UN DENDROIDE SUAVE UNIVERSAL

Eriandi Yadira Costilla Vilchis.
Dr. Félix Capulín Pérez

Universidad Autónoma del Estado de México.

VIII Taller Estudiantil de Continuos e Hiperespacios
Puebla
20 de Noviembre de 2013.

Definición

Por un ***continuo*** X *entenderemos un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.*

PRELIMINARES

Definición

*Por un **continuo** X entenderemos un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.*

Definición

*Un **subcontinuo** es un subconjunto compacto, conexo y no vacío de un espacio métrico.*

Definición

*Diremos que un continuo X es **unicoherente** si cada vez que A y B sean subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Definición

Diremos que un continuo X es ***unicoherente*** *si cada vez que A y B sean subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Definición

Un continuo es ***hereditariamente unicoherente*** *si cualquiera de sus subcontinuos es unicoherente.*

Definición

Un ***dendroide*** *es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente.*

DENDROIDES Y DENDROIDES SUAVES

Definición

*Un **dendroide** es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente.*

Definición

*Un dendroide X es **suave en el punto p** si para cualquier sucesión de arcos $\{pa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim a_n = a$, entonces $\lim pa_n = pa$.*

DENDROIDES Y DENDROIDES SUAVES

Definición

Un ***dendroide*** *es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente.*

Definición

Un dendroide X es ***suave en el punto p*** *si para cualquier sucesión de arcos $\{pa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim a_n = a$, entonces $\lim pa_n = pa$.*

Definición

Un dendroide X es ***suave*** *si existe un punto p en X tal que X es suave en p.*

Proposición

Sea X un dendroide suave en p. Entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$, tal que:

Proposición

Sea X un dendroide suave en p. Entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$, tal que:

1. $f^{-1}(1) = \{p\}$

Proposición

Sea X un dendroide suave en p. Entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$, tal que:

1. $f^{-1}(1) = \{p\}$
2. $f^{-1}(t)$ *es cero-dimensional para cada* $t \in [0, 1]$

Proposición

Sea X un dendroide suave en p. Entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$, tal que:

1. $f^{-1}(1) = \{p\}$
2. $f^{-1}(t)$ *es cero-dimensional para cada* $t \in [0,1]$
3. *para cada* $x \in X$, f *es uno a uno sobre el arco* $[x,p]$

Proposición

Sea X un dendroide suave en p. Entonces X es encajado en un dendroide suave X^*, el cual admite una función $f : X^* \to [0, 1]$, satisfaciendo:

Proposición

Sea X un dendroide suave en p. Entonces X es encajado en un dendroide suave X^*, el cual admite una función $f : X^* \to [0,1]$, satisfaciendo:

1. $f^{-1}(1) = \{p\}$

Proposición

Sea X un dendroide suave en p. Entonces X es encajado en un dendroide suave X^*, el cual admite una función $f : X^* \to [0, 1]$, satisfaciendo:

1. $f^{-1}(1) = \{p\}$
2. $f^{-1}(t)$ *es cero-dimensional para cada* $t \in [0, 1]$

Proposición

Sea X un dendroide suave en p. Entonces X es encajado en un dendroide suave X^*, el cual admite una función $f : X^* \to [0, 1]$, satisfaciendo:

1. $f^{-1}(1) = \{p\}$
2. $f^{-1}(t)$ *es cero-dimensional para cada* $t \in [0, 1]$
3. *para cada* $x \in X$, f *es uno a uno sobre el arco* $[x, p]$

Proposición

Sea X un dendroide suave en p. Entonces X es encajado en un dendroide suave X^*, el cual admite una función $f : X^* \to [0, 1]$, satisfaciendo:

1. $f^{-1}(1) = \{p\}$
2. $f^{-1}(t)$ *es cero-dimensional para cada* $t \in [0, 1]$
3. *para cada* $x \in X$, f *es uno a uno sobre el arco* $[x, p]$
4. *para cada punto final* e *de* X^*, $f(e) = 0$.

Sea X un dendroide y $f : X \to [0, 1]$, con las características de la proposición anterior. Para cada $t \in [0, 1]$, el conjunto $f^{-1}(t)$ será llamado el $t-$nivel de X.

