Conexidad y Topología de Fell

Este trabajo está basado en el artículo "Fell topology on the hyperspace of a non-Hausdorff space" de Ji Cheng-Hou y Paolo Vitolo.

Dado un espacio topológico (X, τ), denotaré por 2^X al espacio de todos sus cerrados incluyendo al vacío, mientras que a sus cerrados no vacíos los denotaré por por $CL(X)$, es decir

$$2^X = \{F \mid F \text{ es cerrado de } X\} \;\text{ y }\; CL(X) = \{F \in 2^X \mid F \neq \emptyset\}$$

Ahora, dados un abierto $O \neq \emptyset$ y un compacto K de X bajo τ, definiré los siguientes subconjuntos de 2^X

$$\langle X, O\rangle = \{F \in 2^X \mid F \cap O \neq \emptyset\} \;\text{ y }\; \langle X \setminus K\rangle = \{F \in 2^X \mid F \subseteq X \setminus K\}$$

Defino la topología de Fell en 2^X (o en $(CL(X))$ a aquella que tiene como subbase todos los conjuntos de la forma $\langle X, O\rangle$ y de la forma $\langle X \setminus K\rangle$ con O abierto no vacío y K compacto de X.

Dada esa definición, al saber que cada elementos de la base está constituido por una cantidad finita de operaciones con elementos de la subbase, es fácil ver que una base de la topología de Fell (la cual denotaré por τ_F) en 2^X tiene tres tipos de abiertos.

- $\langle X, O_1, \dots, O_m\rangle$ como O_j abiertos distintos del vacío y $m < \infty$;
- $\langle X \setminus K\rangle$ con K compacto de X;
- $\langle X, O_1, \dots, O_m\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle$ con $O_j \neq \emptyset$ abiertos, $m < \infty$ y K compacto.

Mientras tanto, en $CL(X)$, una base siempre la puedo ver como:

$$\beta = \{\langle X, O_1, \dots, O_m\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle \mid O_j \text{ abiertos no vacíos }, m < \infty \text{ y } K \text{ compacto}\}$$

Es interesante ver que los elementos en la subbase de τ_F se parecen bastante a los vietoricos, de hecho, si en la base de τ_F sustituyo los compactos por cerrados, obtengo una base de la topología de Vietoris (la cual denotaré por τ_V). De tal forma, una pregunta natural es si existe alguna relación entre dichas topologías, cuya respuesta está dada por el siguiente enunciado.

Teorema 1.

- *Si X es un espacio KC, entonces $\tau_F \subseteq \tau_V$;*
- *Si X es un espacio compacto, entonces $\tau_V \subseteq \tau_F$*

Donde un espacio X se dice que es KC si cada compacto de X es cerrado en X.

(Algunos autores utilizan la propiedad de ser un espacio KC como un axioma de separación y lo ubican entre los axiomas T_1 y T_2 del siguiente modo: $T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow T_1$).

El anterior teorema nos dice que bajo ciertas condiciones es posible heredar propiedades de τ_V a τ_F. Sin embargo, existen resultados sencillos para τ_F que no son simples de obtener para τ_V.

Entre las propiedades interesantes de τ_F se encuentran:

- $(2^X, \tau_F)$ es compacto y T_1;
- Si X es localmente compacto, entonces $(2^X, \tau_F)$ es T_2.

Donde un espacio X es *localmente compacto* si para todo $x \in X$ y para todo V abierto de X con $x \in V$, existe G vecindad compacta de x tal que $x \in G \subseteq V$).

CONEXIDAD

El objetivo de esta sección es encontrar condiciones simples que pedirle a X para garantizar que el hiperespacio 2^X sea conexo bajo τ_F.

Dado un espacio topológico X. Defino

$$\mathcal{A}(X) = \{E \subseteq X \mid E \neq \emptyset\} \qquad F(X) = \{E \in CL(X) \mid E \text{ es finito } \}$$

$$F_n(X) = \{E \in CL(X) \mid E \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}$$

El siguiente Teorema se encuentra en el artículo "Topologies on spaces of subsets" de Ernest Michael, 1951

Teorema 2. *Sea $F(X) \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}(X)$. Si es conexo alguno de los espacios X, $\mathcal{E}$ o $F_n(X)$, (con $n = 1, 2, \dots$), entonces cualquiera de dichos espacios es conexo bajo τ_V*

Es evidente que el conjunto de los cerrados no vacíos de X contiene a $F(X)$ y está contenido en $\mathcal{A}(X)$, hecho que utilizaré en el siguiente enunciado.

