RUDIMENTOS DE LA TEORÍA DE ESPACIOS POLACOS

ROBERTO PICHARDO MENDOZA

Resumen. El material contenido en este documento es una lista de ejercicios y definiciones dirigidos a los asistentes al mini-curso que impartiré en el *IX Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*.

1. Notación

El propósito de esta sección es explicar la notación que se usará en este documento y en las tres sesiones del mini-curso.

En primer lugar, $\mathbb{N}$ denotará al conjunto de todos los enteros positivos, mientras que ω será empleado para representar al conjunto de todos los enteros no negativos, en otras palabras, $\omega := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Como es tradición, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son, respectivamente, el conjunto de todos los números reales y el conjunto de números racionales. Por otro lado, $\mathbb{P} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, es decir, $\mathbb{P}$ es la colección de todos los números irracionales.

La noción de función que emplearemos aquí será la conjuntista: una función de X en Y es un subconjunto f del producto cartesiano $X \times Y$ de tal modo que

1. para cada $x \in X$ existe $y \in Y$ con $(x, y) \in f$;
2. si $(x, y), (x, z) \in f$, entonces $y = z$.

De manera equivalente, para nosotros una función y su gráfica son la misma cosa.

Si f es una función, denotaremos por $\mathrm{dom}(f)$ al dominio de f y por $\mathrm{img}(f)$, la imagen de f, al conjunto $\{f(x) : x \in \mathrm{dom}(f)\}$. Dado un conjunto $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$, la restricción de f a A será denotada mediante $f \restriction A$. Además, utilizaremos el símbolo $f[A]$ para referirnos al conjunto $\{f(x) : x \in A\}$.

El símbolo A^ω representará al conjunto de todas las funciones de A en ω, es decir, $f \in A^\omega$ equivale a que $f : A \to \omega$.

Nos será conveniente pensar a los números naturales como ordinales; en otras palabras, si $n \in \omega$, entonces n será igual al conjunto de todos sus predecesores, es decir, $n = \{k \in \omega : k < n\}$. Así, por ejemplo, $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, etcétera.

Teniendo en cuenta lo dicho en el párrafo anterior, si A es un conjunto y $n \in \omega$, entonces *una sucesión de longitud n en A* es, por definición, cualquier función $s : n \to A$. De este modo, si s es una sucesión de longitud n, entones $s \subseteq n \times A$. En particular, cuando s es una sucesión de longitud cero, tenemos que $s \subseteq 0 \times A = \emptyset \times A = \emptyset$; luego, $\emptyset$ es la única sucesión de longitud cero en A.

Con la notación del párrafo anterior: $A^{<\omega}$ representará al conjunto de sucesiones de longitud finita de A; de manera formal, $s \in A^{<\omega}$ si y sólo si existe $n \in \omega$ de tal modo que $s : n \to A$.

Observe que si $n \in \omega$ y $f \in A^\omega$, entonces $f \restriction n$ es una sucesión de longitud n en A; en particular, $f \restriction n \in A^{<\omega}$.

Antes de continuar con el resto de las definiciones de esta sección, aterricemos cosas con un ejemplo.

Ejemplo 1.1. Recuerde que, para nosotros, $3 = \{0, 1, 2\}$, así que tiene sentido definir $s : 3 \to \omega$ mediante $s(0) = 0$, $s(1) = 2$ y $s(2) = 4$, es decir, s es la sucesión de los tres primeros números pares. Luego, $s \in \omega^{<\omega}$.

Por otro lado, s vista como subconjunto del producto $3 \times \omega$ es igual a

$$\{(0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$$

y su gráfica se exhibe en la figura 1

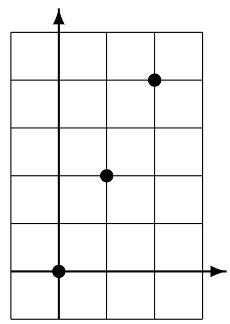

Figura 1. Gráfica de s.

Además, si $f : \omega \to \omega$ está dada por $f(n) = 2n$, entonces $f \restriction 3 = s$.

