Funciones HU-terminales,

irreducibles y otras familias especiales de funciones

Edgar Rodríguez Mendieta

Dr. Fernando Orozco Zitli

Dr. José Guadalupe Anaya Ortega

Universidad Autónoma del Estado de México

18 de noviembre de 2014

Definición

Un conjunto X no vacío es un continuo, si X es un espacio métrico, compacto y conexo. Un subcontinuo es un continuo que es subconjunto de un continuo.

Definición

Sean X un continuo y $A \subset X$,

- *X es irreducible sobre A si ningún subcontinuo propio de X contiene a A,*
- *X es irreducible si X es irreducible sobre $\{p, q\}$ para algunos $p, q \in X$. En este caso decimos que X es irreducible entre p y q.*

Definición

Un conjunto X no vacío es un continuo, si X es un espacio métrico, compacto y conexo. Un subcontinuo es un continuo que es subconjunto de un continuo.

Definición

Sean X un continuo y $A \subset X$,

- *X es irreducible sobre A si ningún subcontinuo propio de X contiene a A,*
- *X es irreducible si X es irreducible sobre $\{p, q\}$ para algunos $p, q \in X$. En este caso decimos que X es irreducible entre p y q.*

Teoría básica

Definición

Un conjunto X no vacío es un continuo, si X es un espacio métrico, compacto y conexo. Un subcontinuo es un continuo que es subconjunto de un continuo.

Definición

Sean X un continuo y $A \subset X$,

- *X es irreducible sobre A si ningún subcontinuo propio de X contiene a A,*
- *X es irreducible si X es irreducible sobre $\{p, q\}$ para algunos $p, q \in X$. En este caso decimos que X es irreducible entre p y q.*

Familias especiales de funciones

Definición

Sean X y Y continuos. Una función $f : X \to Y$ continua y supraeyectiva es llamada:

- *atómica, si para cada subcontinuo $K \subset X$ con imagen no degenerada, $f^{-1}(f(K)) = K$,*
- *irreducible, si para cada subcontinuo irreducible no degenerado I de Y, $f^{-1}(I)$ es irreducible,*
- *monótona, si para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es conexo,*
- *interior en un punto $p \in X$, si para cada abierto U que contiene a p, $f(p)$ es elemento del interior de $(f(U))$,*
- *abierta, si para cada abierto $U \subset X$, $f(U)$ es abierto de Y.*

Definición

Sean X y Y continuos. Una función $f : X \to Y$ continua y supravectiva es llamada:

- *atómica, si para cada subcontinuo $K \subset X$ con imagen no degenerada, $f^{-1}(f(K)) = K$,*
- *irreducible, si para cada subcontinuo irreducible no degenerado I de Y, $f^{-1}(I)$ es irreducible,*
- *monótona, si para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es conexo,*
- *interior en un punto $p \in X$, si para cada abierto U que contiene a p, $f(p)$ es elemento del interior de $(f(U))$,*
- *abierta, si para cada abierto $U \subset X$, $f(U)$ es abierto de Y.*

Familias especiales de funciones

Definición

Sean X y Y continuos. Una función $f : X \to Y$ continua y supravectiva es llamada:

- *atómica, si para cada subcontinuo $K \subset X$ con imagen no degenerada, $f^{-1}(f(K)) = K$,*
- *irreducible, si para cada subcontinuo irreducible no degenerado I de Y, $f^{-1}(I)$ es irreducible,*
- *monótona, si para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es conexo,*
- *interior en un punto $p \in X$, si para cada abierto U que contiene a p, $f(p)$ es elemento del interior de $(f(U))$,*
- *abierta, si para cada abierto $U \subset X$, $f(U)$ es abierto de Y.*

Familias especiales de funciones

Definición

Sean X y Y continuos. Una función $f : X \to Y$ continua y supravectiva es llamada:

