Agujeros en el hiperespacio de subcontinuos

Rosa Isela Carranza Cruz

Dr. José Guadalupe Anaya Ortega

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Definición

Decimos que un espacio topológico Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados en Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

DEFINICIONES

Definición

Decimos que un espacio topológico Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados en Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Definición

Decimos que un espacio topológico Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados en Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

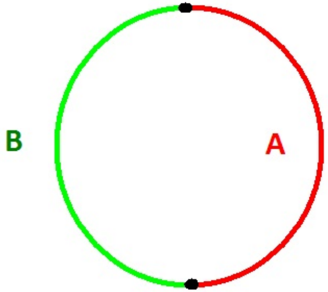
Definición

Decimos que un espacio topológico Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados en Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

DEFINICIONES

Definición

Decimos que un espacio topológico Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados en Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.



DEFINICIONES

Definición

Si Z es un espacio topológico unicoherente y $z \in Z$, decimos que z **agujera** a Z, si $Z - \{z\}$ no es unicoherente, en caso contrario, decimos que z no agujera a Z.

**

Un continuo es un espacio métrico, conexo, compacto y no degenerado.
Dado un continuo X, $C(X)$ denota el hiperespacio de subcontinuos de X.

$$C(X) = \{A \subset X : A \text{ es conexo, cerrado y no vacío } \}$$

Teorema

Si X es un continuo entonces $C(X)$ es unicoherente.

DEFINICIONES

∗∗

Un continuo es un espacio métrico, conexo, compacto y no degenerado.
Dado un continuo X, $C(X)$ denota el hiperespacio de subcontinuos de X.

$$C(X) = \{A \subset X : A \text{ es conexo, cerrado y no vacío } \}$$

Teorema

Si X es un continuo entonces $C(X)$ es unicoherente.

PROBLEMA

⋆

¿Para cuáles elementos $A \in C(X)$, A agujera a $C(X)$?.

1. A es un arco libre.
2. A es un conjunto unipuntual
3. A es una curva cerrada simple libre
4. $A = X$

PROBLEMA

$\star$

¿Para cuáles elementos $A \in C(X)$, A agujera a $C(X)$?.

1. A es un arco libre.
2. A es un conjunto unipuntual
3. A es una curva cerrada simple libre
4. $A = X$

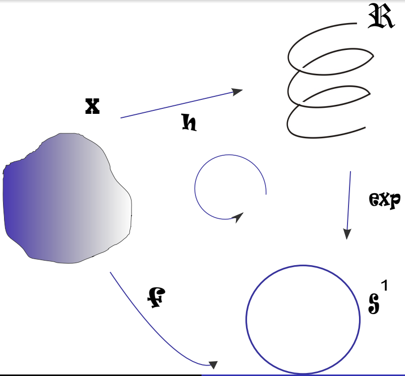
RESULTADOS AUXILIARES

Definición

Sea Z un espacio topológico conexo y $f : Z \to S^1$ una función continua. Decimos que la función f **tiene un levantamiento**, si existe una función continua $h : Z \to \mathbb{R}$ tal que $f = exp \circ h$, donde exp denota la función $exp : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $exp(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Definición

Sea Z un espacio topológico conexo y $f : Z \to S^1$ una función continua. Decimos que la función f **tiene un levantamiento**, si existe una función continua $h : Z \to \mathbb{R}$ tal que $f = exp \circ h$, donde exp denota la función $exp : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $exp(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.



Definición

Un espacio topológico conexo Z tiene **la propiedad b)** si toda función continua de Z en S^1 tiene un levantamiento.

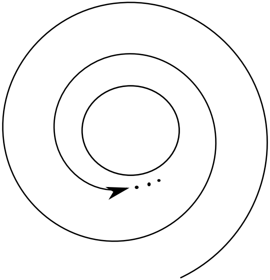
RESULTADOS AUXILIARES

Teorema

Sea Z un espacio topológico normal. Si Z tiene la propiedad b), entonces Z es unicoherente.

Teorema

Sea Z un espacio topológico normal. Si Z tiene la propiedad b), entonces Z es unicoherente.