Diremos que la función g es una *extensión* de f si $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ y para cada $x \in \mathrm{dom}(f)$ se tiene la igualdad $f(x) = g(x)$.

Una de las ventajas de identificar a las funciones con sus gráficas es que la relación *f es una extensión de g* se puede simplificar, tal y como consta en el ejercicio siguiente.

Ejercicio 1.2. Suponga que f y g son funciones y demuestre lo siguiente.

1. $\mathrm{dom}(f) = \{x : \exists y\ ((x, y) \in f)\}$.
2. $\mathrm{img}(f) = \{y : \exists x\ ((x, y) \in f)\}$.
3. g es una extensión de f si y sólo si $f \subseteq g$.

Suponga que A es un conjunto, que $s \in A^{<\omega}$ y $a \in A$. Entonces definimos *la concatenación de s con a* como

$$s^\frown a := s \cup \{(\mathrm{dom}(s), a)\}.$$

Expliquemos un poco esto. En primer lugar, como $s \in A^{<\omega}$, tenemos que $\mathrm{dom}(s)$ es un número natural, digamos, $n = \mathrm{dom}(s)$; por otro lado,

$$\begin{aligned} n + 1 &= \{k \in \omega : k < n + 1\} = \{k \in \omega : k \leq n\} \\ &= \{k \in \omega : k < n\} \cup \{n\} = n \cup \{n\}. \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que $\mathrm{dom}(s^\frown a) = n + 1$ y que

$$(s^\frown a)(k) = \begin{cases} s(k), & \text{si } k < n \\ a, & \text{si } k = n. \end{cases}$$

En términos coloquiales, la concatenación de s con a es la sucesión finita que resulta de *poner* a al final de la sucesión s. Note que $s^\frown a$ es una extensión de s, siempre.

2. Espacios métricos

Para mí, una *métrica* sobre un conjunto X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface los siguientes enunciados para cualesquiera $x, y, z \in X$.

1. La igualdad $d(x, y) = 0$ equivale a que $x = y$.
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$.

Una forma rápida de expresar la condición (2) es decir que *d satisface la desigualdad del triángulo.*

Habrá algunos de ustedes que sientan que esta definición de métrica no es la correcta porque faltan propiedades. Resulta que éstas son consecuencia de las mencionadas arriba:

Ejercicio 2.1. Demuestre que si d es un métrica sobre el conjunto X, entonces, para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene lo siguiente.

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.

Naturalmente, siempre que d sea una métrica sobre el conjunto X, la pareja (X, d) será llamada *espacio métrico.*

Ahora, si (X, d) es un espacio métrico, entonces para cada $x \in X$ y cualquier número real $r > 0$, definimos *la bola con centro en x y de radio r con respecto a d* como el conjunto

$$B_d(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

En los casos en los que no tengamos necesidad de ser específicos sobre la métrica d omitiremos el uso del subíndice y escribiremos $B(x, r)$ en lugar de $B_d(x, r)$.

Es un ejercicio rutinario el comprobar que la colección

$$\{B(x, r) : (x \in X) \wedge (r \in \mathbb{R}) \wedge (r > 0)\}$$

es base para alguna topología sobre X a la que llamaremos *la topología generada por la métrica d.*

Ejemplo 2.2. Dado un conjunto A, la función $e : A \times A \to \mathbb{R}$ dada por

$$e(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y \end{cases}$$

es una métrica en A y la topología generada por ésta es la topología discreta en A.

La métrica e del ejemplo anterior puede ser empleada para producir un ejemplo más interesante:

Ejercicio 2.3. Use la notación del ejemplo 2.2 para probar que $\rho : A^\omega \times A^\omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(f(n), g(n))}{2^{n+1}}$$

es una métrica en A^ω acotada por 1, es decir, $\operatorname{img}(\rho) \subseteq [0, 1]$.

Una *sucesión* en el conjunto X es una función de ω en X, es decir, cualquier elemento de X^ω. Opcionalmente, si $f \in X^\omega$, emplearemos la notación $\langle f(n) : n \in \omega \rangle$ para hablar de la sucesión f.