LÍMITES INVERSOS

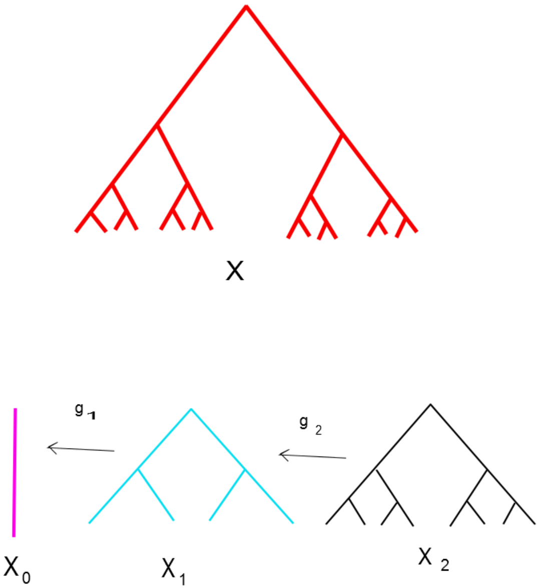
Definición

Dada una sucesión inversa $\{(X_n, g_n) | n \in \mathbb{N}\}$. *Definimos el límite inverso de la sucesión inversa como un subconjunto del producto* $\Pi_{n=1}^{\infty} X_n$ *dado de la siguiente manera:*
$X_\infty = \varprojlim (X_n, g_n) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Pi_{n=1}^{\infty} X_n | g_n(x_{n+1}) = x_n\}.$

Representación de un dendroide suave a partir de límites inversos.

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \overset{g_1}{\longleftarrow} & X_1 & \ldots & X_j & \overset{g_{j+1}}{\longleftarrow} & X_{j+1} \longleftarrow \ldots X_\infty \\ f_0 \uparrow & & f_1 \uparrow & \ldots & f_j \uparrow & & f_{j+1} \uparrow \ldots f_\infty \uparrow \\ X & \overset{i}{\longleftarrow} & X & \ldots & X & \overset{i}{\longleftarrow} & X \longleftarrow \ldots X \end{array}$$

Sea $X_0 = [0,1]$ y $f_0 = f$. Sea $p_0 = 1$.


X
g 1
g 2
X0
X1
X 2

Construcción de un dendroide suave universal de Lee Mohler y Jacek Nikiel.

Y será límite inverso de árboles finitos $Y_n, n = 0, 1, 2, ...$ con funciones de ligadura abiertas $h_n : Y_n \to Y_{n-1}$.

Construcción de un dendroide suave universal de Lee Mohler y Jacek Nikiel.

Y será límite inverso de árboles finitos $Y_n, n = 0, 1, 2, ...$
con funciones de ligadura abiertas $h_n : Y_n \to Y_{n-1}$.
$Y_0 = [0, 1]$.

Construcción de un dendroide suave universal de Lee Mohler y Jacek Nikiel.

Y será límite inverso de árboles finitos $Y_n, n = 0, 1, 2, ...$
con funciones de ligadura abiertas $h_n : Y_n \to Y_{n-1}$.
$Y_0 = [0, 1]$.
$d_1, d_2, d_3, ...$ una sucesión de racionales diádicos en $(0, 1]$.

Construcción de un dendroide suave universal de Lee Mohler y Jacek Nikiel.

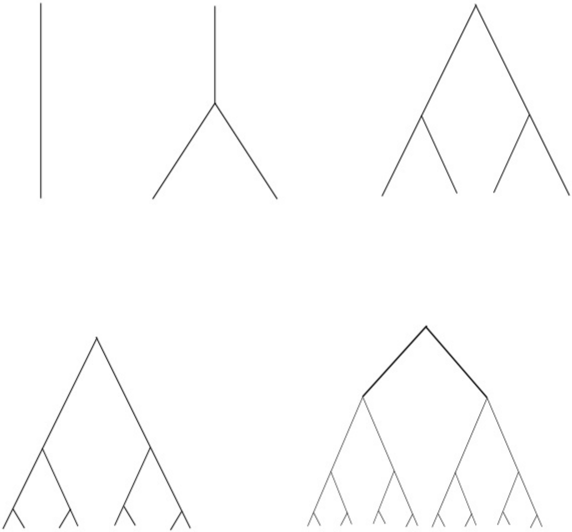
Y será límite inverso de árboles finitos $Y_n, n = 0, 1, 2, ...$ con funciones de ligadura abiertas $h_n : Y_n \to Y_{n-1}$.
$Y_0 = [0, 1]$.
$d_1, d_2, d_3, ...$ una sucesión de racionales diádicos en $(0, 1]$.
Del $1-$nivel hacia abajo al d_n-nivel, Y_n será idéntico a Y_{n-1}.

Construcción de un dendroide suave universal de Lee Mohler y Jacek Nikiel.