Teorema

Si Z es un espacio topológico T_1, normal y localmente conexo entonces, Z es unicoherente si y sólo si Z tiene la propiedad b)

RESULTADOS AUXILIARES

Proposición

Sea Z un espacio topológico conexo, $f, g : Z \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tal que $\exp \circ f = \exp \circ g$ y $f(z) = g(z)$ para algún $z \in Z$ entonces, $f = g$

Proposición

Sean W un espacio topológico y Z_1, Z_2 subconjuntos cerrados y conexos de W. Si Z_1 y Z_2 tienen la propiedad b), y $Z_1 \cap Z_2$ es conexo, entonces $Z_1 \cup Z_2$ tiene la propiedad b).

RESULTADOS AUXILIARES

Proposición

Sea Z un espacio topológico conexo, $f, g : Z \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tal que $\exp \circ f = \exp \circ g$ y $f(z) = g(z)$ para algún $z \in Z$ entonces, $f = g$

Proposición

Sean W un espacio topológico y Z_1, Z_2 subconjuntos cerrados y conexos de W. Si Z_1 y Z_2 tienen la propiedad b), y $Z_1 \cap Z_2$ es conexo, entonces $Z_1 \cup Z_2$ tiene la propiedad b).

Proposición

Sea Z un espacio topológico conexo y sea Y un retracto por deformación de Z. Entonces, Z tiene la propiedad b) si y sólo si Y tiene la propiedad b).

RESULTADOS AUXILIARES

Proposición

Sea Z un espacio topológico conexo, $f, g : Z \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tal que $\exp \circ f = \exp \circ g$ y $f(z) = g(z)$ para algún $z \in Z$ entonces, $f = g$

Proposición

Sean W un espacio topológico y Z_1, Z_2 subconjuntos cerrados y conexos de W. Si Z_1 y Z_2 tienen la propiedad b), y $Z_1 \cap Z_2$ es conexo, entonces $Z_1 \cup Z_2$ tiene la propiedad b).

Proposición

Sea Z un espacio topológico conexo y sea Y un retracto por deformación de Z. Entonces, Z tiene la propiedad b) si y sólo si Y tiene la propiedad b).

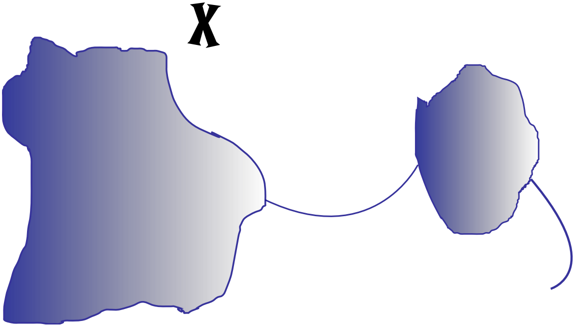
ARCOS LIBRES

Definición

Sean X un continuo y pq un arco contenido en X. Decimos que pq **es un arco libre en** X, si $pq - \{p, q\}$ es abierto en X.

Definición

Sean X un continuo y pq un arco contenido en X. Decimos que pq **es un arco libre en** X, si $pq - \{p, q\}$ es abierto en X.

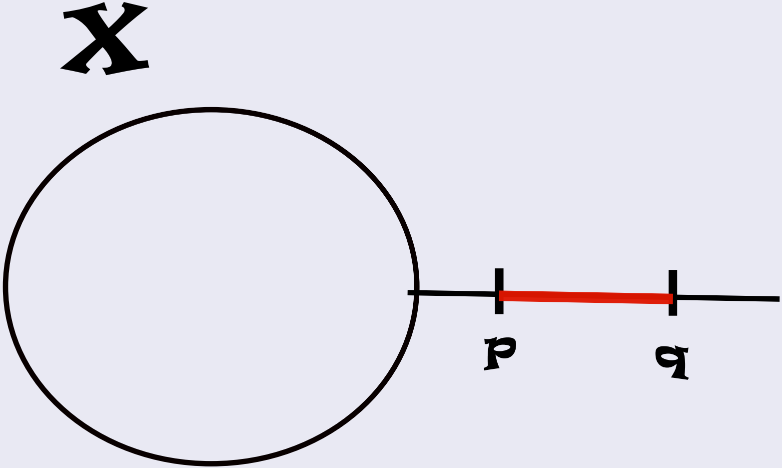


Teorema 1

Si pq es un arco libre en X tal que p y q no son puntos interiores de pq. Entonces, pq agujera a $C(X)$.