Ahora, si d es una métrica para X y $f \in X^\omega$, diremos que f *converge* a $x \in X$ en (X, d) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \omega$ de tal modo que $f[\omega \setminus m] \subseteq B(x, \varepsilon)$;

como $m = \{k \in \omega : k < m\}$, se tiene que $\omega \setminus m = \{k \in \omega : k \geq m\}$ y, por ende, la condición $f[\omega \setminus m] \subseteq B(x, \varepsilon)$ equivale a que $d(f(k), x) < \varepsilon$ para cualquier $k \geq m$.

También será conveniente para nuestros propósitos el usar los símbolos $f \to x$, $\text{lím} f = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = x$ como abreviaturas de la expresión *la sucesión f converge al punto x*.

Con la notación de los párrafos anteriores: se dirá que $f \in X^\omega$ es de *Cauchy* en (X, d) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \omega$ de tal modo que $d(f(k), f(\ell)) < \varepsilon$, siempre que $k, \ell \in \omega \setminus m$.

De este modo, (X, d) será llamado *completo* si toda sucesión de Cauchy converge a algún punto de X.

Un ejemplo muy simple de espacio métrico completo es el dado en el ejemplo 2.2. En efecto, si f es una sucesión de Cauchy en (A, e), entonces proponemos $\varepsilon = 1/2$ para obtener que existe $m \in \omega$ de tal modo que $e(f(k), f(\ell)) < 1/2$, siempre que $k, \ell \in \omega \setminus m$. Luego, $f(k) = f(m)$ para cualquier $k \in \omega \setminus m$ y, naturalmente, f converge a $f(m)$ en (A, e).

Ejercicio 2.4. Sea ρ la métrica del ejercicio 2.3 y sea f una sucesión de Cauchy en A^ω. Demuestre lo siguiente.

1. Para cada $m \in \omega$ la sucesión $\langle f(n)(m) : n \in \omega \rangle$ es de Cauchy en (A, e) (note que si $n \in \omega$, entonces $f(n) \in A^\omega$, es decir, $f(n) : \omega \to A$ y, por lo tanto, $f(n)(m)$ es el valor que $f(n)$ le asigna a m).
2. La función $g : \omega \to A$ definida mediante $g(m) := \lim\limits_{n\to\infty} f(n)(m)$ satisface que $\lim\limits_{m\to\infty} f(m) = g$, así que (A^ω, ρ) es completo.

Dado un espacio métrico (X, d) y un conjunto no vacío $A \subseteq X$ para el cual el conjunto $\{d(x, y) : x, y \in A\}$ está acotado superiormente, definimos *el diámetro de A* como

$$\delta(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Ahora, diremos que $\{F_n : n \in \omega\}$ es una *familia a là Cantor* en X si

1. cada F_n es un subconjunto cerrado no vacío de X;
2. la familia es decreciente, es decir, $F_{n+1} \subseteq F_n$, para cada $n \in \omega$;
3. los diámetros de la familia se desvanecen: $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$.

Cantor probó que en $\mathbb{R}$ toda familia a là Cantor tiene intersección no vacía y su argumento se traduce fácilmente a espacios métricos en general, de hecho, el objetivo del ejercicio siguiente es verificar que un espacio métrico es completo si y sólo si toda familia a là Cantor tiene intersección no vacía. Esta caracterización de la completez de un espacio métrico nos será de gran utilidad.

Como siempre, si A es un subconjunto del espacio topológico X, entonces $\overline{A}$ representará la cerradura del conjunto A en X.

Ejercicio 2.5. Sea (X, d) un espacio métrico.

1. Demuestre que si f es una sucesión de Cauchy en (X, d), entonces

$$\{\overline{f[\omega \setminus n]} : n \in \omega\}$$

es una familia a là Cantor en X y que si x es un punto en la intersección de esta familia, entonces $f \to x$.

2. Pruebe que si $\{F_n : n \in \omega\}$ es una familia a là Cantor y x_n es un punto arbitrario de F_n, para cada $n \in \omega$, entonces $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ es una sucesión de Cauchy en (X, d). Más aún, si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $x \in \bigcap_n F_n$.