Y será límite inverso de árboles finitos $Y_n, n = 0, 1, 2, ...$ con funciones de ligadura abiertas $h_n : Y_n \to Y_{n-1}$.
$Y_0 = [0, 1]$.
$d_1, d_2, d_3, ...$ una sucesión de racionales diádicos en $(0, 1]$.
Del $1-$nivel hacia abajo al d_n-nivel, Y_n será idéntico a Y_{n-1}.
Del $0-$nivel hacia arriba al d_n-nivel, Y_n consistirá de dos copias de la parte correspondiente de Y_{n-1}, identificado en el d_n-nivel.

$$d_1 = \frac{1}{2},\ d_2 = 1,\ d_3 = \frac{1}{8},\ d_4 = \frac{1}{2},\ d_5 = \frac{3}{4}.$$

$d_1 = \frac{1}{2},\ d_2 = 1,\ d_3 = \frac{1}{8},\ d_4 = \frac{1}{2},\ d_5 = \frac{3}{4}.$



Si X es el límite inverso de árboles X_j definidos como antes, entonces hay una subsucesión Y_{n_j} de los árboles Y_n que preservan la inyectividad en cada nivel por medio de funciones $i_j : X_j \to Y_{n_j}$, tales que el siguiente diagrama conmute:

Si X es el límite inverso de árboles X_j definidos como antes, entonces hay una subsucesión Y_{n_j} de los árboles Y_n que preservan la inyectividad en cada nivel por medio de funciones $i_j : X_j \to Y_{n_j}$, tales que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccccccc}
Y_0 & \longleftarrow & Y_{n_1} & \ldots & Y_{n_j} & \longleftarrow & Y_{n_{j+1}} \longleftarrow \ldots Y_\infty \\
i_0 \uparrow & & i_1 \uparrow & \ldots & i_j \uparrow & & i_{j+1} \uparrow \ldots i_\infty \uparrow \\
X_0 & \longleftarrow & X_1 & \ldots & X_j & \longleftarrow & X_{j+1} \longleftarrow \ldots X_\infty
\end{array}$$

Si X es el límite inverso de árboles X_j definidos como antes, entonces hay una subsucesión Y_{n_j} de los árboles Y_n que preservan la inyectividad en cada nivel por medio de funciones $i_j : X_j \to Y_{n_j}$, tales que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccccccc} Y_0 & \longleftarrow & Y_{n_1} & ... & Y_{n_j} & \longleftarrow & Y_{n_{j+1}} \longleftarrow ... Y_\infty \\ i_0 \uparrow & & i_1 \uparrow & ... & i_j \uparrow & & i_{j+1} \uparrow ... i_\infty \uparrow \\ X_0 & \longleftarrow & X_1 & ... & X_j & \longleftarrow & X_{j+1} \longleftarrow ... X_\infty \end{array}$$

$\therefore X$ admite un encaje en Y, preservando el nivel.

Propiedades

El conjunto de puntos finales de Y es cerrado.

Propiedades

El conjunto de puntos finales de Y es cerrado.Cualquier otro punto es de ramificación.

Propiedades

El conjunto de puntos finales de Y es cerrado.Cualquier otro punto es de ramificación.

El conjunto de puntos finales de Y es el $0-$nivel de Y. Por tanto, el conjunto de puntos finales de Y es cerrado.

Propiedades

El conjunto de puntos finales de Y es cerrado.Cualquier otro punto es de ramificación.

El conjunto de puntos finales de Y es el $0-$nivel de Y. Por tanto, el conjunto de puntos finales de Y es cerrado.
Para cualquier $t \in [0,1)$, el $t-$nivel de Y es un conjunto de Cantor.

Más aún, si x y x' son dos puntos de Y en el mismo nivel, entonces hay un homeomorfismo natural $h : Y \to Y$, que preserva el nivel, tal que $h(x') = x$.

Más aún, si x y x' son dos puntos de Y en el mismo nivel, entonces hay un homeomorfismo natural $h : Y \to Y$, que preserva el nivel, tal que $h(x') = x$.

Sea $y \in Y$ tal que $y = (y_0, y_1, y_2, ...)$.

Más aún, si x y x' son dos puntos de Y en el mismo nivel, entonces hay un homeomorfismo natural $h : Y \to Y$, que preserva el nivel, tal que $h(x') = x$.

Sea $y \in Y$ tal que $y = (y_0, y_1, y_2, ...)$.
$(t_0, t_1, t_2, ...)$, $t_0 = y_0$.

Más aún, si x y x' son dos puntos de Y en el mismo nivel, entonces hay un homeomorfismo natural $h : Y \to Y$, que preserva el nivel, tal que $h(x') = x$.

