R^i-continuos y contractibilidad

Mario Flores González

Dr. Félix Capulín Pérez
Dr. Fernando Orozco Zitli
Universidad Autónoma del Estado de México

22 de Noviembre del 2013, BUAP.

Continuo

Definición

Un **continuo** *es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.*

Continuo

Definición

Un **continuo** *es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.*
Un **subcontinuo** *es un subconjunto de un continuo que a su vez es un continuo.*

Definición

Un **continuo** *es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.* *Un* **subcontinuo** *es un subconjunto de un continuo que a su vez es un continuo.*

Ejemplo

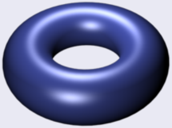


Figura: Toro

Definición

Un **continuo** *es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un* **subcontinuo** *es un subconjunto de un continuo que a su vez es un continuo.*

Ejemplo

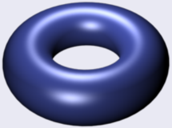


Figura: Toro

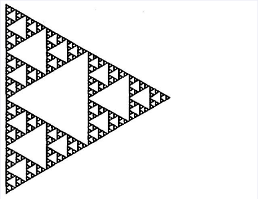


Figura: Triángulo de Sierpiński

Definición

Sea $X \subseteq Y$, diremos que X es **contráctil** *en Y, si para cualquier función continua $f : X \to Y$ es homotópica a una constante. Diremos que X es* **contráctil** *si es contráctil en sí mismo.*

Teorema

Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) *X es contráctil.*

(2) *Existe $c \in X$ tal que $id_X \simeq c$.*

(3) *Existe $c \in X$ tal que $\{c\}$ es un retracto por deformación de X.*

Ejemplo de Contráctil

El intervalo $[0, 1]$ es contráctil.

Ejemplo de Contráctil

El intervalo $[0,1]$ es contráctil.

Definimos $K : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ por $K(x,t) = (1-t)x + t$.

Definición

Dados un continuo X y una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos no vacíos de X, definimos el **límite inferior** *y el* **límite superior** *en X, de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$,*

- $\liminf A_n = \{x \in X :$ *para cada subconjunto abierto U de X, con $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada* $n \geq N\}$ *y*

Definición

Dados un continuo X y una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos no vacíos de X, definimos el **límite inferior** *y el* **límite superior** *en X, de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$,*

- $\liminf A_n = \{x \in X :$ *para cada subconjunto abierto U de X, con $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$*$\}$ *y*
- $\limsup A_n = \{x \in X :$ *para cada subconjunto abierto U de X, con $x \in U$, existe $J \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \in J$*$\}$.

Definición

Dados un continuo X y una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos no vacíos de X, definimos el **límite inferior** *y el* **límite superior** *en X, de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$,*

- $\liminf A_n = \{x \in X :$ *para cada subconjunto abierto U de X, con $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N\}$ y*
- $\limsup A_n = \{x \in X :$ *para cada subconjunto abierto U de X, con $x \in U$, existe $J \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \in J\}$.*

Sea $A \subset X$; diremos que $\lim A_n = A$ si y sólo si $\limsup A_n = A = \liminf A_n$.

Proposición

Sea X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X y $x \in X$, entonces se cumple que:

(a) $x \in \liminf A_n$ *si y sólo si existe una sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de puntos de* X *tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *y* $x_n \in A_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Proposición

Sea X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X y $x \in X$, entonces se cumple que:

(a) *$x \in \liminf A_n$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

(b) *$x \in \limsup A_n$ si y sólo si existe una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, con $n_1 < n_2 < \ldots$, y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ tales que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.*

Definición

Sea X un continuo y Y un subcontinuo propio de X. Diremos que Y es un:

- R^3-**continuo** *en X, si existen un subconjunto abierto U de X tal que $Y \subset U$, y una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U que satisfacen que* $\liminf C_n = Y$.

Definición

Sea X un continuo y Y un subcontinuo propio de X. Diremos que Y es un:

- R^3-**continuo** *en X, si existen un subconjunto abierto U de X tal que $Y \subset U$, y una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U que satisfacen que* $\liminf C_n = Y$.
- R^2-**continuo** *en X, si existen un subconjunto abierto U de X tal que $Y \subset U$, y sucesiones $\{C_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{C_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U que satisfacen que* $\lim C_n^1 \cap \lim C_n^2 = Y$.