Finalizamos esta sección con un ejercicio en el que le pedimos al lector comprobar que, en espacios métricos, ser separable es lo mismo que ser segundo numerable.

Ejercicio 2.6. Suponga que (X, d) es un espacio métrico y demuestre que si D es un subconjunto denso de X, entonces

$$\{B(x, 2^{-n}) : (x \in D) \wedge (n \in \omega)\}$$

es una base para la topología de X. En particular, si X es separable, entonces X es segundo numerable.

3. Topología

Si A es un conjunto arbitrario, entonces A^ω puede ser visto como el producto cartesiano que resulta de multiplicar al conjunto A una cantidad numerable de veces consigo mismo. Por lo tanto, si equipamos a A con la topología discreta, entonces podemos darle a A^ω la topología producto. Investiguemos un poco más sobre esta topología.

En primer lugar, sea $n \in \omega$. Convengamos en denotar por $\pi_n : A^\omega \to A$ a la proyección en la n-ésima coordenada. Observe que la igualdad $\pi_n(f) = f(n)$ se da para cualesquiera $n \in \omega$ y $f \in A^\omega$. Ahora, como A es discreto, tenemos que $\{a\}$ es abierto en A para cada $a \in A$; en especial,

$$\pi_n^{-1}\{a\} = \{f \in A^\omega : f(n) = a\}$$

es un abierto de la subbase canónica de A^ω.

En segundo lugar, si $s \in A^{<\omega}$, entonces definimos

$$[s] := \{f \in A^\omega : s \subseteq f\};$$

es decir, $[s]$ consiste de todas las funciones de ω en A que extienden a la sucesión finita s.

Proposición 3.1. *Si A es un espacio discreto, entonces $\{[s] : s \in A^{<\omega}\}$ es base para la topología del producto topológico A^ω.*

Demostración. Comencemos por probar que cada $[s]$ es abierto. En efecto, $f \in [s]$ equivale a que $f(n) = s(n)$, para cada $n \in \operatorname{dom}(s)$, y esto último ocurre si y sólo si $f \in \bigcap\{\pi_n^{-1}\{s(n)\} : n \in \operatorname{dom}(s)\}$. Por lo tanto,

$$[s] = \bigcap\{\pi_n^{-1}\{s(n)\} : n \in \operatorname{dom}(s)\}.$$

Ahora suponga que U es un abierto en A^ω y que $f \in U$. Entonces existe un conjunto finito $F \subseteq \omega$ y una familia $\{U_n : n \in F\}$ de abiertos en A de tal modo que si definimos $B := \bigcap\{\pi_n^{-1}[U_n] : n \in F\}$, entonces $f \in B \subseteq U$.

Observe que $g \in B$ equivale a que $g(n) \in U_n$, para cada $n \in F$. Con esta idea en mente, fijemos $m \in \omega$ de tal modo que $F \subseteq m$ y definamos $s := f \restriction m \in A^{<\omega}$. Entonces, $g \in [s]$ implica que $s \subseteq g$ y, por ende, $g \restriction F = s \restriction F = f \restriction F$. De aquí se deduce que $f \in [s] \subseteq B \subseteq U$. $\square$

Como consecuencia de que el conjunto $\omega^{<\omega}$ es numerable, tenemos el resultado siguiente.

Corolario 3.2. *El producto topológico ω^ω, donde ω está equipado con la topología discreta, es segundo numerable.*

Sea A un conjunto y sean $s, t \in A^{<\omega}$. Diremos que s y t son *compatibles* (en símbolos, $s \mid t$) si $s \subseteq t$ ó $t \subseteq s$. En caso contrario, se dirá que s y t son *incompatibles* y usaremos el símbolo $s \perp t$ para representar esta situación.

Ejercicio 3.3. Demuestre que si A es un conjunto y $s, t \in A^{<\omega}$, entonces los siguientes enunciados son ciertos.

