Si X es un retracto absoluto entonces $F_n(X)$ es un retracto absoluto, la solución de Ganea.

Irene Rosas Núñez

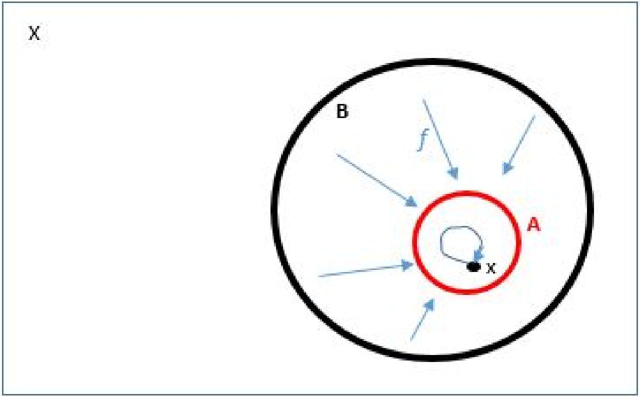
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

irene@ciencias.unam.mx

22 de Noviembre de 2013

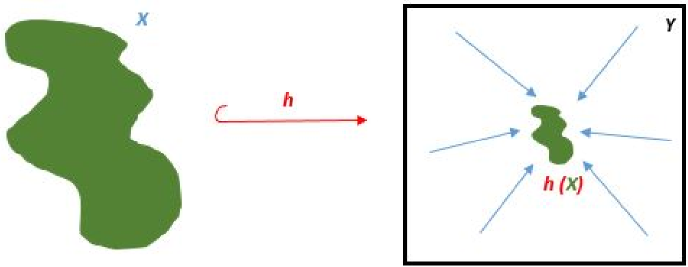
Definición

*Sea $A \subseteq B$, A es un **retracto** de B si existe una función continua f tal que $f[B] = A$ y para toda $x \in A$, $f(x) = x$.*



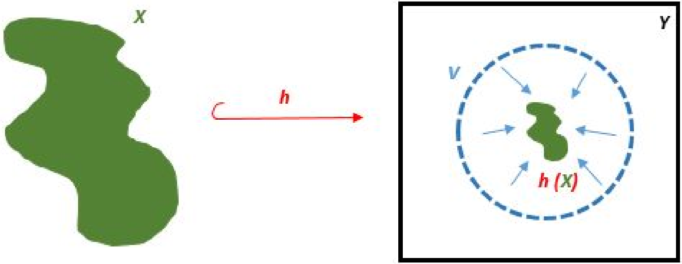
Definición

X es un ***retracto absoluto (RA)*** *si para cada encaje cerrado de X en el espacio normal Y, la imagen de X es un retracto de Y.*



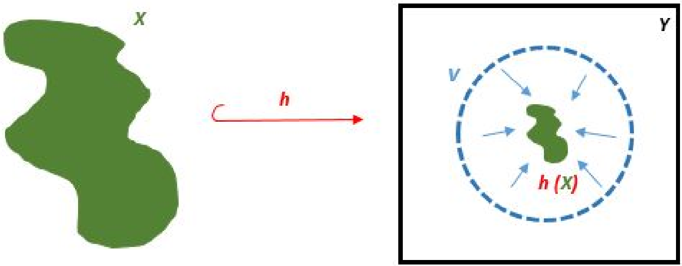
Definición

X es un ***retracto absoluto por vecindades (RAV)*** *si para cada encaje cerrado de X en el espacio normal Y, existe una vecindad abierta V tal que la imagen de X es un retracto de V.*



Definición

X es un ***retracto absoluto por vecindades (RAV)*** *si para cada encaje cerrado de X en el espacio normal Y, existe una vecindad abierta V tal que la imagen de X es un retracto de V.*



¡¡OBSERVACIÓN!!

RA $\Rightarrow$ RAV

En el paper *"On symmetric products of topological spaces"* (1931) Borsuk y Ulam plantean la siguiente pregunta: ¿La propiedad de ser un *Retracto Absoluto* se preserva bajo el producto simétrico?.

En 1954 Tudor Ganea responde parcialmente a esta pregunta en el paper *"Symmetrische Potenzen topologischer Räume"*.

