Definición

Una función f es *transitiva* si para cualesquiera abiertos no vacíos U, V, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.
Se dice que f es *débilmente mezclante* si para cualesquiera dos parejas (U_1, U_2) y (V_1, V_2) de abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \neq f^n(U_2) \cap V_2$.
Si (X, f) es un sistema dinámico con f transitiva (débilmente mezclante) diremos que el sistema dinámico (X, f) es transitivo (débilmente mezclante)

Definición

Una función f es *transitiva* si para cualesquiera abiertos no vacíos U, V, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.
Se dice que f es *débilmente mezclante* si para cualesquiera dos parejas (U_1, U_2) y (V_1, V_2) de abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \neq f^n(U_2) \cap V_2$.
Si (X, f) es un sistema dinámico con f transitiva (débilmente mezclante) diremos que el sistema dinámico (X, f) es transitivo (débilmente mezclante)

Teorema de Furstenberg

Si f es débilmente mezclante y $\{U_1, \ldots, U_n\}$, $\{V_1, \ldots, V_n\}$ son colecciones de abiertos no vacíos, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$.

Definición

Una función f es *transitiva* si para cualesquiera abiertos no vacíos U, V, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.
Se dice que f es *débilmente mezclante* si para cualesquiera dos parejas (U_1, U_2) y (V_1, V_2) de abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \neq f^n(U_2) \cap V_2$.
Si (X, f) es un sistema dinámico con f transitiva (débilmente mezclante) diremos que el sistema dinámico (X, f) es transitivo (débilmente mezclante)

Teorema de Furstenberg

Si f es débilmente mezclante y $\{U_1, \ldots, U_n\}$, $\{V_1, \ldots, V_n\}$ son colecciones de abiertos no vacíos, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$.

Para (X, τ) definimos $2^X = \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado no vacío de } X\}$

Definición

Una función f es *transitiva* si para cualesquiera abiertos no vacíos U, V, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.
Se dice que f es *débilmente mezclante* si para cualesquiera dos parejas (U_1, U_2) y (V_1, V_2) de abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \neq f^n(U_2) \cap V_2$.
Si (X, f) es un sistema dinámico con f transitiva (débilmente mezclante) diremos que el sistema dinámico (X, f) es transitivo (débilmente mezclante)

Teorema de Furstenberg

Si f es débilmente mezclante y $\{U_1, \ldots, U_n\}$, $\{V_1, \ldots, V_n\}$ son colecciones de abiertos no vacíos, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$.

Para (X, τ) definimos $2^X = \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado no vacío de } X\}$

Si X es una función continua y cerrada, defino $2^f : 2^X \to 2^X$ como $2^f(A) = f(A)$ para $A \in 2^X$

Entonces $(2^X, 2^f)$ es un sistema dinámico.

Entonces $(2^X, 2^f)$ es un sistema dinámico.
A partir de los resultados de J. Banks en "*Chaos for induced hyperspace maps*" (2005), se tienen las equivalencias:

1. (X, f) es débilmente mezclante.
2. $(2^X, 2^f)$ es débilmente mezclante.
3. $(2^X, 2^f)$ es transitivo.

Entonces $(2^X, 2^f)$ es un sistema dinámico.
A partir de los resultados de J. Banks en "*Chaos for induced hyperspace maps*" (2005), se tienen las equivalencias:

1. (X, f) es débilmente mezclante.
2. $(2^X, 2^f)$ es débilmente mezclante.
3. $(2^X, 2^f)$ es transitivo.

¿Existe alguna propiedad Q tal que (X, f) la posee si y sólo si $(2^X, 2^f)$ es transitivo?

Entonces $(2^X, 2^f)$ es un sistema dinámico.
A partir de los resultados de J. Banks en "*Chaos for induced hyperspace maps*" (2005), se tienen las equivalencias:

1. (X, f) es débilmente mezclante.
2. $(2^X, 2^f)$ es débilmente mezclante.
3. $(2^X, 2^f)$ es transitivo.

¿Existe alguna propiedad Q tal que (X, f) la posee si y sólo si $(2^X, 2^f)$ es transitivo?

Definición

Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ una familia finita de subconjuntos de X, denotamos por $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ al conjunto de todos los cerrados no vacíos de X contenidos en la unión de los U_i y que intersectan a cada U_i, es decir

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{F \in 2^X \mid F \subseteq \bigcup_1^n U_i \text{ y } F \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i\}$$

Sabemos que si X es un espacio topológico, la colección

$$\beta_V = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \mid U_i \text{ es abierto } \}$$

es una base de una topología τ_v en 2^X, a la que llamamos *topología de Vietoris*.
A los básicos de τ_V les llamamos *vietóricos*.