- *atómica, si para cada subcontinuo $K \subset X$ con imagen no degenerada, $f^{-1}(f(K)) = K$,*
- *irreducible, si para cada subcontinuo irreducible no degenerado I de Y, $f^{-1}(I)$ es irreducible,*
- *monótona, si para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es conexo,*
- *interior en un punto $p \in X$, si para cada abierto U que contiene a p, $f(p)$ es elemento del interior de $(f(U))$,*
- *abierta, si para cada abierto $U \subset X$, $f(U)$ es abierto de Y.*

Definición

Sean X y Y continuos. Una función $f : X \to Y$ continua y supravectiva es llamada:

- *atómica, si para cada subcontinuo $K \subset X$ con imagen no degenerada, $f^{-1}(f(K)) = K$,*
- *irreducible, si para cada subcontinuo irreducible no degenerado I de Y, $f^{-1}(I)$ es irreducible,*
- *monótona, si para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es conexo,*
- *interior en un punto $p \in X$, si para cada abierto U que contiene a p, $f(p)$ es elemento del interior de $(f(U))$,*
- *abierta, si para cada abierto $U \subset X$, $f(U)$ es abierto de Y.*

Familias de funciones

Definición

Denotamos por $\mathcal{AT}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{O}$ a la familia de funciones atómicas, irreducibles, monótonas y abiertas, respectivamente.

Teorema

$\mathcal{AT} \subsetneq \mathcal{I} \subsetneq \mathcal{M}$.

Ejemplo

$f : [0,2] \to [0,1]$ *como:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in [0,1], \\ 1, & \text{si} \quad x \in [1,2], \end{cases}$$

f *es irreducible y no atómica.*

Ejemplo

Sean X *un triodo simple:*
$X = pa \cup pb \cup pc$, $Y = pa \cup pb$.
Se define $f : X \to Y$ *como*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in pa \cup pb, \\ p, & \text{si} \quad x \in pc, \end{cases}$$

f *es monótona y no irreducible.*

Definición

Un continuo X es llamado hereditariamente unicoherente si la intersección de dos subcontinuos cualesquiera de X es conexo.

Definición

Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Un subcontinuo K de X es llamado un continuo HU-terminal de X si K está contenido en un subcontinuo irreducible de X y para cada subcontinuo irreducible I de X que contenga a K, existe $x \in X$ tal que I es irreducible sobre $K \cup \{x\}$.

Continuos HU-terminales

Definición

Un continuo X es llamado hereditariamente unicoherente si la intersección de dos subcontinuos cualesquiera de X es conexo.

Definición

Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Un subcontinuo K de X es llamado un continuo HU-terminal de X si K está contenido en un subcontinuo irreducible de X y para cada subcontinuo irreducible I de X que contenga a K, existe $x \in X$ tal que I es irreducible sobre $K \cup \{x\}$.

HU-terminalidad

Ejemplos

- $\{0\} \times [-1, 1]$ es un continuo HU-terminal de cl $\left(Sin\dfrac{1}{x}\right)$,
- Sea $X = [0, 1]$. Entonces K es un continuo HU-terminal de X si y solo si $K \cap \{0, 1\} \neq \emptyset$,
- Sea $X = pa \cup pb \cup pc$ un triodo simple. Si K es un continuo HU-terminal de X, entonces $K \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$.

Ejemplos

- $\{0\} \times [-1, 1]$ es un continuo HU-terminal de cl $\left(Sin\frac{1}{x}\right)$,
- Sea $X = [0, 1]$. Entonces K es un continuo HU-terminal de X si y solo si $K \cap \{0, 1\} \neq \emptyset$,
- Sea $X = pa \cup pb \cup pc$ un triodo simple. Si K es un continuo HU-terminal de X, entonces $K \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$.

HU-terminalidad

Ejemplos

- $\{0\} \times [-1, 1]$ es un continuo HU-terminal de cl $\left(Sin\frac{1}{x}\right)$,
- Sea $X = [0, 1]$. Entonces K es un continuo HU-terminal de X si y solo si $K \cap \{0, 1\} \neq \emptyset$,
- Sea $X = pa \cup pb \cup pc$ un triodo simple. Si K es un continuo HU-terminal de X, entonces $K \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$.