Sea $y \in Y$ tal que $y = (y_0, y_1, y_2, ...)$.
$(t_0, t_1, t_2, ...)$, $t_0 = y_0$.
Si $i > 0$ y $t_0 < d_i$, $\Rightarrow t_i = 0$ si y_i está en la "mitad" izquierda de la parte dividida de Y_i

Más aún, si x y x' son dos puntos de Y en el mismo nivel, entonces hay un homeomorfismo natural $h : Y \to Y$, que preserva el nivel, tal que $h(x') = x$.

Sea $y \in Y$ tal que $y = (y_0, y_1, y_2, ...)$.
$(t_0, t_1, t_2, ...)$, $t_0 = y_0$.
Si $i > 0$ y $t_0 < d_i$, $\Rightarrow t_i = 0$ si y_i está en la "mitad" izquierda de la parte dividida de Y_i ó $t_i = 1$ si y_i está en la "mitad" derecha de la parte dividida de Y_i.

Más aún, si x y x' son dos puntos de Y en el mismo nivel, entonces hay un homeomorfismo natural $h : Y \to Y$, que preserva el nivel, tal que $h(x') = x$.

Sea $y \in Y$ tal que $y = (y_0, y_1, y_2, ...)$.
$(t_0, t_1, t_2, ...)$, $t_0 = y_0$.
Si $i > 0$ y $t_0 < d_i$, $\Rightarrow t_i = 0$ si y_i está en la "mitad" izquierda de la parte dividida de Y_i ó $t_i = 1$ si y_i está en la "mitad" derecha de la parte dividida de Y_i.
Si $t_0 \geq d_i$, asignamos $t_i = 0$ a y.

Más aún, si x y x' son dos puntos de Y en el mismo nivel, entonces hay un homeomorfismo natural $h : Y \to Y$, que preserva el nivel, tal que $h(x') = x$.

Sea $y \in Y$ tal que $y = (y_0, y_1, y_2, ...)$.
$(t_0, t_1, t_2, ...)$, $t_0 = y_0$.
Si $i > 0$ y $t_0 < d_i$, $\Rightarrow t_i = 0$ si y_i está en la "mitad" izquierda de la parte dividida de Y_i ó $t_i = 1$ si y_i está en la "mitad" derecha de la parte dividida de Y_i.
Si $t_0 \geq d_i$, asignamos $t_i = 0$ a y.
Para cada $i \geq 1$, podemos definir un homeomorfismo $h_i : Y \to Y$ tal que
$h_i(y)_j = t_j$ si $j \neq i$,

Más aún, si x y x' son dos puntos de Y en el mismo nivel, entonces hay un homeomorfismo natural $h : Y \to Y$, que preserva el nivel, tal que $h(x') = x$.

Sea $y \in Y$ tal que $y = (y_0, y_1, y_2, ...)$.
$(t_0, t_1, t_2, ...)$, $t_0 = y_0$.
Si $i > 0$ y $t_0 < d_i$, $\Rightarrow t_i = 0$ si y_i está en la "mitad" izquierda de la parte dividida de Y_i ó $t_i = 1$ si y_i está en la "mitad" derecha de la parte dividida de Y_i.
Si $t_0 \geq d_i$, asignamos $t_i = 0$ a y.
Para cada $i \geq 1$, podemos definir un homeomorfismo $h_i : Y \to Y$ tal que
$h_i(y)_j = t_j$ si $j \neq i$, $h_i(y)_i = 0$ si $t_i = 1$,

Más aún, si x y x' son dos puntos de Y en el mismo nivel, entonces hay un homeomorfismo natural $h : Y \to Y$, que preserva el nivel, tal que $h(x') = x$.

Sea $y \in Y$ tal que $y = (y_0, y_1, y_2, ...)$.
$(t_0, t_1, t_2, ...)$, $t_0 = y_0$.
Si $i > 0$ y $t_0 < d_i$, $\Rightarrow t_i = 0$ si y_i está en la "mitad" izquierda de la parte dividida de Y_i ó $t_i = 1$ si y_i está en la "mitad" derecha de la parte dividida de Y_i.
Si $t_0 \geq d_i$, asignamos $t_i = 0$ a y.
Para cada $i \geq 1$, podemos definir un homeomorfismo $h_i : Y \to Y$ tal que
$h_i(y)_j = t_j$ si $j \neq i$, $h_i(y)_i = 0$ si $t_i = 1$, $h_i(y)_i = 1$ si $t_i = 0$.

Más aún, si x y x' son dos puntos de Y en el mismo nivel, entonces hay un homeomorfismo natural $h : Y \to Y$, que preserva el nivel, tal que $h(x') = x$.