Definición

Sea X un continuo y Y un subcontinuo propio de X. Diremos que Y es un:

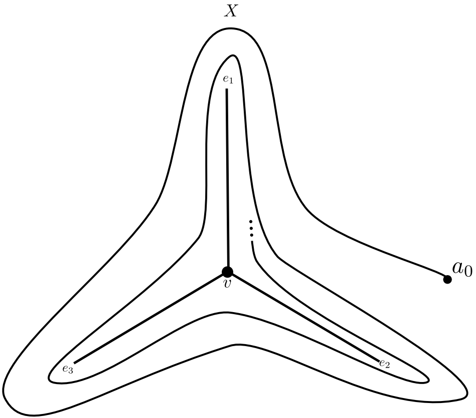
- R^3-**continuo** *en X, si existen un subconjunto abierto U de X tal que $Y \subset U$, y una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U que satisfacen que* $\liminf C_n = Y$.
- R^2-**continuo** *en X, si existen un subconjunto abierto U de X tal que $Y \subset U$, y sucesiones $\{C_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{C_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U que satisfacen que* $\lim C_n^1 \cap \lim C_n^2 = Y$.
- R^1-**continuo** *en X, si existen un subconjunto abierto U de X tal que $Y \subset U$, y sucesiones $\{C_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{C_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U que satisfacen que* $\limsup C_n^1 \cap \limsup C_n^2 = Y$.

Proposición

Sea X un continuo y Y un subcontinuo propio de X. Si Y es un R^2-continuo entonces Y es un R^3-continuo y un R^1-continuo.

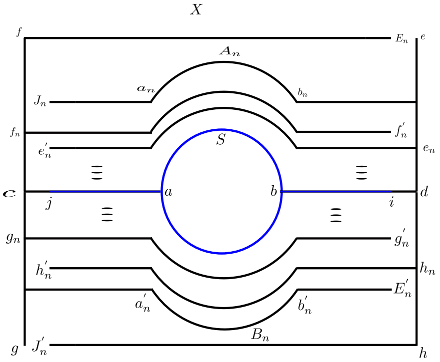
Existe un R^3-continuo que no es un R^2-continuo ni un R^1-continuo

Existe un R^3-continuo que no es un R^2-continuo ni un R^1-continuo



Existe un R^1-contino que no es un R^2-continuo ni un R^3- continuo

Existe un R^1-contino que no es un R^2-continuo ni un R^3- continuo



Definición

Sea X un continuo. Sea A un subconjunto no vacío de X, se dice **homotópicamente fijo** *si para cada $K : X \times [0,1] \longrightarrow X$ tal que $K(x,0) = x$ para todo $x \in X$, se tiene que: $K(A \times [0,1]) \subset A$.*

TEOREMA

Si un continuo X contiene un $R^i - continuo\ Y$, para algún $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces Y es homotópicamente fijo.

COROLARIO

Sea X *un continuo. Si* X *contiene un* $R^i - continuo$ *para algún* $i \in \{1, 2, 3\}$ *entonces* X *no es contráctil.*

En 1986, W. J. Charatonik, R^i-Continua and Hyperspaces, Topology Appl. 23, 207-216.

En 1986, W. J. Charatonik, R^i-Continua and Hyperspaces, Topology Appl. 23, 207-216.

Proposición

Sean X un continuo y Y es un subcontinuo propio de X. Si Y es un R^i-continuo para alguna $i \in \{1, 2, 3\}$ entonces Y contiene un R^3-continuo

En 1986, W. J. Charatonik, R^i-Continua and Hyperspaces, Topology Appl. 23, 207-216.

Proposición

Sean X un continuo y Y es un subcontinuo propio de X. Si Y es un R^i-continuo para alguna $i \in \{1, 2, 3\}$ entonces Y contiene un R^3-continuo

Si $i = 2, 3$ la proposición es cierta.

