CONFLUENCIA EN PRODUCTO DE FUNCIONES

Fernando Valdez Ortega
Enrique Castañeda Alvarado

Universidad Autónoma del Estado de México.

19 de Noviembre de 2013.

Preliminares.

1. En el presente trabajo los espacios topológicos se asumen métricos, compactos y las funciones se consideran continuas.

Preliminares.

1. En el presente trabajo los espacios topológicos se asumen métricos, compactos y las funciones se consideran continuas.
2. Un continuo es un espacio, conexo y no vacío.

Definición

El producto $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ *de dos funciones* $f_i : X_i \to Y_i$ $(i = 1, 2)$ *se define como,*

Definición

El producto $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ *de dos funciones* $f_i : X_i \to Y_i$ $(i = 1, 2)$ *se define como,*

$$(f_1 \times f_2)(x_1 \times x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) \text{ para } x_1 \in X_1 \text{ y } x_2 \in X_2.$$

Definición

Una función suprayectiva $f : X \to Y$ *entre espacios topológicos se dice que es:*

Definición

Una función suprayectiva $f : X \to Y$ entre espacios topológicos se dice que es:

1. ***Confluente**, si para cada subcontinuo Q de Y y cada componente K de $f^{-1}(Q)$, se satisface que $f(K) = Q$, (**C**).*

Definición

Una función suprayectiva $f : X \to Y$ entre espacios topológicos se dice que es:

1. ***Confluente**, si para cada subcontinuo Q de Y y cada componente K de $f^{-1}(Q)$, se satisface que $f(K) = Q$, (**C**).*
2. ***Semiconfluente**, si para cada subcontinuo Q de Y y cada dos componentes K_1 y K_2 de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(K_1) \subset f(K_2)$ o $f(K_2) \subset f(K_1)$, (**SC**).*

Definición

Una función suprayectiva $f : X \to Y$ entre espacios topológicos se dice que es:

1. ***Confluente**, si para cada subcontinuo Q de Y y cada componente K de $f^{-1}(Q)$, se satisface que $f(K) = Q$, (**C**).*
2. ***Semiconfluente**, si para cada subcontinuo Q de Y y cada dos componentes K_1 y K_2 de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(K_1) \subset f(K_2)$ o $f(K_2) \subset f(K_1)$, (**SC**).*
3. ***Localmente confluente**, si para cada punto y de Y existe una vecindad cerrada V de y en Y tal que $f|_{f^{-1}(V)}$, es confluente, (**LC**).*

Definición

Una función suprayectiva $f : X \to Y$ entre espacios topológicos se dice que es:

1. ***Confluente**, si para cada subcontinuo Q de Y y cada componente K de $f^{-1}(Q)$, se satisface que $f(K) = Q$, (**C**).*
2. ***Semiconfluente**, si para cada subcontinuo Q de Y y cada dos componentes K_1 y K_2 de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(K_1) \subset f(K_2)$ o $f(K_2) \subset f(K_1)$, (**SC**).*
3. ***Localmente confluente**, si para cada punto y de Y existe una vecindad cerrada V de y en Y tal que $f|_{f^{-1}(V)}$, es confluente, (**LC**).*
4. ***Débilmente confluente**, si para cada subcontinuo Q de Y, existe una componente K de $f^{-1}(Q)$, que satisfaga $f(K) = Q$. (**DC**).*

Definición

1. *Diremos que una clase de funciones $\Re$ tiene la* ***propiedad 1****, si dados $f_1 \in \Re$ y $f_2 \in \Re$ entonces $f_1 \times f_2 \in \Re$.*

Definición

1. *Diremos que una clase de funciones $\Re$ tiene la **propiedad 1**, si dados $f_1 \in \Re$ y $f_2 \in \Re$ entonces $f_1 \times f_2 \in \Re$.*
2. *Diremos que una clase de funciones $\Re$ tiene la **propiedad 2**, si dado $f_1 \times f_2 \in \Re$ entonces $f_1 \in \Re$ y $f_2 \in \Re$.*

Observación

La Propiedad 1 no siempre es cierta para todas las clases de funciones.