Sea $y \in Y$ tal que $y = (y_0, y_1, y_2, ...)$.
$(t_0, t_1, t_2, ...)$, $t_0 = y_0$.
Si $i > 0$ y $t_0 < d_i$, $\Rightarrow t_i = 0$ si y_i está en la "mitad" izquierda de la parte dividida de Y_i ó $t_i = 1$ si y_i está en la "mitad" derecha de la parte dividida de Y_i.
Si $t_0 \geq d_i$, asignamos $t_i = 0$ a y.
Para cada $i \geq 1$, podemos definir un homeomorfismo $h_i : Y \to Y$ tal que
$h_i(y)_j = t_j$ si $j \neq i$, $h_i(y)_i = 0$ si $t_i = 1$, $h_i(y)_i = 1$ si $t_i = 0$.
h_i "moverá" las dos mitades de Y, definida por las mitades divididas de Y_i.

Más aún, si x y x' son dos puntos de Y en el mismo nivel, entonces hay un homeomorfismo natural $h : Y \to Y$, que preserva el nivel, tal que $h(x') = x$.

Sea $y \in Y$ tal que $y = (y_0, y_1, y_2, ...)$.
$(t_0, t_1, t_2, ...)$, $t_0 = y_0$.
Si $i > 0$ y $t_0 < d_i$, $\Rightarrow t_i = 0$ si y_i está en la "mitad" izquierda de la parte dividida de Y_i ó $t_i = 1$ si y_i está en la "mitad" derecha de la parte dividida de Y_i.
Si $t_0 \geq d_i$, asignamos $t_i = 0$ a y.
Para cada $i \geq 1$, podemos definir un homeomorfismo $h_i : Y \to Y$ tal que
$h_i(y)_j = t_j$ si $j \neq i$, $h_i(y)_i = 0$ si $t_i = 1$, $h_i(y)_i = 1$ si $t_i = 0$.
h_i "moverá" las dos mitades de Y, definida por las mitades divididas de Y_i.
h será la composición de algunos h_i.

Ahora veremos que todo punto que no es final es de ramificación. Más aún, el orden de cada punto de ramificación es $2^{\aleph_0}$.

Ahora veremos que todo punto que no es final es de ramificación. Más aún, el orden de cada punto de ramificación es $2^{\aleph_0}$.

Sea x un punto de Y. Supongamos que x está en el $t-$nivel de Y, $t \neq 0$.

Ahora veremos que todo punto que no es final es de ramificación. Más aún, el orden de cada punto de ramificación es $2^{\aleph_0}$.

Sea x un punto de Y. Supongamos que x está en el $t-$nivel de Y, $t \neq 0$.
Sea D un dendroide suave con las características de la proposición, que tiene un punto de ramificación z de orden $2^{\aleph_0}$ en el $t-$nivel de Y.

Ahora veremos que todo punto que no es final es de ramificación. Más aún, el orden de cada punto de ramificación es $2^{\aleph_0}$.

Sea x un punto de Y. Supongamos que x está en el $t-$nivel de Y, $t \neq 0$.
Sea D un dendroide suave con las características de la proposición, que tiene un punto de ramificación z de orden $2^{\aleph_0}$ en el $t-$nivel de Y.
Entonces D admite un encaje, que preserva el nivel, $e : D \to Y$.

Ahora veremos que todo punto que no es final es de ramificación. Más aún, el orden de cada punto de ramificación es $2^{\aleph_0}$.

Sea x un punto de Y. Supongamos que x está en el $t-$nivel de Y, $t \neq 0$.
Sea D un dendroide suave con las características de la proposición, que tiene un punto de ramificación z de orden $2^{\aleph_0}$ en el $t-$nivel de Y.
Entonces D admite un encaje, que preserva el nivel, $e : D \to Y$.Entonces $e(z)$ es un punto en el $t-$nivel de Y.
Entonces existe un homeomorfismo h, tal que $h(e(z)) = x$.

Ahora veremos que todo punto que no es final es de ramificación. Más aún, el orden de cada punto de ramificación es $2^{\aleph_0}$.

Sea x un punto de Y. Supongamos que x está en el $t-$nivel de Y, $t \neq 0$.
Sea D un dendroide suave con las características de la proposición, que tiene un punto de ramificación z de orden $2^{\aleph_0}$ en el $t-$nivel de Y.
Entonces D admite un encaje, que preserva el nivel, $e : D \to Y$.Entonces $e(z)$ es un punto en el $t-$nivel de Y.
Entonces existe un homeomorfismo h, tal que $h(e(z)) = x$.
x es un punto de ramificación de orden $2^{\aleph_0}$.

¡GRACIAS!