Definición

Denotamos por $\mathcal{HU}$-$\mathcal{T}$ *a la familia de funciones que mapean cada continuo HU-terminal de* X *sobre un continuo HU-terminal de* Y.

Imagen de un continuo HU-terminal

Teorema

Sean X *y* Y *continuos hereditariamente unicoherentes. Si* $f : X \to Y$ *una función continua tal que* $f \in \mathcal{I}$, *entonces* $f \in \mathcal{HU}\text{-}\mathcal{T}$.

Imagen inversa de un continuo HU-terminal

Teorema

Sean X, Y *continuos hereditariamente unicoherentes no degenerados,* $f : X \to Y$ *continua tal que* $f \in \mathcal{AT}$ *y* $K \subset Y$ *un continuo HU-terminal. Entonces* $f^{-1}(K)$ *es un continuo HU-terminal de* X*.*

Teorema

Sean X, Y continuos hereditariamente unicoherentes no degenerados y $f : X \to Y$ continua tal que $f \in \mathcal{AT}$. Entonces K es un continuo HU-terminal de X si y solo si $f(K)$ es un continuo HU-terminal no degenerado de Y.

HU-terminalidad

Teorema

Sean X y Y continuos hereditariamente unicoherentes, entonces

- $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{HU}\text{-}\mathcal{T}$,
- $\mathcal{HU}\text{-}\mathcal{T} \neq \mathcal{M}$.

Ejemplo

Sean $X = pa \cup pb \cup pc$, *con* $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$, $c = (0, 1)$, $p = (0, 0)$, $Y = pa \cup pb$. *Tomemos* $g : X \to Y$ *como* $g(x, y) = (x + y, 0)$.

g *es HU-terminal, no es irreducible y no es monótona.*

Ejemplo

Sean $X = pa \cup pb \cup pc$ *un triodo simple,* $Y = pa \cup pb$. *Definamos* $f : X \to Y$ *como*

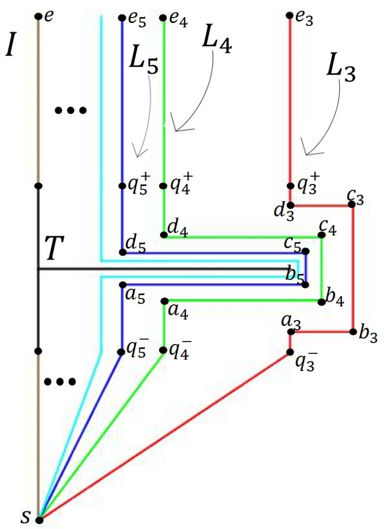
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in pa \cup pb, \\ p, & \text{si} \quad x \in pc, \end{cases}$$

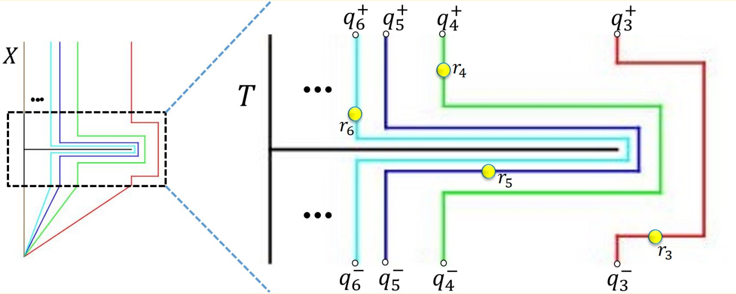
f *es monótona, no es irreducible y no es HU-terminal.*

Ejemplo

Existen continuos X, Y y una función $f : X \to Y$ continua y abierta tal que $f \notin \mathcal{HU}$-$\mathcal{T}$ y $f \notin \mathcal{M}$.