Observación

La Propiedad 1 no siempre es cierta para todas las clases de funciones.

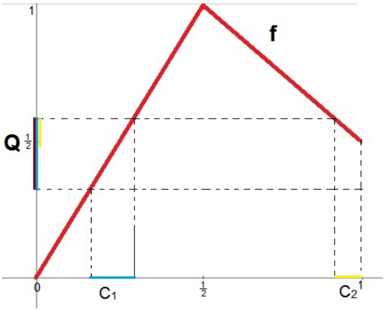
Consideremos la clase de funciones SC.
Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definida por

Observación

La Propiedad 1 no siempre es cierta para todas las clases de funciones.

Consideremos la clase de funciones SC.
Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ -x + \frac{3}{2} & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

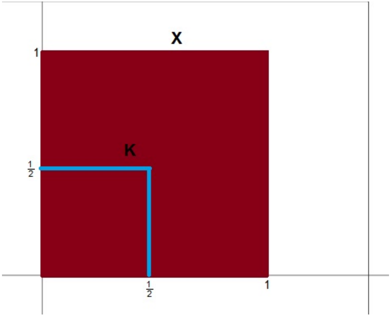


$$f \in SC.$$

Mostraremos que $f \times f \notin SC$.

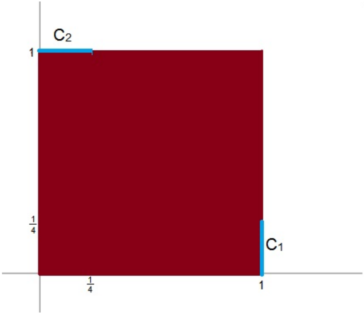
Mostraremos que $f \times f \notin SC$.

Sea $K = \{(\frac{1}{2}, y) : y \in [0, \frac{1}{2}]\} \bigcup \{(x, \frac{1}{2}) : x \in [0, \frac{1}{2}]\}$.

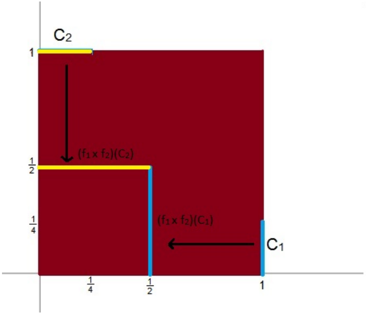


Las componentes de $(f \times f)^{-1}(K)$ son,

$$C_1 = \{(1, y) : y \in [0, \tfrac{1}{4}]\} \text{ y } C_2 = \{(x, 1) : x \in [0, \tfrac{1}{4}]\}.$$



Pero $(f \times f)(C_1) = \{(\frac{1}{2}, y) : y \in [0, \frac{1}{2}]\}$
y $(f \times f)(C_2) = \{(x, \frac{1}{2}) : x \in [0, \frac{1}{2}]\}$



Observación

La propiedad 2 no siempre es cierta para todas las clases de funciones.

Observación

La propiedad 2 no siempre es cierta para todas las clases de funciones.

Consideremos a $\mathfrak{R}$ una clase de funciones definida de la siguiente manera.

Observación

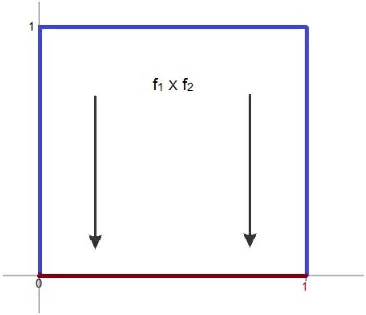
La propiedad 2 no siempre es cierta para todas las clases de funciones.

Consideremos a $\Re$ una clase de funciones definida de la siguiente manera.
Una función $f \in \Re$ si para cada continuo $K \subset Y$ existe un subconjunto fronterizo B de X, es decir $\overline{X - B} = X$, tal que $f(B) = K$.