En el paper *"On symmetric products of topological spaces"* (1931) Borsuk y Ulam plantean la siguiente pregunta: ¿La propiedad de ser un *Retracto Absoluto* se preserva bajo el producto simétrico?.

En 1954 Tudor Ganea responde parcialmente a esta pregunta en el paper *"Symmetrische Potenzen topologischer Räume"*.

Teorema

Sea X un espacio métrico, compacto y de dimensión finita.
Si X es un RA, entonces $F_n(X)$ es un RA.

La solución de Ganea

Teorema

Un espacio métrico, compacto y de dimensión finita es un retracto absoluto por vecindades si y solo si es localmente contráctil.

La solución de Ganea

Teorema

Un espacio métrico, compacto y de dimensión finita es un retracto absoluto por vecindades si y solo si es localmente contráctil.

Teorema

Un retracto absoluto por vecindades es un retracto absoluto si y solo si es contráctil.

La solución de Ganea

Teorema

Un espacio métrico, compacto y de dimensión finita es un retracto absoluto por vecindades si y solo si es localmente contráctil.

Teorema

Un retracto absoluto por vecindades es un retracto absoluto si y solo si es contráctil.

- X es localmente contráctil

Teorema

Un espacio métrico, compacto y de dimensión finita es un retracto absoluto por vecindades si y solo si es localmente contráctil.

Teorema

Un retracto absoluto por vecindades es un retracto absoluto si y solo si es contráctil.

- X es localmente contráctil
- X es contráctil.

¡¡OBSERVACIONES!!

¡¡OBSERVACIONES!!

- Si X es métrico, entonces $F_n(X)$ es métrico

¡¡OBSERVACIONES!!

- Si X es métrico, entonces $F_n(X)$ es métrico
- Si X es compacto, entonces $F_n(X)$ es compacto.

¡¡OBSERVACIONES!!

- Si X es métrico, entonces $F_n(X)$ es métrico
- Si X es compacto, entonces $F_n(X)$ es compacto.
- Si X es de dimensión finita, entonces $F_n(X)$ es de dimensión finita.

¡¡OBSERVACIONES!!

- Si X es métrico, entonces $F_n(X)$ es métrico
- Si X es compacto, entonces $F_n(X)$ es compacto.
- Si X es de dimensión finita, entonces $F_n(X)$ es de dimensión finita.De hecho se cumple la siguiente desigualdad:

$$dim[F_n(X)] = dim(X^n) \leq n \cdot dim(X)$$

¡¡OBSERVACIONES!!

- Si X es métrico, entonces $F_n(X)$ es métrico
- Si X es compacto, entonces $F_n(X)$ es compacto.
- Si X es de dimensión finita, entonces $F_n(X)$ es de dimensión finita.De hecho se cumple la siguiente desigualdad:

$$dim[F_n(X)] = dim(X^n) \leq n \cdot dim(X)$$

- $F_n(X)$ contráctil $\Rightarrow$ $F_n(X)$ RAV.

¡¡OBSERVACIONES!!

- Si X es métrico, entonces $F_n(X)$ es métrico
- Si X es compacto, entonces $F_n(X)$ es compacto.
- Si X es de dimensión finita, entonces $F_n(X)$ es de dimensión finita.De hecho se cumple la siguiente desigualdad:

$$dim[F_n(X)] = dim(X^n) \leq n \cdot dim(X)$$

- $F_n(X)$ contráctil $\Rightarrow$ $F_n(X)$ RAV.
- $F_n(X)$ RAV $\Rightarrow$ $F_n(X)$ RA.

Teorema

- *Si* X *es contráctil, entonces* $F_n(X)$ *es contráctil.*
- *Si* X *es Hausdorff y localmente contráctil, entonces* $F_n(X)$ *es localmente contráctil.*

Teorema

- *Si X es contráctil, entonces $F_n(X)$ es contráctil.*
- *Si X es Hausdorff y localmente contráctil, entonces $F_n(X)$ es localmente contráctil.*

Definición

Un espacio X es contráctil cuando existe $a \in X$ y una función $g : X \times [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que para toda $x \in X$ se cumple que $g(x,0) = x$ y $g(x,1) = a$.

Si X es contráctil, entonces $F_n(X)$ es contráctil.