1. Si $s \mid t$, entonces $[s] \cap [t] = [s \cup t]$.
2. $s \perp t$ implica que $[s] \cap [t] = \emptyset$.
3. Con las hipótesis de la proposición 3.1: el conjunto $[s]$ es cerrado en A^ω.

Se deduce de los resultados anteriores que el producto ω^ω tiene una base consistente de subconjuntos que son, a un tiempo, abiertos y cerrados en ω^ω. Este tipo de espacios nos van a interesar, así que conviene ponerles un nombre.

Definición 3.4. Sea X un espacio topológico arbitrario.

1. $\mathsf{CO}(X)$ representará a la colección de todos los subconjuntos de X que son, simultáneamente, abiertos y cerrados en X.
2. X será llamado *cero-dimensional* si existe $\mathcal{B} \subseteq \mathsf{CO}(X)$ de tal modo que $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X.

Naturalmente, ω^ω es un ejemplo de espacio cero-dimensional.

Note que si X es segundo numerable y cero-dimensional, entonces, por definición, X posee una base $\mathcal{B} \subseteq \mathsf{CO}(X)$, pero, en principio, puede ocurrir que $\mathcal{B}$ no sea numerable. Afortunadamente siempre se puede extraer una base numerable de $\mathcal{B}$, tal y como se deduce del siguiente ejercicio.

Ejercicio 3.5. Suponga que X es un espacio topológico y que tanto $\mathcal{B}_0$ como $\mathcal{B}_1$ son bases para la topología de X. Más aún, supongamos que $\mathcal{B}_0$ es numerable. El propósito de este ejercicio es demostrar que existe $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$ de tal forma que $\mathcal{B}_2$ es una base numerable para X.

1. Comencemos por probar que si U es un abierto en X, entonces existe un subconjunto numerable de $\mathcal{B}_1$ cuya unión es U.

   Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}_1$ de tal modo que $U = \bigcup \mathcal{U}$. Defina
   $$\widetilde{\mathcal{U}} := \{B \in \mathcal{B}_0 : \exists V \in \mathcal{U}\ (B \subseteq V)\}$$
   y demuestre que si para cada $B \in \widetilde{\mathcal{U}}$ fijamos $V_B \in \mathcal{U}$ con $B \subseteq V_B$, entonces $U = \bigcup \{V_B : B \in \widetilde{\mathcal{U}}\}$.

   De este modo, para cada $B \in \mathcal{B}_0$ existe $\mathcal{U}_B$, un subconjunto numerable de $\mathcal{B}_1$, con $B = \bigcup \mathcal{U}_B$.
2. Muestre que $\mathcal{B}_2 := \bigcup \{\mathcal{U}_B : B \in \mathcal{B}_0\}$ es una base numerable para X.

Hasta este momento, dado un conjunto A, tenemos dos topologías definidas en el conjunto A^ω: la producto y la generada por la métrica ρ del ejemplo 2.3. Una consecuencia del ejercicio sigiuente es que estas dos coinciden.

Ejercicio 3.6. Sea A un conjunto arbitrario y sea ρ la métrica el ejemplo 2.3. Fije $f \in A^\omega$ y demuestre los siguientes enunciados.

1. Si $0 < \varepsilon < 1$, entonces existe $m \in \omega$ con $f \in [f \restriction m] \subseteq B(f, \varepsilon)$.
2. Para cada $m \in \omega$ existe $0 < \varepsilon < 1$ de tal modo que $B(f, \varepsilon) \subseteq [f \restriction m]$.

En particular, el producto A^ω es *completamente metrizable*, es decir, su topología está generada por una métrica completa.

Definición 3.7. Un espacio topológico X será llamado *espacio polaco* si es completamente metrizable y separable.

Claramente, $\mathbb{R}$ equipado con la topología euclideana es un ejemplo de espacio polaco y ω con la topología discreta también lo es. Un ejemplo más es el producto ω^ω.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Circuito ext. s/n, Ciudad Universitaria, C.P. 04510, México, D.F.

E-mail address: rpm@ciencias.unam.mx

URL: http://www.matematicas.unam.mx/pmr