Sabemos que si X es un espacio topológico, la colección

$$\beta_V = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \mid U_i \text{ es abierto } \}$$

es una base de una topología τ_v en 2^X, a la que llamamos *topología de Vietoris*.
A los básicos de τ_V les llamamos *vietóricos*.
Los resultados de J. Banks fueron probados usando τ_V.

Sabemos que si X es un espacio topológico, la colección

$$\beta_V = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \mid U_i \text{ es abierto } \}$$

es una base de una topología τ_v en 2^X, a la que llamamos *topología de Vietoris*.
A los básicos de τ_V les llamamos *vietóricos*.
Los resultados de J. Banks fueron probados usando τ_V.

Para O abierto de X y K compacto de X, denotamos

$$\langle X, O \rangle = \{F \in 2^X \mid F \cap O \neq \emptyset\}$$

$$\langle X \setminus K \rangle = \{F \in 2^X \mid F \subseteq X \setminus K\}$$

Sabemos que si X es un espacio topológico, la colección

$$\beta_V = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \mid U_i \text{ es abierto } \}$$

es una base de una topología τ_v en 2^X, a la que llamamos *topología de Vietoris*.
A los básicos de τ_V les llamamos *vietóricos*.
Los resultados de J. Banks fueron probados usando τ_V.

Para O abierto de X y K compacto de X, denotamos

$$\langle X, O \rangle = \{F \in 2^X \mid F \cap O \neq \emptyset\}$$

$$\langle X \setminus K \rangle = \{F \in 2^X \mid F \subseteq X \setminus K\}$$

Definimos a la topología de Fell en 2^X, denotada por τ_F como aquella que tiene por subbase a la familia
$\{\langle X, O \rangle \mid O \text{ es abierto de } X\} \cup \{\langle X \setminus K \rangle \mid K \text{ es compacto de } X\}$.

Como

$$\langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle$$

$$\langle X \setminus K_1 \rangle \cap \langle X \setminus K_2 \rangle = \langle X \setminus (K_1 \cup K_2) \rangle$$

Como

$$\langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle$$

$$\langle X \setminus K_1 \rangle \cap \langle X \setminus K_2 \rangle = \langle X \setminus (K_1 \cup K_2) \rangle$$

Una base para τ_F en 2^X es

$$\{ \langle X, U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle X \setminus K \rangle \mid U_i \text{ abierto y } K \text{ compacto } \}$$

Como

$$\langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle$$

$$\langle X \setminus K_1 \rangle \cap \langle X \setminus K_2 \rangle = \langle X \setminus (K_1 \cup K_2) \rangle$$

Una base para τ_F en 2^X es

$$\{\langle X, U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle X \setminus K \rangle \mid U_i \text{ abierto y } K \text{ compacto } \}$$

¿Existe alguna relación entre τ_F y τ_V?

Como

$$\langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle$$

$$\langle X \setminus K_1 \rangle \cap \langle X \setminus K_2 \rangle = \langle X \setminus (K_1 \cup K_2) \rangle$$

Una base para τ_F en 2^X es

$$\{ \langle X, U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle X \setminus K \rangle \mid U_i \text{ abierto y } K \text{ compacto } \}$$

¿Existe alguna relación entre τ_F y τ_V?

- Si X es un espacio T_2, entonces $\tau_F \subseteq \tau_V$.
- Si X es un espacio compacto, entonces $\tau_V \subseteq \tau_F$

Como

$$\langle X, U_1\rangle \cap \langle X, U_2\rangle = \langle X, U_1, U_2\rangle$$

$$\langle X \setminus K_1\rangle \cap \langle X \setminus K_2\rangle = \langle X \setminus (K_1 \cup K_2)\rangle$$

Una base para τ_F en 2^X es

$$\{\langle X, U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle \mid U_i \text{ abierto y } K \text{ compacto }\}$$

¿Existe alguna relación entre τ_F y τ_V?

- Si X es un espacio T_2, entonces $\tau_F \subseteq \tau_V$.
- Si X es un espacio compacto, entonces $\tau_V \subseteq \tau_F$

Si f es continua y cerrada, entonces bajo τ_V el sistema $(2^X, 2^f)$ está bien definido.
Con τ_F es necesario pedir que la función sea *propia* (función continua tal que la imagen inversa de compactos es compacta).
Pero podemos aplicarlo a espacios X que son localmente compactos, T_2 y segundo numerables y obtener que el sistema $(2^X, 2^f)$ está bien definido.

Definición

Sean X un espacio topológico y U un abierto no vacío de X. Si $X \setminus U$ es compacto, decimos que U es *co-compacto*.

Definición

Sean X un espacio topológico y U un abierto no vacío de X. Si $X \setminus U$ es compacto, decimos que U es *co-compacto*.

