Propiedad de la composición factor

Emanuel Ramírez Márquez
Dra. María de Jesús López Toriz

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
BUAP
IX Taller estudiantil de teoría de los continuos y sus hiperespacios

19 de Noviembre, 2014

Definiciones

Definición 1

Sea f una función continua y suprayectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y, decimos que f es:
(I) Un **homeomorfismo**, $\mathcal{H}$, si f es inyectiva y la función inversa f^{-1} es continua.
(II) **Abierta**, $\mathcal{O}$, si la imagen bajo f de cada conjunto abierto en X es un conjunto abierto en Y.
(III) **Atómica**, $\mathcal{A}$, si para cualquier subcontinuo, K, de X tal que el conjunto $f(K)$ es no degenerado, se tiene que $f^{-1}(f(K)) = K$.
(IV) **Monótona**, $\mathcal{M}$, si para cualquier punto $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(\{y\})$ es conexo.

Definiciones

(V) **Confluente**, $\mathcal{C}$, si para cualquier subcontinuo, Q, de Y y cualquier componente, K, de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(K) = Q$.
(VI) **Semiconfluente**, $\mathcal{SC}$, si para cualquier subcontinuo, Q, de Y y para cualesquiera dos componentes, C_1 y C_2, de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(C_1) \subset f(C_2)$ o $f(C_2) \subset f(C_1)$.
(VII) **Débilmente confluente**, $\mathcal{DC}$, si para cualquier subcontinuo, Q, de Y existe una componente, K, de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(K) = Q$.

Definición 2

Sea $\mathbf{A}$ una una clase de funciones arbitraria y sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. Decimos que f está en la clase local de $\mathbf{A}$, $Loc(\mathbf{A})$, si para cualquier punto $x \in X$ existe una vecindad cerrada, $\mathcal{V}$, de x en X, tal que $f(\mathcal{V})$ es una vecindad cerrada de $f(x)$ en Y y la función restricción $f\mid_{\mathcal{V}}$ pertenece a la clase $\mathbf{A}$.

Propiedad de la composición factor

Definición 3

Sea **A** una clase de funciones continuas y suprayectivas. Decimos que la clase **A** tiene la **propiedad de la composición factor**, si para cada función $f : X \to Y$ que pertenece a **A** tal que se puede factorizar en dos funciones, es decir, existen $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$ continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$, implica que $g \in \mathbf{A}$.

Propiedad de la composición

Teorema

Las siguientes clases de funciones tienen la propiedad de la composición factor:
(I) La clase de los homeomorfismos, $\mathcal{H}$.
(II) La clase de las funciones abiertas, $\mathcal{O}$.
(III) La clase de las funciones monótonas, $\mathcal{M}$.
(IV) La clase de las funciones confluentes, $\mathcal{C}$.
(V) La clase de las funciones débilmente confluentes, $\mathcal{DC}$.

Demostración

(I) Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo entre espacios métricos compactos. Supongamos que existen funciones, $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$, continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Veamos que $g \in \mathcal{H}$.

Probaremos primero que g es inyectiva, supongamos que g no lo es, es decir, que existen puntos distintos, z_1 y z_2, en Z tales que $g(z_1) = g(z_2)$. Como h es suprayectiva, entonces tomemos x_1 y x_2 en X tales que $h(x_1) = z_1$ y $h(x_2) = z_2$. Luego, $f(x_1) = g \circ h(x_1) = g(z_1) = g(z_2) = g \circ h(x_2) = f(x_2)$. De modo que $f(x_1) = f(x_2)$ lo cual no puede ser pues f es inyectiva.
De este modo g es inyectiva. Por lo tanto g es biyectiva.
Análogamente se puede mostrar que h es biyectiva.

Demostración

Resta ver que g^{-1} es continua. Note que $f^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$ por lo cual $h \circ f^{-1} = h \circ h^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1}$. Como h y f^{-1} son continuas, entonces g^{-1} es continua. Por lo tanto g es un homeomorfismo. Por lo tanto, $\mathcal{H}$ tiene la propiedad de la composición factor.

Demostración

Sea $f : X \to Y$ una función abierta entre espacios métricos compactos. Supongamos que existen funciones, $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$, continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Veamos que g es abierta.

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en Z, como h es continua se tiene que el conjunto $\mathcal{V} = h^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X y, dado que h es suprayectiva se tiene que $h(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$. Así $g(\mathcal{U}) = g(h(\mathcal{V})) = g \circ h(\mathcal{V}) = f(\mathcal{V})$ con $\mathcal{V}$ un abierto en X.
Dado que f es una función abierta se tiene que $f(\mathcal{V})$ es un conjunto abierto en Y, es decir, $g(\mathcal{U})$ es abierto en Y. Por lo tanto g es abierta.