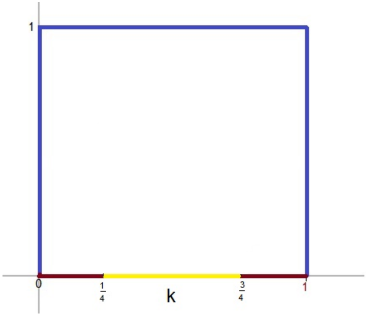
Observación

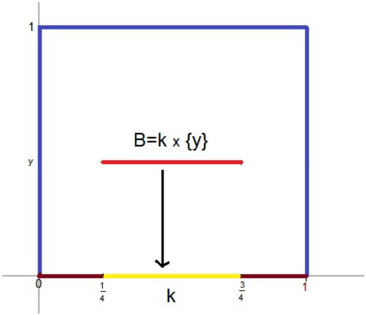
La propiedad 2 no siempre es cierta para todas las clases de funciones.

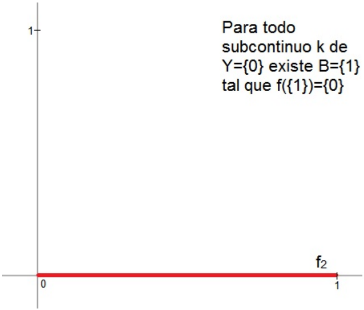
Consideremos a $\Re$ una clase de funciones definida de la siguiente manera.
Una función $f \in \Re$ si para cada continuo $K \subset Y$ existe un subconjunto fronterizo B de X, es decir $\overline{X - B} = X$, tal que $f(B) = K$.
Sean $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ la función identidad y $f_2 : [0,1] \to 0$ la función constante cero.

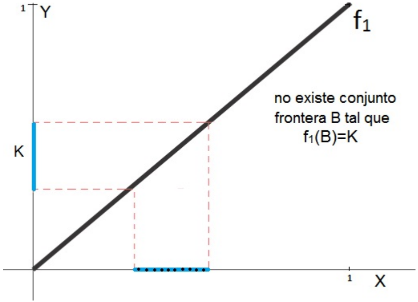


1
$f_1 \times f_2$
0
1


1
0
$\frac{1}{4}$
k
$\frac{3}{4}$
1


1
y
B=k x {y}
0
$\frac{1}{4}$
k
$\frac{3}{4}$
1


1
0
1
f2
Para todo
subcontinuo k de
Y={0} existe B={1}
tal que f({1})={0}



1
Y
f_1
no existe conjunto
frontera B tal que
$f_1(B)=K$
K
1
X

Teorema

Si una clase $\mathfrak{R}$ de funciones satisface:

Teorema

Si una clase $\Re$ *de funciones satisface:*
(1) si $f \in \Re \Rightarrow f|_{f^{-1}(A)} \in \Re$ *para cada cerrado* $A \subset Y$*, y*

Teorema

Si una clase $\Re$ de funciones satisface:
(1) si $f \in \Re \Rightarrow f|_{f^{-1}(A)} \in \Re$ para cada cerrado $A \subset Y$, y
(2) si $gf \in \Re$ y f es cerrada $\Rightarrow g \in \Re$,

Teorema

Si una clase $\Re$ *de funciones satisface:*
(1) si $f \in \Re \Rightarrow f|_{f^{-1}(A)} \in \Re$ *para cada cerrado* $A \subset Y$, *y*
(2) si $gf \in \Re$ *y* f *es cerrada* $\Rightarrow g \in \Re$,
Entonces $\Re$ *tiene la propiedad 2.*

Lema

Sea $\Re$ *una clase de funciones y* $f \in \Re$. *Entonces* $pf \in \Re$ *para cada homeomorfimo* p.