Como X es contráctil tenemos que existen una $a \in X$ y una función $h : X \times [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que para toda $x \in X$ se cumple que $h(x,0) = x$ y $h(x,1) = a$.

Si X es contráctil, entonces $F_n(X)$ es contráctil.

Como X es contráctil tenemos que existen una $a \in X$ y una función $h : X \times [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que para toda $x \in X$ se cumple que $h(x,0) = x$ y $h(x,1) = a$.

Definimos $g : F_n(X) \times [0,1] \longrightarrow F_n(X)$

Dado $Z = \{z_1, z_2, ..., z_l\} \in F_n(X)$
$g((Z,t)) = \{h(z_1,t), h(z_2,t), ..., h(z_l,t)\}$.

Si X es contráctil, entonces $F_n(X)$ es contráctil.

Como X es contráctil tenemos que existen una $a \in X$ y una función $h : X \times [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que para toda $x \in X$ se cumple que $h(x,0) = x$ y $h(x,1) = a$.

Definimos $g : F_n(X) \times [0,1] \longrightarrow F_n(X)$

Dado $Z = \{z_1, z_2, ..., z_l\} \in F_n(X)$
$g((Z,t)) = \{h(z_1,t), h(z_2,t), ..., h(z_l,t)\}$.

- $g((Z,0)) = Z$

Si X es contráctil, entonces $F_n(X)$ es contráctil.

Como X es contráctil tenemos que existen una $a \in X$ y una función $h : X \times [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que para toda $x \in X$ se cumple que $h(x,0) = x$ y $h(x,1) = a$.

Definimos $g : F_n(X) \times [0,1] \longrightarrow F_n(X)$

Dado $Z = \{z_1, z_2, ..., z_l\} \in F_n(X)$
$g((Z,t)) = \{h(z_1,t), h(z_2,t), ..., h(z_l,t)\}$.

- $g((Z,0)) = Z$
- $g((Z,1)) = \{a\}$

g es una función continua.

g es una función continua.

Sean $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\} \in F_n(X)$, $t_0 \in [0, 1]$, y $\mathcal{M} = \langle M_1, ..., M_m \rangle$ un abierto en $F_n(X)$ tal que $g((A, t_0)) \in \mathcal{M}$.

g es una función continua.

Sean $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\} \in F_n(X)$, $t_0 \in [0,1]$, y $\mathcal{M} = \langle M_1, ..., M_m \rangle$ un abierto en $F_n(X)$ tal que $g((A, t_0)) \in \mathcal{M}$.

Queremos ver que existe una vecindad $\mathcal{U}$ de A y una vecindad J de t_0 tales que $(A, t_0) \in \mathcal{U} \times J$ y $g[\mathcal{U} \times J] \subseteq \mathcal{M}$.

g es una función continua.

Sean $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\} \in F_n(X)$, $t_0 \in [0,1]$, y $\mathcal{M} = \langle M_1, ..., M_m \rangle$ un abierto en $F_n(X)$ tal que $g((A, t_0)) \in \mathcal{M}$.

Queremos ver que existe una vecindad $\mathcal{U}$ de A y una vecindad J de t_0 tales que $(A, t_0) \in \mathcal{U} \times J$ y $g[\mathcal{U} \times J] \subseteq \mathcal{M}$.

Como $g((A, t_0)) \in \mathcal{M}$, entonces por definición sabemos que $h(a_i, t_0) \in M_s$ para al menos una $s \in \{1, ..., m\}$.

Sean $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\} \in F_n(X)$, $t_0 \in [0, 1]$, y $\mathcal{M} = \langle M_1, ..., M_m \rangle$ un abierto en $F_n(X)$ tal que $g((A, t_0)) \in \mathcal{M}$.

Queremos ver que existe una vecindad $\mathcal{U}$ de A y una vecindad J de t_0 tales que $(A, t_0) \in \mathcal{U} \times J$ y $g[\mathcal{U} \times J] \subseteq \mathcal{M}$.

Como $g((A, t_0)) \in \mathcal{M}$, entonces por definición sabemos que $h(a_i, t_0) \in M_s$ para al menos una $s \in \{1, ..., m\}$.

Definimos

$$L_i = \bigcap\{M_s | s \in \{1, ..., m\} \, y \, h(a_i, t_0) \in M_s\}$$

- $L_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} M_j$.