Construcción del continuo X

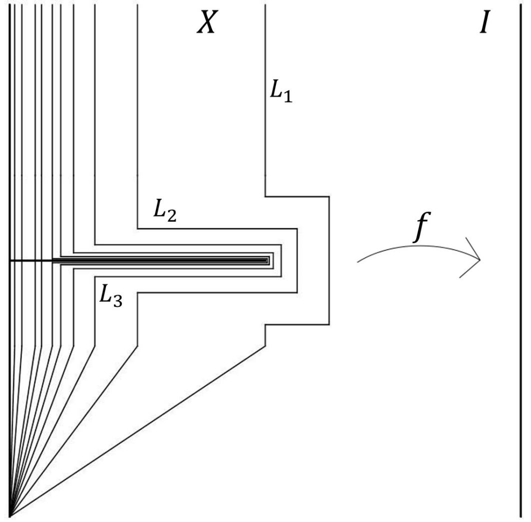




Es posible construir un subconjunto $\{r_n\}_{n=3}^{\infty}$ de $\left(\bigcup_{n=3}^{\infty} L_n\right) \cap \left(\mathbb{R} \times \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$ tal que r_n pertenece al arco que va de q_n^- a q_n^+ y los puntos de T son puntos de acumulación de $\{r_n\}_{n=3}^{\infty}$.

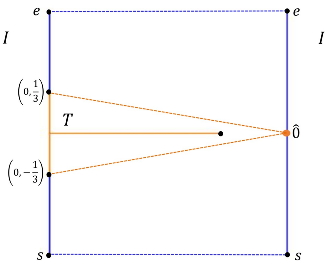
Funciones abiertas

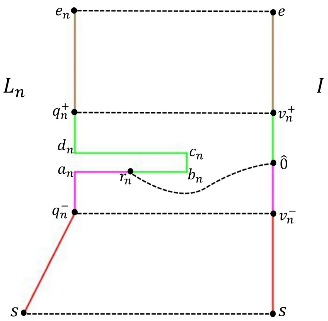
Definición de la función



Funciones abiertas

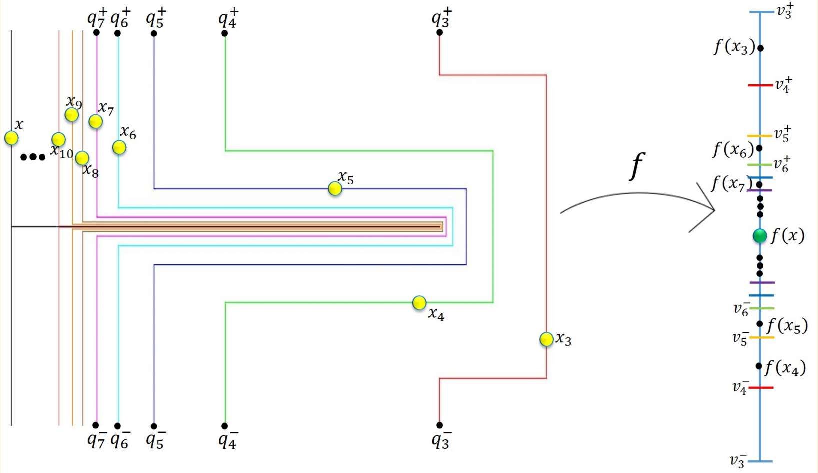
Definición de f





f es continua

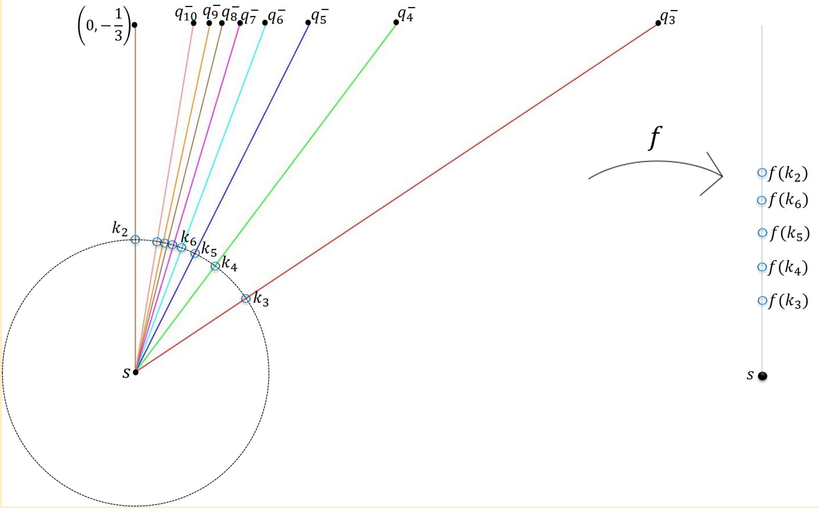
Consideremos el caso de la continuidad de f en X_2.