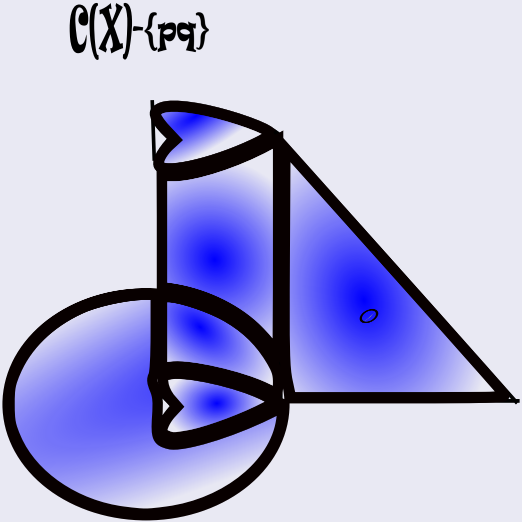
pq agujera a $C(X)$

Demostración



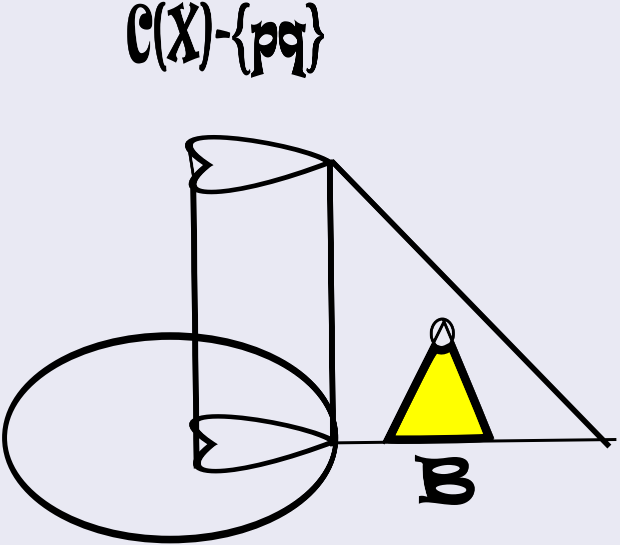
pq agujera a $C(X)$

Demostración

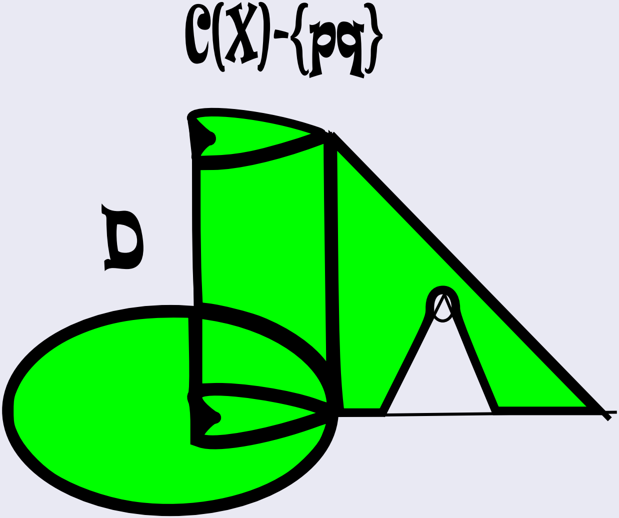


pq agujera a $C(X)$

Demostración

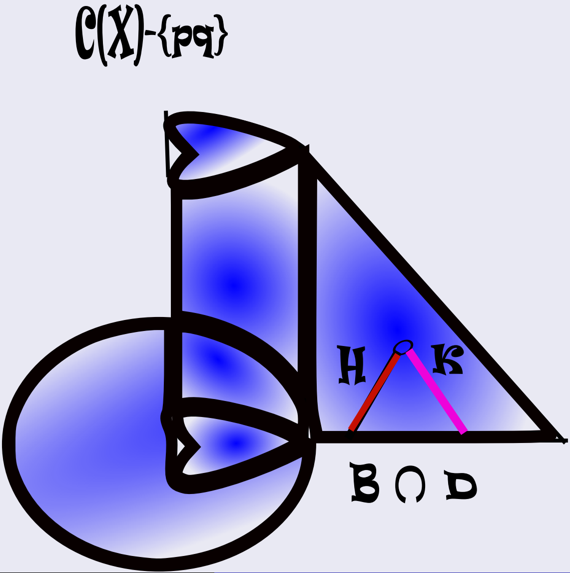


Demostración



pq agujera a $C(X)$

Demostración

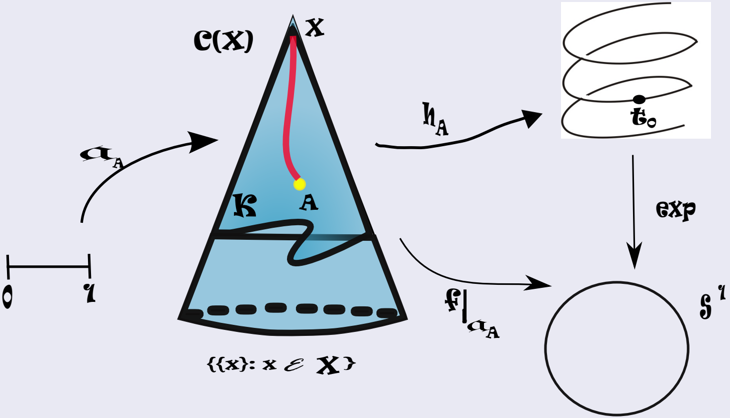


Lema

Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto no vacío de $C(X)$. Si $\mathcal{K}_A \subset \mathcal{K}$, para cada $A \in \mathcal{K}$, donde $\mathcal{K}_A = \{B \in C(X) : A \subset B\}$. Entonces, $\mathcal{K}$ tiene la propiedad b).

$\mathcal{K}$ tiene la propiedad b)

Demostración



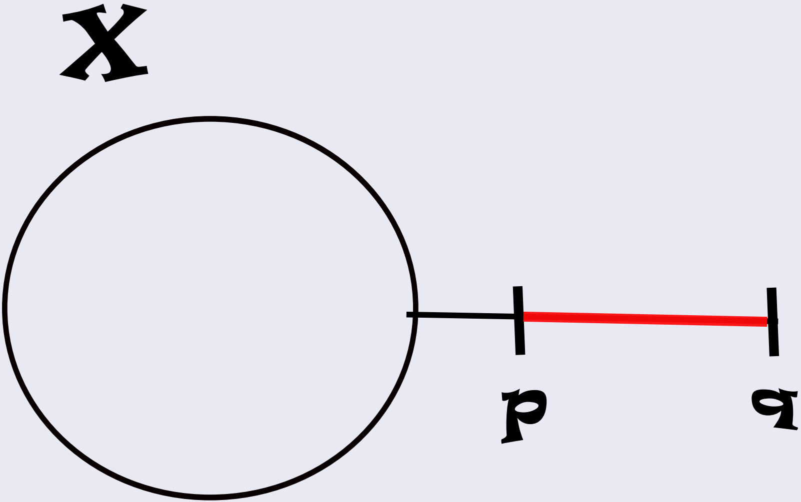
Arcos libres

Teorema 2

Si pq es un arco libre en X tal que p no es punto interior de pq y q es punto interior de pq. Entonces, pq no agujera a $C(X)$