- $L_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} M_j$.
- L_i, al ser intersección finita de abiertos, es un conjunto abierto en X.

- $L_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} M_j$.
- L_i, al ser intersección finita de abiertos, es un conjunto abierto en X.

Ahora bien, como h es una función continua y L_i es en abierto de X tenemos que para cada $i \in \{1, ..., r\}$ existen U_i abierto en X y J_i abierto en $[0,1]$ tales que $(a_i, t_0) \in U_i \times J_i$ y $g[U_i \times J_i] \subseteq L_i$.

Definimos

Definimos

- $\mathcal{U} = \left\langle U_1, U_2, ..., U_r \right\rangle$

Definimos

- $\mathcal{U} = \left\langle U_1, U_2, ..., U_r \right\rangle$
- $J = \bigcap_{j=i}^{n} J_i$

Definimos

- $\mathcal{U} = \left\langle U_1, U_2, ..., U_r \right\rangle$
- $J = \bigcap_{j=i}^{n} J_i$

- $(A, t_0) \in \mathcal{U} \times J \subseteq F_n(X) \times [0, 1]$

Definimos

- $\mathcal{U} = \left\langle U_1, U_2, ..., U_r \right\rangle$
- $J = \bigcap_{j=i}^{n} J_i$

- $(A, t_0) \in \mathcal{U} \times J \subseteq F_n(X) \times [0,1] \Rightarrow g((A, t_0)) \in g[\mathcal{U} \times J]$

$g[\mathcal{U} \times J] \subseteq \mathcal{M}$

Sea $(B, t) \in \mathcal{U} \times J$, con $B = \{b_1, ..., b_l\}$ y $t \in J$.
Recordemos que $g((B, t)) = \{h(b_1, t), ..., h(b_l, t)\}$

$g[\mathcal{U} \times J] \subseteq \mathcal{M}$

Sea $(B, t) \in \mathcal{U} \times J$, con $B = \{b_1, ..., b_l\}$ y $t \in J$.
Recordemos que $g((B, t)) = \{h(b_1, t), ..., h(b_l, t)\}$

- para toda $i \in \{1, ..., l\}$, $b_i \in U_j$ para al menos una $j \in \{1, ..., r\}$

$g[\mathcal{U} \times J] \subseteq \mathcal{M}$

Sea $(B, t) \in \mathcal{U} \times J$, con $B = \{b_1, ..., b_l\}$ y $t \in J$.
Recordemos que $g((B, t)) = \{h(b_1, t), ..., h(b_l, t)\}$

- para toda $i \in \{1, ..., l\}$, $b_i \in U_j$ para al menos una $j \in \{1, ..., r\}$
- $t \in J$, entonces $t \in J_j$

$g[\mathcal{U} \times J] \subseteq \mathcal{M}$

Sea $(B, t) \in \mathcal{U} \times J$, con $B = \{b_1, ..., b_l\}$ y $t \in J$.
Recordemos que $g((B, t)) = \{h(b_1, t), ..., h(b_l, t)\}$

- para toda $i \in \{1, ..., l\}$, $b_i \in U_j$ para al menos una $j \in \{1, ..., r\}$
- $t \in J$, entonces $t \in J_j$

$\Rightarrow (b_i, t) \in U_j \times J_j$

$g[\mathcal{U} \times J] \subseteq \mathcal{M}$

Sea $(B, t) \in \mathcal{U} \times J$, con $B = \{b_1, ..., b_l\}$ y $t \in J$.
Recordemos que $g((B, t)) = \{h(b_1, t), ..., h(b_l, t)\}$

- para toda $i \in \{1, ..., l\}$, $b_i \in U_j$ para al menos una $j \in \{1, ..., r\}$
- $t \in J$, entonces $t \in J_j$

$\Rightarrow (b_i, t) \in U_j \times J_j$

$\Rightarrow h(b_i, t) \in h[U_j \times J_j] \subseteq L_j$.