Funciones abiertas

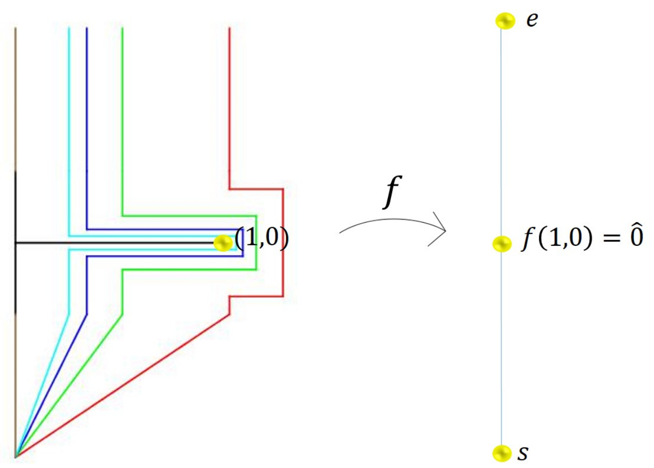
$f \in \mathcal{O}$

Veamos el caso donde f es abierta en el punto s.



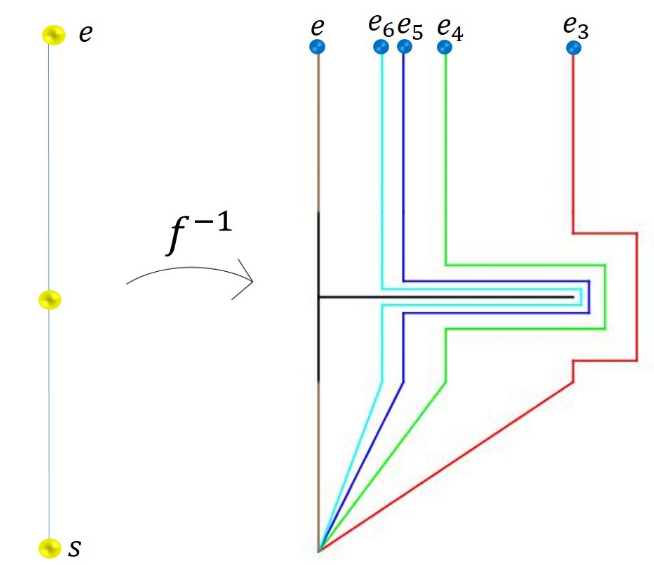
Funciones abiertas

$f \notin \mathcal{HU}\text{-}\mathcal{T}$



Funciones abiertas

$f \notin \mathcal{M}$



Funciones abiertas

Teorema

Sean X y Y continuos hereditariamente unicoherentes, entonces

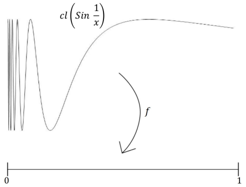
i) $\mathcal{HU}\text{-}\mathcal{T} \nsubseteq \mathcal{O}$,

ii) $\mathcal{O} \nsubseteq \mathcal{HU}\text{-}\mathcal{T}$,

iii) $\mathcal{I} \nsubseteq \mathcal{O}$,

iv) $\mathcal{O} \nsubseteq \mathcal{M}$.

$i)$ y $iii)$



$f(x, y) = x$ es atómica, HU-terminal y no es abierta.

Gracias