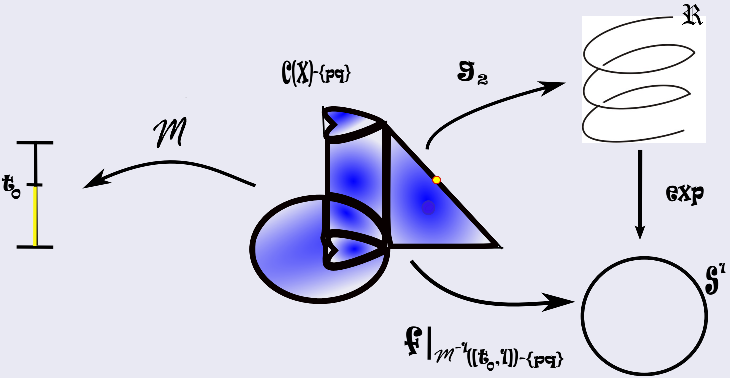
pq no agujera a $C(X)$

Demostración



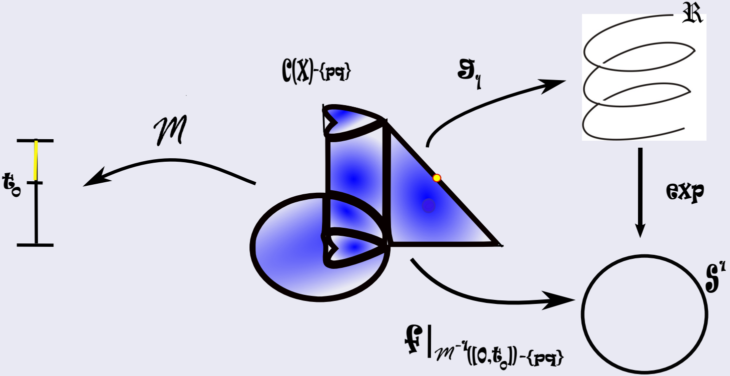
pq no agujera a $C(X)$

Demostración



pq no agujera a $C(X)$

Demostración



Demostración

Definimos $g : C(X) - \{pq\} \to \mathbb{R}$ por:

$$g(A) = \begin{cases} g_1(A), & \text{si } A \in \mu^{-1}([0, t_0]), \\ g_2(A), & \text{si } A \in \mu^{-1}([t_0, 1]). \end{cases}$$

Lema

Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto no vacío de $C(X)$. Si $\mathcal{K}_A \subset \mathcal{K}$, para cada $A \in \mathcal{K}$, donde $\mathcal{K}_A = \{B \in C(X) : A \subset B\}$. Entonces, $\mathcal{K}$ tiene la propiedad b).

Teorema 3

Si x es un elemento de X, entonces $\{x\}$ no agujera a $C(X)$.

CONJUNTOS UNIPUNTUALES

Lema

Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto no vacío de $C(X)$. Si $\mathcal{K}_A \subset \mathcal{K}$, para cada $A \in \mathcal{K}$, donde $\mathcal{K}_A = \{B \in C(X) : A \subset B\}$. Entonces, $\mathcal{K}$ tiene la propiedad b).

Teorema 3

Si x es un elemento de X, entonces $\{x\}$ no agujera a $C(X)$.

Demostración

1. $\mathcal{K} = C(X) - \{x\}$
2. $\mathcal{K}$ satisface las hipotesis del Lema.
3. $\mathcal{K}$ tiene la propiedad b).
4. $\{x\}$ no agujera a $C(X)$.

CONJUNTOS UNIPUNTUALES

Lema

Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto no vacío de $C(X)$. Si $\mathcal{K}_A \subset \mathcal{K}$, para cada $A \in \mathcal{K}$, donde $\mathcal{K}_A = \{B \in C(X) : A \subset B\}$. Entonces, $\mathcal{K}$ tiene la propiedad b).

Teorema 3

Si x es un elemento de X, entonces $\{x\}$ no agujera a $C(X)$.

Demostración

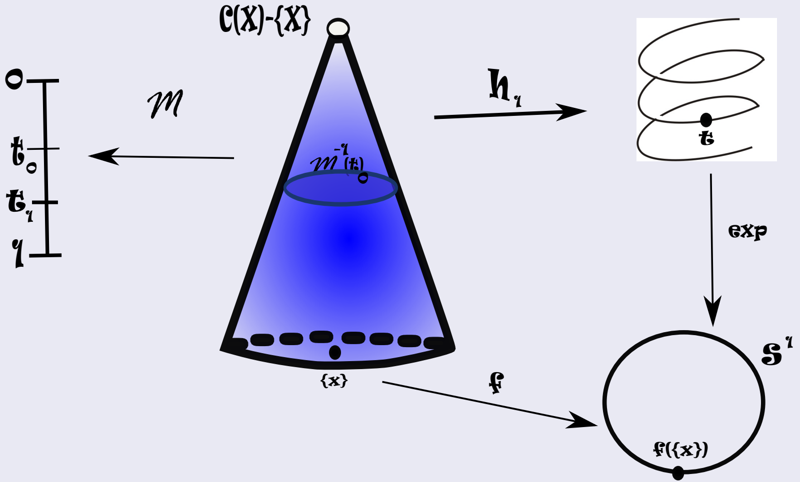
1. $\mathcal{K} = C(X) - \{x\}$
2. $\mathcal{K}$ satisface las hipotesis del Lema.
3. $\mathcal{K}$ tiene la propiedad b).
4. $\{x\}$ no agujera a $C(X)$.