$g[\mathcal{U} \times J] \subseteq \mathcal{M}$

Sea $(B, t) \in \mathcal{U} \times J$, con $B = \{b_1, ..., b_l\}$ y $t \in J$.
Recordemos que $g((B, t)) = \{h(b_1, t), ..., h(b_l, t)\}$

- para toda $i \in \{1, ..., l\}$, $b_i \in U_j$ para al menos una $j \in \{1, ..., r\}$
- $t \in J$, entonces $t \in J_j$

$\Rightarrow (b_i, t) \in U_j \times J_j$

$\Rightarrow h(b_i, t) \in h[U_j \times J_j] \subseteq L_j$. $\Rightarrow g((B, t)) \subseteq \displaystyle\bigcup_{k=1}^{m} M_k$

(ya que $L_i \subseteq \displaystyle\bigcup_{k=1}^{m} M_k$)

Para toda $s \in \{1, ..., m\}$ se cumple que $g((B, t)) \cap M_s \neq \emptyset$

Sea $s \in \{1, ..., m\}$, como $g((A, t_0)) \in \mathcal{M}$

Sea $s \in \{1, ..., m\}$, como $g((A, t_0)) \in \mathcal{M} \Rightarrow$ para alguna $k \in \{1, ..., l\}$ tenemos que $h(a_k, t_0) \in M_s$

Para toda $s \in \{1, ..., m\}$ se cumple que $g((B, t)) \cap M_s \neq \emptyset$

Sea $s \in \{1, ..., m\}$, como $g((A, t_0)) \in \mathcal{M} \Rightarrow$ para alguna $k \in \{1, ..., l\}$ tenemos que $h(a_k, t_0) \in M_s \Rightarrow L_k \subseteq M_s$.

Sea $s \in \{1, ..., m\}$, como $g((A, t_0)) \in \mathcal{M} \Rightarrow$ para alguna $k \in \{1, ..., l\}$ tenemos que $h(a_k, t_0) \in M_s \Rightarrow L_k \subseteq M_s$.

Como $B \in \mathcal{U}$

Para toda $s \in \{1, ..., m\}$ se cumple que $g((B, t)) \cap M_s \neq \emptyset$

Sea $s \in \{1, ..., m\}$, como $g((A, t_0)) \in \mathcal{M} \Rightarrow$ para alguna $k \in \{1, ..., l\}$ tenemos que $h(a_k, t_0) \in M_s \Rightarrow L_k \subseteq M_s$.

Como $B \in \mathcal{U} \Rightarrow$ para alguna $i \in \{1, ..., l\}$ se cumple que $b_i \in U_k$

Para toda $s \in \{1, ..., m\}$ se cumple que $g((B, t)) \cap M_s \neq \emptyset$

Sea $s \in \{1, ..., m\}$, como $g((A, t_0)) \in \mathcal{M} \Rightarrow$ para alguna $k \in \{1, ..., l\}$ tenemos que $h(a_k, t_0) \in M_s \Rightarrow L_k \subseteq M_s$.

Como $B \in \mathcal{U} \Rightarrow$ para alguna $i \in \{1, ..., l\}$ se cumple que $b_i \in U_k$ y además como $t \in J = \displaystyle\bigcap_{j=i}^{n} J_i$, es claro que $t \in J_k$

Para toda $s \in \{1, ..., m\}$ se cumple que $g((B, t)) \cap M_s \neq \emptyset$

Sea $s \in \{1, ..., m\}$, como $g((A, t_0)) \in \mathcal{M} \Rightarrow$ para alguna $k \in \{1, ..., l\}$ tenemos que $h(a_k, t_0) \in M_s \Rightarrow L_k \subseteq M_s$.

Como $B \in \mathcal{U} \Rightarrow$ para alguna $i \in \{1, ..., l\}$ se cumple que $b_i \in U_k$ y además como $t \in J = \bigcap_{j=i}^{n} J_i$, es claro que $t \in J_k$
$\Rightarrow h(b_l, t) \in h[U_k \times J_k] \subseteq L_k \subseteq M_s$.

Para toda $s \in \{1, ..., m\}$ se cumple que $g((B, t)) \cap M_s \neq \emptyset$

Sea $s \in \{1, ..., m\}$, como $g((A, t_0)) \in \mathcal{M} \Rightarrow$ para alguna $k \in \{1, ..., l\}$ tenemos que $h(a_k, t_0) \in M_s \Rightarrow L_k \subseteq M_s$.