Demostración

Sean $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ *y* $Y_1 \times \{y_2\}$ *cerrado de* $Y_1 \times Y_2$. *Supongamos que* $f_1 \times f_2 \in \Re$, *entonces*

Demostración

Sean $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ *y* $Y_1 \times \{y_2\}$ *cerrado de* $Y_1 \times Y_2$. *Supongamos que* $f_1 \times f_2 \in \Re$, *entonces*

$$(f_1 \times f_2)|_{(f_1 \times f_2)^{-1}(Y_1 \times \{y_2\})} = (f_1 \times f_2)|_{(X_1 \times f^{-1}(y_2))} \in \Re$$

Demostración

Sean $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ *y* $Y_1 \times \{y_2\}$ *cerrado de* $Y_1 \times Y_2$. *Supongamos que* $f_1 \times f_2 \in \Re$, *entonces*

$$(f_1 \times f_2)|_{(f_1 \times f_2)^{-1}(Y_1 \times \{y_2\})} = (f_1 \times f_2)|_{(X_1 \times f^{-1}(y_2))} \in \Re$$

Denotemos $f^* = (f_1 \times f_2)|_{(X_1 \times f^{-1}(y_2))}$

Demostración

Sean $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ *y* $Y_1 \times \{y_2\}$ *cerrado de* $Y_1 \times Y_2$. *Supongamos que* $f_1 \times f_2 \in \Re$, *entonces*

$$(f_1 \times f_2)|_{(f_1 \times f_2)^{-1}(Y_1 \times \{y_2\})} = (f_1 \times f_2)|_{(X_1 \times f^{-1}(y_2))} \in \Re$$

Denotemos $f^* = (f_1 \times f_2)|_{(X_1 \times f^{-1}(y_2))}$
Sean $p_1 : X_1 \times f_2^{-1}(y_2) \to X_1$ *y* $p_2 : Y_1 \times \{y_2\} \to Y_1$. *Luego*

Demostración

Sean $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ *y* $Y_1 \times \{y_2\}$ *cerrado de* $Y_1 \times Y_2$. *Supongamos que* $f_1 \times f_2 \in \Re$, *entonces*

$$(f_1 \times f_2)|_{(f_1 \times f_2)^{-1}(Y_1 \times \{y_2\})} = (f_1 \times f_2)|_{(X_1 \times f^{-1}(y_2))} \in \Re$$

Denotemos $f^* = (f_1 \times f_2)|_{(X_1 \times f^{-1}(y_2))}$
Sean $p_1 : X_1 \times f_2^{-1}(y_2) \to X_1$ *y* $p_2 : Y_1 \times \{y_2\} \to Y_1$. *Luego*

$$f_1 p_1 = p_2 f^*$$

Demostración

Sean $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ *y* $Y_1 \times \{y_2\}$ *cerrado de* $Y_1 \times Y_2$. *Supongamos que* $f_1 \times f_2 \in \Re$, *entonces*

$$(f_1 \times f_2)|_{(f_1 \times f_2)^{-1}(Y_1 \times \{y_2\})} = (f_1 \times f_2)|_{(X_1 \times f^{-1}(y_2))} \in \Re$$

Denotemos $f^* = (f_1 \times f_2)|_{(X_1 \times f^{-1}(y_2))}$
Sean $p_1 : X_1 \times f_2^{-1}(y_2) \to X_1$ *y* $p_2 : Y_1 \times \{y_2\} \to Y_1$. *Luego*

$$f_1 p_1 = p_2 f^*$$

Como p_2 *es homeomorfismo y* $f^* \in \Re$, *por Lema,* $p_2 f^* \in \Re$. *Así* $f_1 p_1 \in \Re$. *Pero* p_1 *es cerrada.*

Demostración

Sean $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ *y* $Y_1 \times \{y_2\}$ *cerrado de* $Y_1 \times Y_2$. *Supongamos que* $f_1 \times f_2 \in \Re$, *entonces*

$$(f_1 \times f_2)|_{(f_1 \times f_2)^{-1}(Y_1 \times \{y_2\})} = (f_1 \times f_2)|_{(X_1 \times f^{-1}(y_2))} \in \Re$$

Denotemos $f^* = (f_1 \times f_2)|_{(X_1 \times f^{-1}(y_2))}$
Sean $p_1 : X_1 \times f_2^{-1}(y_2) \to X_1$ *y* $p_2 : Y_1 \times \{y_2\} \to Y_1$. *Luego*

$$f_1 p_1 = p_2 f^*$$

Como p_2 *es homeomorfismo y* $f^* \in \Re$, *por Lema,* $p_2 f^* \in \Re$. *Así* $f_1 p_1 \in \Re$. *Pero* p_1 *es cerrada. Por lo tanto* $f_1 \in \Re$.