Proposición 1. *Si X es un espacio conexo y KC, entonces $(CL(X), \tau_F)$ es conexo.*

Demostración. Al ser X conexo, el Teorema 2 indica que $(CL(X), \tau_V)$ es conexo. Ahora, como X es un espacio KC, el Teorema 1 menciona que $\tau_F \subseteq \tau_V$, lo cual implica la conexidad de $(CL(X), \tau_F)$. $\square$

Se podría pensar que si $(CL(X), \tau_F)$ es conexo bajo ciertas condiciones, entonces $(2^X, \tau_F)$ debería ser conexo solicitando algo no tan alejado de lo que se había pedido para $CL(X)$. Sin embargo, nuestra siguiente proposición nos muestra que dichas condiciones se endurecen bastante en el caso de los cerrados que incluyen al vacío.

Proposición 2. *Sea X un espacio conexo y KC. Entonces $(2^X, \tau_F)$ es conexo si y sólo si X no es compacto.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que X es compacto. Entonces en $(2^X, \tau_F)$ existe el básico $\langle X \setminus X \rangle = \{\emptyset\}$, por tanto es abierto. Por otro lado, había mencionado que $(2^X, \tau_F)$ era T_1, y ya que $\emptyset$ es un cerrado de X, el unitario $\{\emptyset\}$ es un cerrado, implicando que $\{\emptyset\}$ es un subconjunto propio no vacío de $(2^X, \tau_F)$ que es abierto y cerrado. Así, $(2^X, \tau_F)$ no es conexo.

$\Leftarrow$] Como X no es compacto, es evidente que $CL(X)$ es un subconjunto denso de $(2^X, \tau_F)$ (si X fuera compacto, existiria el básico $\{\emptyset\}$ que no intersectaría a $CL(X)$). Como X es conexo y KC, la proposición anterior dice que $(CL(X), \tau_F)$ es conexo, por tanto también cualquier conjunto entre él y su cerradura, entonces $(2^X, \tau_F)$ es conexo. $\square$

En el resumen de la exposición había mencionado que iba a establecer una relación entre la conexidad de 2^X y de 2^Y donde Y era una componente conexa de X; para hacer lo anterior, usaré los siguientes dos lemas que se encuentran mostrados en el mismo artículo de Cheng y Vitolo que mencioné al principio.

Lema 1. *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ espacios topológicos tales que formen una partición de X. Entonces la función $\phi_n \colon \mathcal{F}_0(X_1) \times \mathcal{F}_0(X_2) \times \cdots \times \mathcal{F}_0(X_n) \to \mathcal{F}(X)$ es continua, donde ϕ_n está definido por la fórmula*

$$\phi_n(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Lema 2. *Sea X espacio topológico. La colección de todos los cerrados de X que intersectan a lo más un número finito de componentes conexas de X es densa en $(2^X, \tau_F)$.*

Ahora, la relación prometida.

Teorema 3. *Sea X un espacio topológico tal que $(2^Y, \tau_F)$ es conexo si Y es una componente conexa de X. Entonces se cumple que $(2^X, \tau_F)$ es conexo.*

Demostración. Denotaré por $\mathcal{F}_n$ la colección de los cerrados de X que son unión de exactamente n componentes.

Sea $\mathcal{D}_n = \{F \in 2^X \mid F \text{ intersecta a lo más } n \text{ componentes conexas de } X\}$.
AFIRMACIÓN. $\mathcal{D}_n = \bigcup_{Z \in \mathcal{F}_n} (2^Z, \tau_F)$.
RAZÓN. sea $F \in \mathcal{D}_n$, entonces F intersecta a $C_1, \ldots, C_m$ componentes conexas y $m \leq n$ (como las componentes forman una partición de X, tenemos $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} C_i$). Sea Z un elemento en $\mathcal{F}_n$ que en la unión que lo forma tiene a $C_1, \ldots, C_m$. Entonces $F \in (2^Z, \tau_F)$, de donde $\mathcal{D}_n \subseteq \bigcup_{Z \in \mathcal{F}_n} (2^Z, \tau_F)$. La otra contención es evidente.