Demostración

(III)Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos monótona. Supongamos que existen, $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$, funciones continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Probaremos que g es monótona.

Consideremos un punto $y \in Y$, como f es monótona entonces $f^{-1}(\{y\})$ es un conjunto conexo. Dado que h es continua tenemos que $h(f^{-1}(\{y\}))$ es conexo en Z. Veamos que $h(f^{-1}(\{y\})) = g^{-1}(\{y\})$.

Demostración

$\subseteq$] Tomemos $z \in h(f^{-1}(\{y\}))$, entonces existe $x \in f^{-1}(\{y\})$ tal que $h(x) = z$. Ahora $g(z) = g(h(x)) = g \circ h(x) = f(x) = y$. De donde $z \in g^{-1}(\{y\})$.

$\supseteq$] Sea $z \in g^{-1}(\{y\})$. Dado que h es suprayectiva existe $x \in X$ tal que $h(x) = z$. Ahora $y = g(z) = g(h(x)) = f(x)$. De modo que $x \in f^{-1}(\{y\})$ y $z = h(x)$, por lo que $z \in h(f^{-1}(\{y\}))$.

Se sigue que el conjunto $g^{-1}(\{y\})$ es conexo. Por lo cual $g \in \mathcal{M}$ y, por lo tanto, la clase $\mathcal{M}$ tiene la propiedad de la composición factor.

Demostración

(IV)Sea $f : X \to Y$ una función confluente entre espacios métricos compactos. Supongamos que existen $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$ funciones continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Probaremos que g es confluente.

Sea Q un subcontinuo de Y y C una componente de $g^{-1}(Q)$. Consideremos un punto $z \in C$, como h es suprayectiva entonces existe $x \in X$ tal que $h(x) = z$, como $f(x) = g(h(x)) = g(z) \in Q$, se tiene que $x \in f^{-1}(Q)$. Sea C' la componente de $f^{-1}(Q)$ que contiene al punto x. Dado que f es confluente, $Q = f(C') = g \circ h(C') = g(h(C'))$, de modo que $h(C') \subset g^{-1}(Q)$. Como C' es conexo y $h(C') \cap C \neq \emptyset$, dado que C es una componente de $g^{-1}(Q)$ entonces $h(C') \subset C$. Así, $f(C') = g(h(C')) \subset g(C)$. Se sigue que $g(C) = Q$. Por lo tanto, g es confluente.

$\square$

Clase Loc($\mathcal{M}$)

La clase de las funciones Loc($\mathcal{M}$) no tiene la propiedad de la composición factor.

Ejemplo

Sea $f : [-2, 2] \to [0, 1]$ definida por:

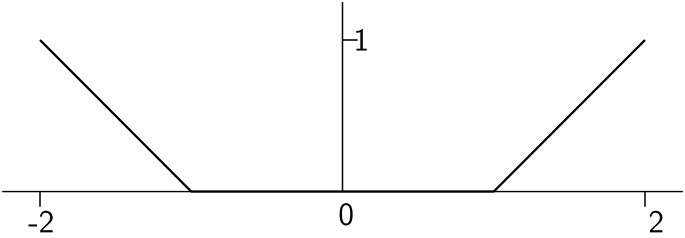
$$f(x) = \begin{cases} \mid x \mid -1, & \text{si } x \in [-2, -1] \cup [1, 2], \\ 0, & \text{si } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

La función f es localmente monótona y f Se puede escribir como la composición de dos funciones $h : [-2, 2] \to [-1, 1]$ y $g : [-1, 1] \to [0, 1]$ definidas por:

$$h(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \in [-2, -1], \\ 0, & \text{si } x \in [-1, 1], \\ x - 1, & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

$$g(x) = |\ x\ | \ .$$

Tenemos que $f = g \circ h$ y g no es localmente monótona.



Probaremos primero que $f \in Loc(\mathcal{M})$. Para esto, sea $x \in [-2, 2]$.
Caso 1. Si $x \in [-2, 0)$, entonces $\mathcal{V} = [-2, 0]$ es una vecindad cerrada de x y $f(\mathcal{V}) = [0, 1]$ es una vecindad cerrada de $f(x)$. Veamos que $f|_{\mathcal{V}}$ es monótona. Sea $y \in [0, 1]$.

(i) Si $y \in (0, 1]$, entonces $(f|_{\mathcal{V}})^{-1}(\{y\}) = \{y\}$ que es conexo.