Definición (Importante)

Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que f es *c-transitiva* si para cualesquiera dos colecciones $\{U_1, O_1, O_2, \ldots, O_s\}$ y $\{U_2, W_1, W_2, \ldots, W_t\}$ de subconjuntos abiertos de X que cumplan las siguientes dos condiciones:

a) U_1 y U_2 son abiertos co-compactos de X,

b) $U_1 \cap O_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq s$ y $U_2 \cap W_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq t$.

Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^m(U_1) \cap (W_j \cap U_2) \neq \emptyset \text{ para cada } 1 \leq j \leq t \quad \text{y}$$

$$f^m(O_j \cap U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \text{ para cada } 1 \leq j \leq s$$

Si f es débilmente mezclante, entonces f es c-transitiva.

Teorema

Sean X un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable y $f : X \to X$ una función propia, entonces la función inducida $2^f : (2^X, \tau_F) \to (2^X, \tau_F)$ es transitiva si y sólo si f es c-transitiva.

Teorema

Sean X un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable y $f\colon X \to X$ una función propia, entonces la función inducida $2^f\colon (2^X, \tau_F) \to (2^X, \tau_F)$ es transitiva si y sólo si f es c-transitiva.

Demostración

$\Leftarrow$] Para ver que 2^f es transitiva, sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos abiertos básicos y no vacíos de $(2^X, \tau_F)$. La demostración termina si mostramos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(2^f)^m(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Hagamos

$$\mathcal{A} = \langle X, O_1, \ldots, O_s \rangle \cap \langle X \setminus K_1 \rangle \ \text{ y } \ \mathcal{B} = \langle X, W_1, \ldots, W_t \rangle \cap \langle X \setminus K_2 \rangle$$

Consideremos las colecciones

$$(X \setminus K_1, O_1, O_2, \ldots, O_s) \quad \text{y} \quad (X \setminus K_2, W_1, W_2, \ldots, W_t).$$

Notemos que los conjuntos $U_1 = X \setminus K_1$ y $U_2 = X \setminus K_2$ son co-compactos de X. Así, la condición a) de la definición se cumple.

Demostración

Tomemos $F \in \mathcal{A}$. Entonces $F \in 2^X$, $F \cap K_1 = \emptyset$ (por tanto $F \subseteq U_1$) y $F \cap O_j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Esto implica que $U_1 \cap O_j \neq \emptyset$, para toda $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Tomando ahora un elemento en $\mathcal{B}$ y realizando un análisis similar al que hicimos con F, obtenemos que $U_2 \cap W_j \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Entonces la condición b) de la definición también se cumple. Como f es c-transitiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^m(U_1) \cap (W_j \cap U_2) \neq \emptyset, \quad \text{para cada } 1 \leq j \leq t$$

y

$$f^m(O_j \cap U_1) \cap U_2 \neq \emptyset, \quad \text{para cada } 1 \leq j \leq s.$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ tomamos $x_i \in U_1$ tal que $f^m(x_i) \in W_i \cap U_2$. También, para toda $p \in \{1, 2, \ldots, s\}$, tomamos $y_p \in O_p \cap U_1$ de modo que $f^m(y_p) \in U_2$. Definimos

$$D = \{x_1, x_2, \ldots, x_t, y_1, y_2, \ldots, y_s\}.$$

Demostración

Como X es un espacio T_2, sabemos que D es un cerrado y no vacío. También es fácil notar que

$$D \in \langle X, O_1, \ldots, O_s \rangle \cap \langle X \setminus K_1 \rangle = \mathcal{A} \quad \text{y}$$
$$(2^f)^m(D) \in \langle X, W_1, \ldots, W_t \rangle \cap \langle X \setminus K_2 \rangle = \mathcal{B}.$$

Lo anterior debido a que

$$D = \{x_1, x_2, \ldots, x_t, y_1, y_2, \ldots, y_s\},$$

y a que los x_i, y_p están en U_1 y los y_p están en O_p para $1 \leq i \leq t$ y $1 \leq p \leq s$. Además de que los $f^m(x_i)$, $f^m(y_p)$ viven en U_2 y los $f^m(x_i)$ están en los W_i. Con todo, hemos mostrado que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(2^f)^m(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Esto prueba que 2^f es transitiva.

Demostración

⇒**]** Supongamos que 2^f es transitiva. Para ver que f es c-transitiva, sean

$$\{U_1, O_1, O_2, \ldots, O_s\} \quad \text{y} \quad \{U_2, V_1, V_2, \ldots, V_t\}$$

dos colecciones de subconjuntos abiertos de X que cumplan las condiciones a) y b) de la definición. Entonces U_1 y U_2 son abiertos en X tales que $X \setminus U_1$ y $X \setminus U_2$ son compactos. Luego

$$\mathcal{U} = \langle X, O_1, \ldots, O_s \rangle \cap \langle U_1 \rangle \quad \text{y} \quad \mathcal{V} = \langle X, V_1, \ldots, V_t \rangle \cap \langle U_2 \rangle$$

son abiertos básicos y no vacíos de $(2^X, \tau_F)$. Como 2^f es transitiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(2^f)^m(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$.
Sea $F \in \mathcal{U}$ tal que $f^m(F) \in \mathcal{V}$. Como el hiperespacio es 2^X, los cerrados son no vacíos, mostrando que $f^m(U_1) \cap (V_j \cap U_2) \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq t$ y $f^m(O_j \cap U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ con $1 \leq j \leq s$. Por tanto, f es c-transitiva.