Demostración

Sean $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ *y* $Y_1 \times \{y_2\}$ *cerrado de* $Y_1 \times Y_2$. *Supongamos que* $f_1 \times f_2 \in \Re$, *entonces*

$$(f_1 \times f_2)|_{(f_1 \times f_2)^{-1}(Y_1 \times \{y_2\})} = (f_1 \times f_2)|_{(X_1 \times f^{-1}(y_2))} \in \Re$$

Denotemos $f^* = (f_1 \times f_2)|_{(X_1 \times f^{-1}(y_2))}$
Sean $p_1 : X_1 \times f_2^{-1}(y_2) \to X_1$ *y* $p_2 : Y_1 \times \{y_2\} \to Y_1$. *Luego*

$$f_1 p_1 = p_2 f^*$$

Como p_2 *es homeomorfismo y* $f^* \in \Re$, *por Lema,* $p_2 f^* \in \Re$. *Así* $f_1 p_1 \in \Re$. *Pero* p_1 *es cerrada. Por lo tanto* $f_1 \in \Re$.
Análogamente $f_2 \in \Re$.

Corolario

Las clases de funciones C, SC, DC y LC tienen la propiedad 2.

Definición

Un espacio X se dice que es localmente conexo, si para cada punto $x \in X$ y cualquier vecindad U de x existe una vecindad conexa V tal que $x \in V \subset U$.

Definición

Una función suprayectiva $f : X \to Y$ *entre espacios topológicos se dice que es:*

Definición

Una función suprayectiva $f : X \to Y$ entre espacios topológicos se dice que es:

1. ***Confluente sobre continuos localemente conexos**, si para cada subcontinuo localmente conexo Q de Y y cada componente K de $f^{-1}(Q)$, se satisface que $f(K) = Q$, (**CLC**).*

Definición

Una función suprayectiva $f : X \to Y$ entre espacios topológicos se dice que es:

1. ***Confluente sobre continuos localemente conexos**, si para cada subcontinuo localmente conexo Q de Y y cada componente K de $f^{-1}(Q)$, se satisface que $f(K) = Q$, (**CLC**).*
2. ***Semiconfluente sobre continuos localemte conexos**, si para cada subcontinuo localmente conexo Q de Y y cada dos componentes K_1 y K_2 de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(K_1) \subset f(K_2)$ o $f(K_2) \subset f(K_1)$, (**SLC**).*

Proposición

Las clases de funciones CLC y SLC satisfacen:

Proposición

Las clases de funciones CLC y SLC satisfacen:

1. *para cada función* $f \in CLC$ *(o SCL) y cada subconjunto* B *de* Y*, si* $A \subset X$ *es la unión de algunas componentes de* $f^{-1}(B)$*, entonces la restricción* $f|_A : A \to f(A) \in CLC$ *(o SCL).*

Proposición

Las clases de funciones CLC y SLC satisfacen:

1. *para cada función* $f \in CLC$ *(o SCL) y cada subconjunto* B *de* Y*, si* $A \subset X$ *es la unión de algunas componentes de* $f^{-1}(B)$*, entonces la restricción* $f|_A : A \to f(A) \in CLC$ *(o SCL).*
2. *para cualesquiera dos funciones* f_1 *y* f_2 *tales que su composición* $f_2 f_1 \in \Re$*, entonces la función* $f_2 \in \Re$*.*

Proposición

Las clases de funciones CLC y SLC tienen la propiedad 2.

Proposición

Las clases de funciones CLC y SLC tienen la propiedad 2.

¿Las clases de funciones CLC y SLC tienen la *propiedad 1*?

Clase de funciones / Propiedad	C	SC	DC	LC	CLC	SLC
1	no	no	no	no	?	?
2	si	si	si	si	si	si

Muchas Gracias!