(ii) Si $y = 0$, entonces $(f|_{\mathcal{V}})^{-1}(\{0\}) = [-1, 0]$ el cual es conexo.
Por lo tanto $f|_{\mathcal{V}}$ es monótona.

Caso 2. Si $x \in [0, 2]$, entonces $\mathcal{V} = [-1, 2]$ es una vecindad cerrada de x con $f(\mathcal{V}) = [0, 1]$ es una vecindad cerrada de $f(x)$.
con un argumento similar al del caso 1 se puede ver que $f\mid_{\mathcal{V}}$ es monótona.
Por lo tanto f es Localmente monótona.

Veamos ahora que g no es localmente monótona. Sea $\mathcal{V}$ una vecindad del punto 0, entonces exite $\varepsilon > 0$ tal que $B(0, \varepsilon) \subset \mathcal{V}$. Note que para el punto $\frac{\varepsilon}{2} \in g(\mathcal{V})$ el conjunto $g^{-1}(\{\frac{\varepsilon}{2}\}) = \{-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$ no es conexo. Luego la función $g\mid_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \to g(\mathcal{V})$ no es monótona. Se sigue que g no es localmante monótona.

$\square$

Clase Loc($\mathcal{SC}$)

La clase de las funciones Loc($\mathcal{SC}$) no tiene la propiedad de la composición factor

Ejemplo

Consideremos los continuos $X \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$X = L \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n),$$

donde $L = [-2, 2] \times \{0\}$;
$I_n = \{(2 - \alpha, \frac{1-\alpha}{n}) : \alpha \in [0, 1]\}$;
$J_n = \{(-2 + \alpha, -\frac{1-\alpha}{n}) : \alpha \in [0, 1]\}$.

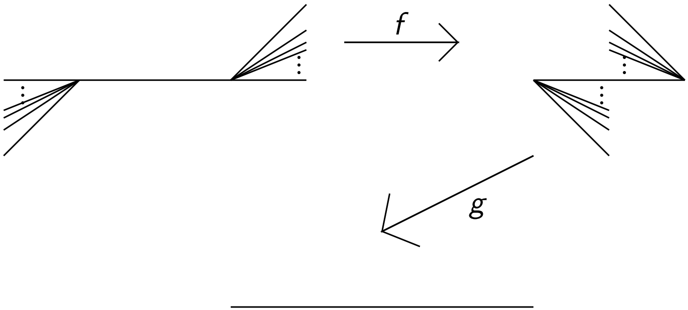
y $Y \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$Y = L' \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I'_n) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J'_n),$$

donde $L' = [-1,1] \times \{0\}$;
$I'_n = \{(\alpha, \frac{1-\alpha}{n}) : \alpha \in [0,1]\}$;
$J'_n = \{(-\alpha, -\frac{\alpha-1}{n}) : \alpha \in [0,1]\}$.
Sean $h : X \to Y$ y $g : Y \to [-1,1]$ dadas por:

$$h((x,y)) = (1- \mid 2- \mid x-1 \mid\mid, y);$$
$$g((x,y)) = x.$$

Tenemos que la función $f = g \circ h$ es localmente semiconfluente y la función g no es localmente semiconfluente.


f
g

Veamos que f es localmente semiconfluente.
Sea $x \in X$,

Caso 1. Si $x \in ([-2, 0) \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n)$. Definamos $\mathcal{V} = ([-2, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n)$, observe que $\mathcal{V}$ es una vecindad cerrada de x, $f(\mathcal{V}) = [-1, \frac{1}{2}]$ es una vecindad cerrada de $f(x)$ y $f\mid_{\mathcal{V}}$ es semiconfluente.

Sea Q un subcontinuo de $[-1, \frac{1}{2}]$ de modo que Q es de la forma $[a, b]$, donde $-1 \leq a \leq b \leq \frac{1}{2}$.

(i) Si $a > 0$ entonces $f\mid_{\mathcal{V}}^{-1}(Q) = [a, b] \times \{0\}$

(ii) Si $a = -1$ entonces

$-$ Si $b \geq 0$, $f\,|_{\mathcal{V}}^{-1}(Q) = [-1, b] \times \{0\} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n)$

$-$ Si $b < 0$, $f\,|_{\mathcal{V}}^{-1}(Q) = [-1, b] \times \{0\} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n)$, donde
$K_n = \{(b - \alpha(b-2), \frac{1-\alpha(b-1)}{n}) : \alpha \in [0,1]\}$.
De modo que $f\,|_{\mathcal{V}}^{-1}(Q)$ es conexo.