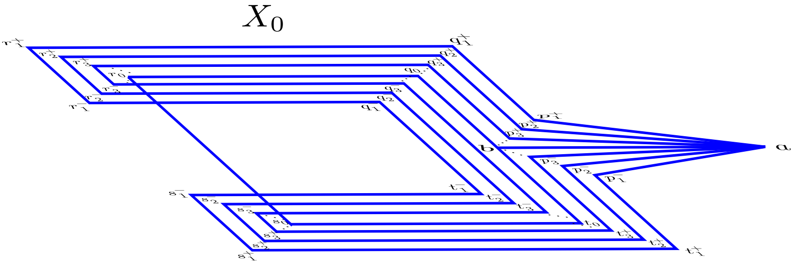
En 1986, W. J. Charatonik, R^i-Continua and Hyperspaces, Topology Appl. 23, 207-216.

PROPOSICIÓN

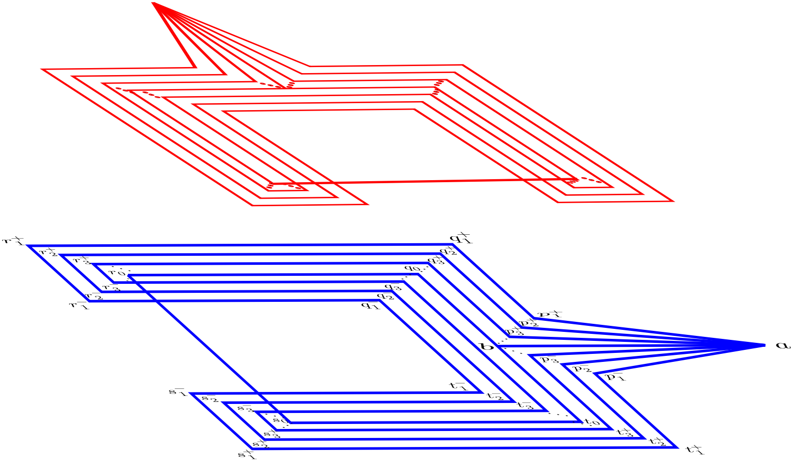
Sean X un continuo y Y es un subcontinuo propio de X. Si Y es un R^i-continuo para alguna $i \in \{1,2,3\}$ entonces Y contiene un R^3-continuo

Si $i = 2, 3$ la proposición es cierta.
En 1994, C.J. Rhee, I.S. Kim and R.S. Kim, dan un ejemplo donde la proposición no se cumple si $i = 1$.

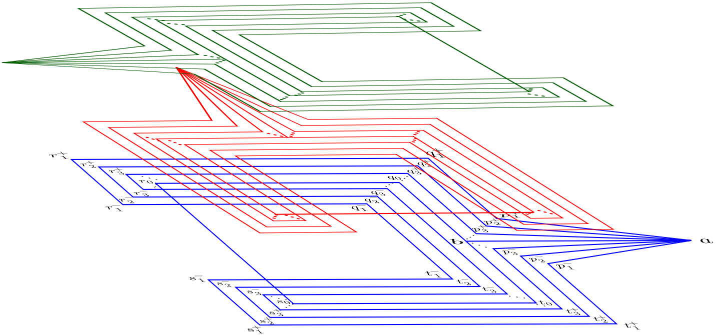
Ejemplo de un R^1-continuo que no contiene un R^2-continuo ni R^3-continuo