Proposición

Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es una función c-transitiva, U es un co-compacto de X y V es un abierto no vacío de X, entonces se cumple:

1. *existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$*
2. *existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$*

Proposición

Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es una función c-transitiva, U es un co-compacto de X y V es un abierto no vacío de X, entonces se cumple:

1. *existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$*
2. *existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$*

Demostración (1)

Tomemos a las colecciones de abiertos $\mathcal{A} = \{U, X\}$ y $\mathcal{B} = \{X, V\}$. sabemos que U es co-compacto por hipótesis, X es trivialmente co-compacto y $U \cap X \neq \emptyset \neq X \cap V$. Por tanto, se cumplen las hipótesis de la Definición Importante. Como f es c-transitiva, existe $m \in \ \mathbb{N}$ tal que

$$f^m(U) \cap (X \cap V) \neq \emptyset \text{ y } f^m(U \cap X) \cap X \neq \emptyset.$$

Es decir, $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

Demostración (2)

Sean $\mathcal{A} = \{X, V\}$ y $\mathcal{B} = \{U, X\}$ colecciones de abiertos. U es co-compacto por hipótesis, X es trivialmente co-compacto y $X \cap V \neq \emptyset \neq U \cap X$. Así se cumplen las hipótesis de la Definición Importante. Como f es c-transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(X) \cap (U \cap X) \neq \emptyset \text{ y } f^n(X \cap V) \cap U \neq \emptyset.$$

Por tanto, $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$.

Demostración (2)

Sean $\mathcal{A} = \{X, V\}$ y $\mathcal{B} = \{U, X\}$ colecciones de abiertos. U es co-compacto por hipótesis, X es trivialmente co-compacto y $X \cap V \neq \emptyset \neq U \cap X$. Así se cumplen las hipótesis de la Definición Importante. Como f es c-transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(X) \cap (U \cap X) \neq \emptyset \text{ y } f^n(X \cap V) \cap U \neq \emptyset.$$

Por tanto, $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$.

Corolario

Sean X un espacio compacto y (X, f) un sistema dinámico. Si f es una función c-transitiva, entonces f es transitiva.

Demostración (2)

Sean $\mathcal{A} = \{X, V\}$ y $\mathcal{B} = \{U, X\}$ colecciones de abiertos. U es co-compacto por hipótesis, X es trivialmente co-compacto y $X \cap V \neq \emptyset \neq U \cap X$. Así se cumplen las hipótesis de la Definición Importante. Como f es c-transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(X) \cap (U \cap X) \neq \emptyset \text{ y } f^n(X \cap V) \cap U \neq \emptyset.$$

Por tanto, $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$.

Corolario

Sean X un espacio compacto y (X, f) un sistema dinámico. Si f es una función c-transitiva, entonces f es transitiva.

Habíamos mencionado que el mezclado débil implica c-transitividad.

Demostración (2)

Sean $\mathcal{A} = \{X, V\}$ y $\mathcal{B} = \{U, X\}$ colecciones de abiertos. U es co-compacto por hipótesis, X es trivialmente co-compacto y $X \cap V \neq \emptyset \neq U \cap X$. Así se cumplen las hipótesis de la Definición Importante. Como f es c-transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(X) \cap (U \cap X) \neq \emptyset \text{ y } f^n(X \cap V) \cap U \neq \emptyset.$$

Por tanto, $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$.

Corolario

Sean X un espacio compacto y (X, f) un sistema dinámico. Si f es una función c-transitiva, entonces f es transitiva.

Habíamos mencionado que el mezclado débil implica c-transitividad. Existe un ejemplo de un espacio no compacto donde la c-transitividad no implica el mezclado débil.

Con lo anterior tenemos que bajo τ_F, la c-transitividad es una propiedad distinta al mezclado débil tal que si (X, f) es c-transitivo, entonces $(2^X, 2^f)$ es transitivo.

Con lo anterior tenemos que bajo τ_F, la c-transitividad es una propiedad distinta al mezclado débil tal que si (X, f) es c-transitivo, entonces $(2^X, 2^f)$ es transitivo.

Referencia

Characterizing mixing, weak mixing and transitivity of induced hyperspace dynamical systems. Yangeng Wang, Guo Wei (2007)