(iii) Si $-1 < a < 0$, entonces

$-$ Si $b \leq 0$, tenemos que $f\,|_{\mathcal{V}}^{-1}(Q) = [a, b] \times \{0\} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n)$, donde

$$K_n = \{(b - \alpha(b-a), \tfrac{b-2-\alpha(b-a)}{n}) : \alpha \in [0,1]\}.$$

Note que $[a,b]\times\{0\}$, $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son las componentes de $f\mid_{\mathcal{V}}^{-1}(Q)$, $f\mid_{\mathcal{V}}([a,b]\times\{0\}) = Q$ y $f\mid_{\mathcal{V}}(K_n) = Q$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Luego, para cualesquiera dos componentes de $f\mid_{\mathcal{V}}^{-1}(Q)$, C_1, C_2, se tiene que $f\mid_{\mathcal{V}}(C_1) = f\mid_{\mathcal{V}}(C_2)$.

$-$ Si $b>0$, tenemos que $f\mid_{\mathcal{V}}^{-1}(Q) = [a,b]\times\{0\}\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n)$, donde

$$K_n = \{(\alpha a, \tfrac{\alpha a-2}{n}) : \alpha\in[0,1]\}.$$

Note que $[a,b]\times\{0\}$, $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son las componentes de $f\mid_{\mathcal{V}}^{-1}(Q)$, $f\mid_{\mathcal{V}}([a,b]\times\{0\}) = Q$ y $f\mid_{\mathcal{V}}(K_n) = [a,0]$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Luego, para cualesquiera dos componentes de $f\mid_{\mathcal{V}}^{-1}(Q)$, C_1, C_2, se tiene que

Si $C_1 = K_n$, $C_2 = K_m$ con $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $f|_{\mathcal{V}}(C_1) = f|_{\mathcal{V}}(C_2)$.
Si $C_1 = [a, b] \times \{0\}$, entonces $f|_{\mathcal{V}}(C_2) \subseteq f|_{\mathcal{V}}(C_1)$.

Por lo tanto $f|_{\mathcal{V}}$ es semiconfluente.

Caso 2. Si $x \in ([0, 2] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n)$. Tomemos la vecindad cerrada de x como $\mathcal{V} = ([-\frac{1}{2}, 2] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n)$, observe que $f(\mathcal{V}) = [-1, \frac{1}{2}]$ es una vecindad cerrada de $f(x)$. Con un razonamiento similar al del *Caso 1* podemos ver que $f_{\mathcal{V}}$ es semiconfluente. Por lo que podemos concluir que la función f es localmente semiconfluente.

Resta ver que g no es localmente semiconfluente. Para esto, tomemos el punto $y \in Y$ como $y = (0,0)$ y $\mathcal{V}$ un vecindad de y, de modo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, y) \cap Y \subseteq \mathcal{V}$, note que $[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}] \times \{0\} \subseteq \mathcal{V}$, de modo que $g([-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}] \times \{0\}) = [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}] \subset g(\mathcal{V})$. Observe que $Q = [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ es un subcontinuo de $g(\mathcal{V})$.

Por otro lado, dado que $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, tomemos C_1 y C_2 componentes de $g\mid_{\mathcal{V}}(Q)$ donde

$$C_1 = \{(\tfrac{\alpha\varepsilon}{2}, \tfrac{1-\frac{\varepsilon}{2}\alpha}{N}) : \alpha \in [0,1]\},$$
$$C_2 = \{(-\tfrac{\alpha\varepsilon}{2}, \tfrac{\frac{\varepsilon}{2}\alpha-1}{N}) : \alpha \in [0,1]\}.$$

tenemos que $g\mid_{\mathcal{V}}(C_1) = [0, \frac{\varepsilon}{2}]$, $g(C_2) = [-\frac{\varepsilon}{2}, 0]$, de modo que $g\mid_{\mathcal{V}}(C_1) \not\subseteq g\mid_{\mathcal{V}}(C_2)$ y $g\mid_{\mathcal{V}}(C_2) \not\subseteq g\mid_{\mathcal{V}}(C_1)$. Se sigue que g no es localmente semiconfluente.

$\square$

Teorema

Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos compactos. Si f es débilmente confluente y g es tal que la función $h = g \circ f$ es atómica entonces g es atómica.

Demostración

Sea Q un subcontinuo de Y tal que $g(Q)$ es no degenerado. Como f es débilmente confluente existe una componente de $f^{-1}(Q)$, K, tal que $f(K) = Q$. Observe que K es un subcontinuo de X, más aún, $h(K) = g \circ f(K) = g(f(K)) = g(Q)$, el cual es no degenerado, dado que h es atómica se tiene que $h^{-1}(h(K)) = K$. Así $g^{-1}(g(Q)) = Q$. De modo que g es una función atómica.

$\square$