Teorema 4

Si X es un continuo localmente conexo y X no es una curva cerrada simple, entonces X no agujera a $C(X)$.

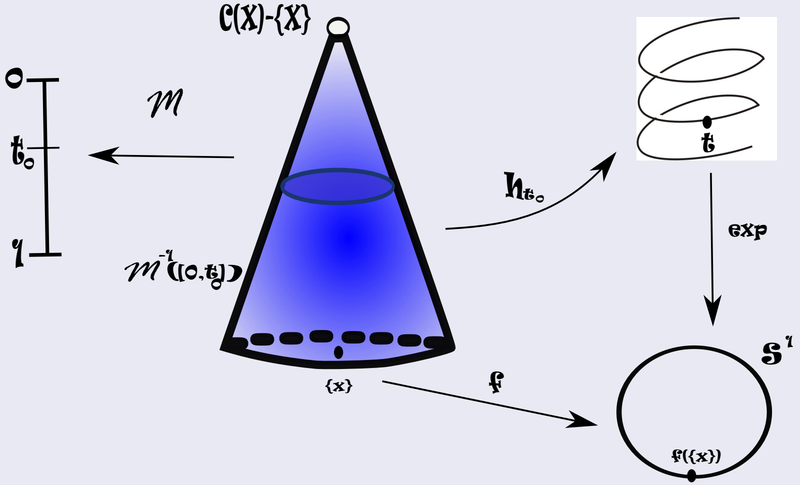
X no agujera a C(X)

Demostración



X no agujera a C(X)

Demostración



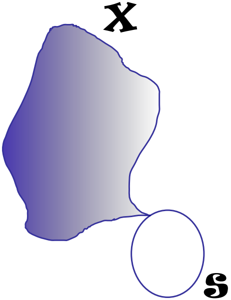
CURVAS CERRADAS SIMPLES

Definición

Sean X un continuo y S una curva cerrada simple contenida en X. Decimos que S **es una curva cerrada simple libre en** X, si $S \neq X$ y existe $p \in S$ tal que $p \notin \mathrm{Int}(S)$ y $S - \{p\}$ es abierto en X.

Definición

Sean X un continuo y S una curva cerrada simple contenida en X. Decimos que S **es una curva cerrada simple libre en** X, si $S \neq X$ y existe $p \in S$ tal que $p \notin \mathrm{Int}(S)$ y $S - \{p\}$ es abierto en X.



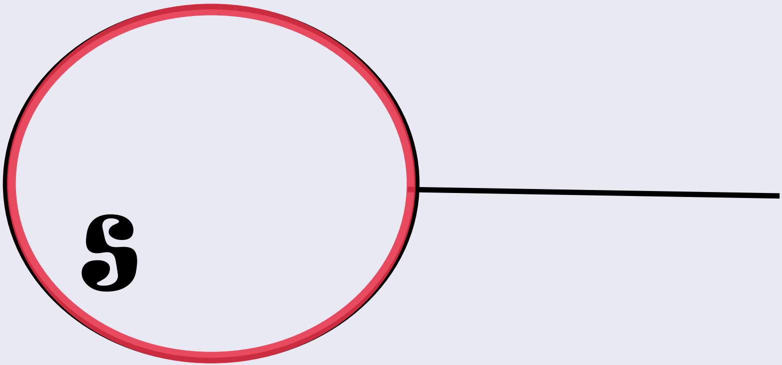
CURVA CERRADA SIMPLE LIBRE

Teorema 5

Si S es una curva cerrada simple libre, entonces S agujera a $C(X)$.