También, es fácil ver que

$$\forall\, Z', Z'' \in \mathcal{F}_n,\ \exists\, Z''' \in \mathcal{F}_n \text{ tal que } (2^{Z'''}, \tau_F) \cap (2^{Z'}, \tau_F) \neq \emptyset \neq (2^{Z'''}, \tau_F) \cap (2^{Z''}, \tau_F)$$

Esto pues basta tomar a Z''' como la unión de una componente que forma a Z' con una componente que forma a Z'' y completarlo con componentes cualquiera.

Si demuestro que $(2^Z, \tau_F)$ es conexo para cada $Z \in \mathcal{F}_n$, tendría que $\mathcal{D}_n$ es una unión de conexos que se intersectan, entonces $\mathcal{D}_n$ es conexo. Ya que el Lema anterior garantiza la densidad de $\mathcal{D}_n$ en $(2^X, \tau_F)$, se concluiría la conexidad de $(2^X, \tau_F)$.

Entonces sea $Z \in \mathcal{F}_n$, por tanto $Z = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$ donde los Y_i son distintas componentes conexas de X. Por hipótesis, cada $(2^{Y_i}, \tau_F)$ es conexo, de donde $(2^{Y_1}, \tau_F) \times \cdots \times (2^{Y_n}, \tau_F)$ es conexo. Ahora, con ϕ_n como en el Lema 1, se tiene $(2^Z, \tau_F) = \phi_n\big((2^{Y_1}, \tau_F) \times \cdots \times (2^{Y_n}, \tau_F)\big)$. Así $(2^Z, \tau_F)$ es imagen bajo una función continua de un conexo, por tanto conexo. $\square$

Por último, usando lo mostrado antes, podré enunciar las condiciones simples que necesito pedirle a X para garantizar que el hiperespacio 2^X bajo τ_F sea conexo.

Teorema 4. *Sea X espacio topológico*

1) Si X es KC y cada componente es no-compacta, entonces $(2^X, \tau_F)$ es conexo.

2) Si existe un compacto abierto no vacío, entonces $(2^X, \tau_F)$ *es disconexo.*

3) Sea X *un espacio* KC *donde cada componente de* X *es abierta. Entonces* $(2^X, \tau_F)$ *es conexa si y sólo si no existe una componente compacta si y sólo si no existe un abierto compacto no vacío.*

Demostración. *1)* Como cada componente Y de X es KC y conexa, ademas de no compacta, la Proposición 2 nos dice que $(2^Y, \tau_F)$ es conexo y del Teorema 3 deducimos la conexidad de $(2^X, \tau_F)$.

2) Sea K un compacto abierto no vacío de X. Como $K \neq \emptyset$, es claro que $X \notin \langle X \setminus K \rangle$, por tanto $\langle X \setminus K \rangle$ es un abierto no trivial de $(2^X, \tau_F)$. Ahora mostraré que el complemento de $\langle X \setminus K \rangle$ es abierto.

Si $A \notin \langle X \setminus K \rangle$ entonces $A \cap K \neq \emptyset$ con K abierto, por tanto $\langle X, K \rangle$ es una vecindad abierta de A en $(2^X, \tau_F)$. Es claro que los cerrados que intersectan a K no están contenidos en $X \setminus K$, implicando que $\langle X \setminus K \rangle \cap \langle X, K \rangle = \emptyset$.

Así, para un A en el complemento de $\langle X \setminus K \rangle$, pude encerrarlo en un abierto disjunto a $\langle X \setminus K \rangle$, por tanto el complemento es abierto en $(2^X, \tau_F)$, de donde el abierto no trivial $\langle X \setminus K \rangle$ es también cerrado, implicando que $(2^X, \tau_F)$ es no conexo.

3) El primer si y sólo si es consecuencia simple de *1)* y de la contrapuesta de *2)* que dice "$(2^X, \tau_F)$ conexo entonces no existe compacto abierto no vacío". Si existiera la componente compacta, por hipótesis tendría un compacto abierto no vacío.

Para la primera implicación del segundo si y sólo si, nótese que como cada componente es no compacta entonces $(2^X, \tau_F)$ es conexo; si existiera el abierto compacto no vacío, entonces por *2)* el mismo espacio sería disconexo. Ahora si supongo que no existe abierto compacto no vacío pero que si existe una componente compacta tendría una contradicción, por tanto no existe tal componente. $\square$