punto fijo y Y es un retracto de X entonces Y también tiene la propiedad del punto fijo.

Definición

Un espacio metrizable Y es un retracto absoluto si es un retracto de todo espacio metrizable que lo contenga como subespacio cerrado.
Se usarán las siglas AR (del inglés, Absolute Retract) para abreviar retracto absoluto.

Observación

Ser un AR es una propiedad topológica.

Proposición

Toda celda n-dimensional es un AR.

Ejemplo

La esfera n-dimensional S^n no es un AR.

Nótese que S^n es un subespacio cerrado de D^{n+1}. Sin embargo, S^n no es un retracto de D^{n+1} ya que éste espacio tiene la propiedad del punto fijo a diferencia de S^n que no la posee.

Proposición

Todo retracto de un AR es un AR.

Contractibilidad

Definición

Un espacio topológico X es contráctil si existe $x_0 \in X$ y una función continua $H : X \times I \to X$ tal que,

$$\forall x \in X : H(x, 0) = x \text{ y } H(x, 1) = x_0.$$

Observación

La contractibilidad es una propiedad topológica.

Proposición

La bola n-dimensional B^n es contráctil.

Demostración.

Defínase $H : B^n \times I \to B^n$ como,

$$\forall \boldsymbol{x} \in B^n, t \in I : H(\boldsymbol{x}, t) = (1 - t)\boldsymbol{x}.$$

$\square$

Ejemplo

La esfera n-dimensional S^n no es contráctil.

Proposición

Si X es un espacio topológico contráctil y Y es un retracto de X entonces Y también es contráctil.

Hiperespacios

Definición

Dado un continuo X define su hiperespacio de subcontinuos como el conjunto

$$C(X) = \{K \subseteq X \mid K \text{ es no vacío, conexo y cerrado en } X\}$$

equipado con la topología de Vietoris.

Proposición

Si X es un continuo entonces $C(X)$ también es un continuo.

Definición

Sea X un continuo arbitrario. Una función de Whitney para $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ tal que

(1) para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$,

(2) para cualesquiera $K, L \in C(X)$ con $K \subset L$ se cumple que $\mu(K) < \mu(L)$.

Teorema

Todo continuo admite funciones de Whitney para su hiperespacio de subcontinuos.

Definición

Dado un continuo X, se define el **hiperespacio de arcos y singulares de X** como el conjunto

$$\mathfrak{M}(X) = \{K \in C(X) \,|\, K \text{ es un singular o un arco en } X\}$$

visto como subespacio de $C(X)$.

Teorema

Sean X un continuo y $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ una función de Whitney. Para cada $K \in \mathfrak{M}(X)$ se tiene un único punto $P_\mu(K) \in K$ de manera que existen $K_1, K_2 \in C(X)$ con $K = K_1 \cup K_2$, $K_1 \cap K_2 = \{P_\mu(K)\}$ $\mu(K_1) = \mu(K_2)$. El punto $P_\mu(K)$ se conoce como el punto medio de K respecto de μ.

Teorema

Si X es un arco o una curva cerrada simple entonces, para toda función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, \infty)$, la función $P_\mu : \mathfrak{M}(X) \to X$ es una función continua.

Niveles de Whitney.

Definición

Sean X un continuo y $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ una función de Whitney. Dado $0 \leq \theta < \mu(X)$ se define el nivel de Whitney θ de $C(X)$ respecto de μ como el conjunto $W_\mu(\theta) = \mu^{-1}[\{\theta\}]$ con la topología de subespacio que hereda de $C(X)$.

Definición

Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una propiedad de Whitney si cada vez que un continuo cumple $\mathcal{P}$ entonces todos los niveles de Whitney de su hiperespacio de subcontinuos también cumplen $\mathcal{P}$.

Teorema

Ser un continuo no degenerado es un propiedad de Whitney.

Ejemplo

Existe una celda bidimensional cuyo hiperespacio de subcontinuos admite un nivel de Whitney que tiene un retracto homeomorfo a la esfera S^2.

Teorema

La contractibilidad, la propiedad del punto fijo y ser un AR no son propiedades de Whitney.

Demostración.

El esquema de la prueba es el mismo para las tres propiedades pues todas son propiedades que se heredan a retractos, que tienen las celdas bidimensionales pero que la esfera no posee. Finalmente se refiere al ejemplo anterior. $\square$

Teorema

Ser una celda bidimensional no es una propiedad de Whitney.

Demostración.

Obsérvese que las celdas bidimensionales no tienen retractos homeomorfos a una esfera y aplíquese al mismo ejemplo que en el teorema anterior. □