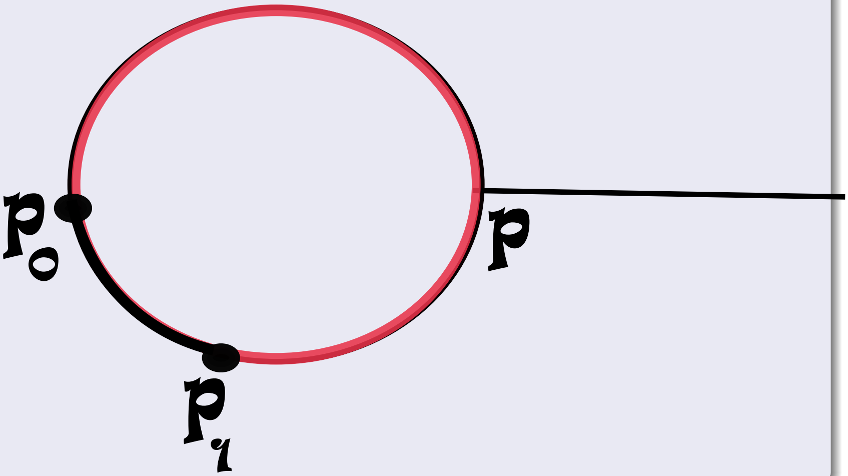
S agujera a $C(X)$

Demostración



S agujera a $C(X)$

Demostración



Demostración

$$\mathcal{S} = \{A \in C(X) - \{S\} : A \cap S \neq \emptyset\}$$

$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{S} : m(A \cap S) \in (S - int(p_0 p_1))\ y\ S \not\subseteq A\} \cup \{A \in \mathcal{S} : S \subset A\}$

$$Y = X - int(S)$$

Demostración

$$\mathcal{S} = \{A \in C(X) - \{S\} : A \cap S \neq \emptyset\}$$

$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{S} : m(A \cap S) \in (S - int(p_0 p_1)) \text{ y } S \not\subset A\} \cup \{A \in \mathcal{S} : S \subset A\}$

$$Y = X - int(S)$$

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{F} \cup C(Y)$$

$$\mathcal{G}_2 = \{A \in \mathcal{S} : m(A \cap S) \in p_0 p_1 \text{ y } S \not\subset A\} \cup \{A \in \mathcal{S} : S \subset A\}$$

S agujera a $C(X)$

Demostración

$$\mathcal{S} = \{A \in C(X) - \{S\} : A \cap S \neq \emptyset\}$$

$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{S} : m(A \cap S) \in (S - int(p_0p_1))\ y\ S \not\subseteq A\} \cup \{A \in \mathcal{S} : S \subset A\}$

$$Y = X - int(S)$$

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{F} \cup C(Y)$$

$$\mathcal{G}_2 = \{A \in \mathcal{S} : m(A \cap S) \in p_0p_1\ y\ S \not\subseteq A\} \cup \{A \in \mathcal{S} : S \subset A\}$$

S agujera a $C(X)$

Demostración

$$C(X) - \{S\} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$$

$$\mathcal{D}_1 = \{A \in \mathcal{S} : S \not\subset A \text{ y } m(A \cap S) = p_0\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{A \in \mathcal{S} : S \not\subset A \text{ y } m(A \cap S) = p_1\} \cup \{A \in \mathcal{S} : S \subset A\}$$

S agujera a $C(X)$

Demostración

$$C(X) - \{S\} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$$

$$\mathcal{D}_1 = \{A \in \mathcal{S} : S \not\subset A \ y \ m(A \cap S) = p_0\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{A \in \mathcal{S} : S \not\subset A \ y \ m(A \cap S) = p_1\} \cup \{A \in \mathcal{S} : S \subset A\}$$

$$\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$$

S agujera a $C(X)$

Demostración

$$C(X) - \{S\} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$$

$$\mathcal{D}_1 = \{A \in \mathcal{S} : S \not\subset A \text{ y } m(A \cap S) = p_0\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{A \in \mathcal{S} : S \not\subset A \text{ y } m(A \cap S) = p_1\} \cup \{A \in \mathcal{S} : S \subset A\}$$

$$\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$$

$C(X) - \{S\}$no es unicoherente

S agujera a $C(X)$

Demostración

$$C(X) - \{S\} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$$

$$\mathcal{D}_1 = \{A \in \mathcal{S} : S \not\subset A \text{ y } m(A \cap S) = p_0\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{A \in \mathcal{S} : S \not\subset A \text{ y } m(A \cap S) = p_1\} \cup \{A \in \mathcal{S} : S \subset A\}$$

$$\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$$

$C(X) - \{S\}$no es unicoherente