Como $B \in \mathcal{U} \Rightarrow$ para alguna $i \in \{1, ..., l\}$ se cumple que $b_i \in U_k$ y además como $t \in J = \bigcap_{j=i}^{n} J_i$, es claro que $t \in J_k$

$\Rightarrow h(b_l, t) \in h[U_k \times J_k] \subseteq L_k \subseteq M_s$.

$\therefore g((B, t)) \cap M_s \neq \emptyset$.

Para toda $s \in \{1, ..., m\}$ se cumple que $g((B,t)) \cap M_s \neq \emptyset$

Sea $s \in \{1, ..., m\}$, como $g((A, t_0)) \in \mathcal{M} \Rightarrow$ para alguna $k \in \{1, ..., l\}$ tenemos que $h(a_k, t_0) \in M_s \Rightarrow L_k \subseteq M_s$.

Como $B \in \mathcal{U} \Rightarrow$ para alguna $i \in \{1, ..., l\}$ se cumple que $b_i \in U_k$ y además como $t \in J = \displaystyle\bigcap_{j=i}^{n} J_i$, es claro que $t \in J_k$

$\Rightarrow h(b_l, t) \in h[U_k \times J_k] \subseteq L_k \subseteq M_s$.

$\therefore g((B,t)) \cap M_s \neq \emptyset$.
$\therefore g((B,t)) \in \mathcal{M}$

Para toda $s \in \{1, ..., m\}$ se cumple que $g((B, t)) \cap M_s \neq \emptyset$

Sea $s \in \{1, ..., m\}$, como $g((A, t_0)) \in \mathcal{M} \Rightarrow$ para alguna $k \in \{1, ..., l\}$ tenemos que $h(a_k, t_0) \in M_s \Rightarrow L_k \subseteq M_s$.

Como $B \in \mathcal{U} \Rightarrow$ para alguna $i \in \{1, ..., l\}$ se cumple que $b_i \in U_k$ y además como $t \in J = \bigcap_{j=i}^{n} J_i$, es claro que $t \in J_k$
$\Rightarrow h(b_l, t) \in h[U_k \times J_k] \subseteq L_k \subseteq M_s$.

$\therefore g((B, t)) \cap M_s \neq \emptyset$.
$\therefore g((B, t)) \in \mathcal{M}$
$\therefore g[\mathcal{U} \times J] \subseteq \mathcal{M}$

Para toda $s \in \{1, ..., m\}$ se cumple que $g((B, t)) \cap M_s \neq \emptyset$

Sea $s \in \{1, ..., m\}$, como $g((A, t_0)) \in \mathcal{M} \Rightarrow$ para alguna $k \in \{1, ..., l\}$ tenemos que $h(a_k, t_0) \in M_s \Rightarrow L_k \subseteq M_s$.

Como $B \in \mathcal{U} \Rightarrow$ para alguna $i \in \{1, ..., l\}$ se cumple que $b_i \in U_k$ y además como $t \in J = \bigcap_{j=i}^{n} J_i$, es claro que $t \in J_k$
$\Rightarrow h(b_l, t) \in h[U_k \times J_k] \subseteq L_k \subseteq M_s$.

$\therefore g((B, t)) \cap M_s \neq \emptyset$.
$\therefore g((B, t)) \in \mathcal{M}$
$\therefore g[\mathcal{U} \times J] \subseteq \mathcal{M}$
$\therefore g$ es continua y $F_n(X)$ es contráctil.

Si X es localmente contráctil, entonces $F_n(X)$ es localmente contráctil.

Lema

Sean X un espacio topológico de Hausdorff, $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, ..., U_m \rangle$ abierto en $F_n(X)$ y $A \in F_n(X)$ donde $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$ con $1 \leq r \leq n$ y $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Si $A \in \mathcal{U}$, entonces existe $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2, ..., V_r \rangle$ abierto en $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, para toda $i \in \{1, 2, ..., 3\}$ se tiene que $a_i \in \mathcal{V}$ y $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Referencias

- K. BORSUK and S.ULAM (1931), On symmetric products of topological spaces, Bull. Amer. math. Soc. 37, 875-882.
- GANEA, T. (1954), Symmetrische Potenzen topologischer Räume. Math. Nachr., 11: 305–316.

Fin