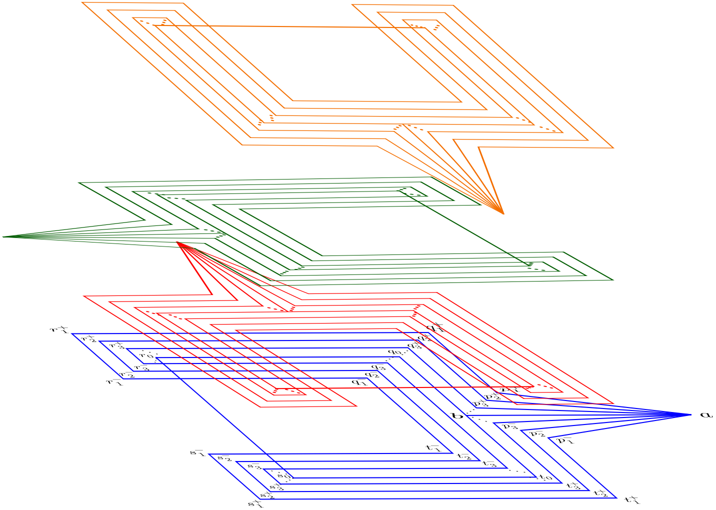


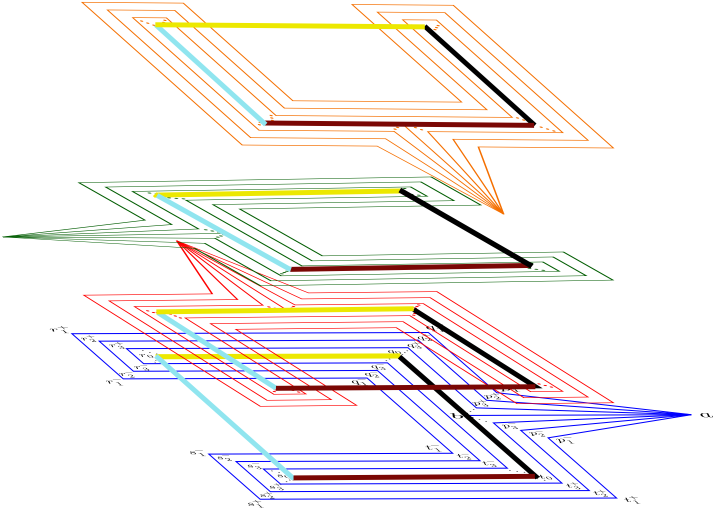
Ejemplo de un R^1-continuo que no contiene un R^2-continuo ni R^3-continuo

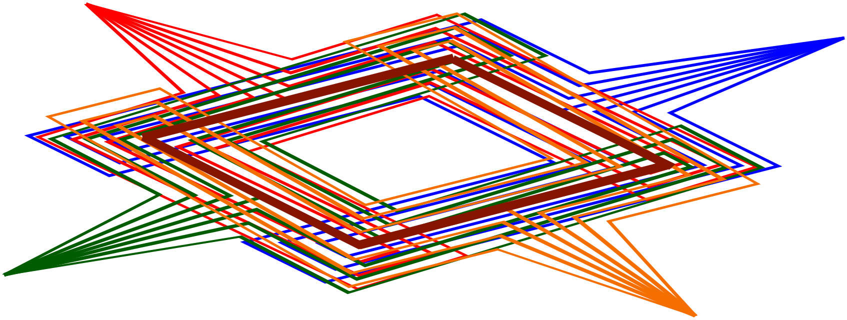


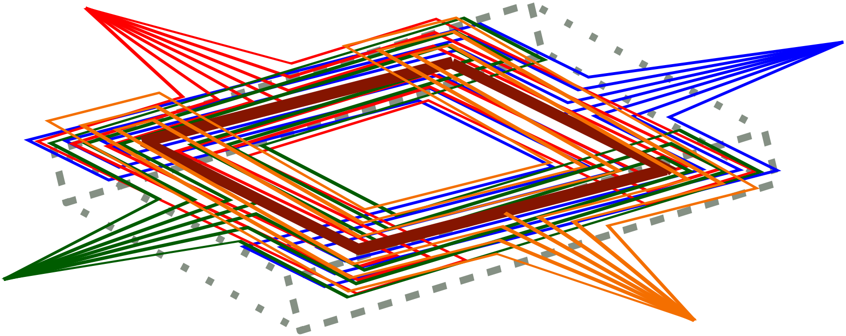
Ejemplo de un R^1-continuo que no contiene un R^2-continuo ni R^3-continuo






a
b





Referencias

- S. T. Czuba, R^i-Continua and contractibility of dendroids, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math., 27 (1979), 299-302.
- S. T. Czuba, R^i-Continua and contractibility, Proccedings of the International Conference on Geometric Topology (PWN Warszawa, 1980), 75-79.
- W. J. Charatonik, R^i-Continua and Hyperspaces, Topology Appl. 23 (1986), 207-216.
- C.J. Rhee, I.S. Kim and R.S. Kim, W-Regular convergence of $R^i - Continua$, Bull. Korean Math. Soc. 31 (1994), No. 1, pp. 105–113.

Gracias !!!!!