Algunas funciones especiales entre continuos

Emanuel Ramírez Marquez

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas. BUAP

noviembre 2013

Preliminares

Definición

Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que la función f es
(I) Un *homeomorfismo* si f es inyectiva y su función inversa, f^{-1}, es continua.

Preliminares

Definición

Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que la función f es
(I) Un *homeomorfismo* si f es inyectiva y su función inversa, f^{-1}, es continua.
(II) *Abierta* si f manda a cualquier abierto de X en un abierto de Y.

Preliminares

Definición

Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que la función f es
(I) Un *homeomorfismo* si f es inyectiva y su función inversa, f^{-1}, es continua.
(II) *Abierta* si f manda a cualquier abierto de X en un abierto de Y.
(III) *Monótona* si para cualquier punto $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es conexo.

Preliminares

Definición

Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que la función f es
(I) Un *homeomorfismo* si f es inyectiva y su función inversa, f^{-1}, es continua.
(II) *Abierta* si f manda a cualquier abierto de X en un abierto de Y.
(III) *Monótona* si para cualquier punto $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es conexo.
(IV) *Confluente* si para cualquier subcontinuo Q de Y, y cualquier componente K de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(K) = Q$.

Preliminares

Definición

Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que la función f es

(I) Un *homeomorfismo* si f es inyectiva y su función inversa, f^{-1}, es continua.

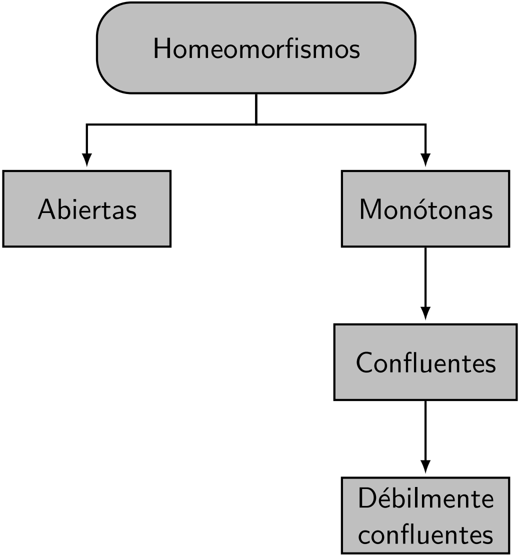
(II) *Abierta* si f manda a cualquier abierto de X en un abierto de Y.

(III) *Monótona* si para cualquier punto $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es conexo.

(IV) *Confluente* si para cualquier subcontinuo Q de Y, y cualquier componente K de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(K) = Q$.

(V)*Débilmente confluente* si para cualquier subcontinuo Q de Y, es posible encontrar una componente K de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(K) = Q$.

Objetivo


Homeomorfismos
Abiertas
Monótonas
Confluentes
Débilmente confluentes

Proposición 1

Sean X y Y dos espacios Hausdorff compactos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva, f es una función monótona si, y sólo si, para cada K subcontinuo de Y, se tiene que $f^{-1}(K)$ es un subcontinuo de X.

Proposición 1

Sean X y Y dos espacios Hausdorff compactos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva, f es una función monótona si, y sólo si, para cada K subcontinuo de Y, se tiene que $f^{-1}(K)$ es un subcontinuo de X.

Proposición 2

Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, si f es un homeomorfismo entonces es una funcion abierta y monótona.

Demostración

Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo
Veamos que f es abierta, para esto sea V un abierto en X tenemos que $f(V) = (f^{-1})^{-1}(V)$ y como f^{-1} es continua por hipótesis, entonces $f(V)$ es un abierto en Y.

Demostración

Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo
Veamos que f es abierta, para esto sea V un abierto en X tenemos que $f(V) = (f^{-1})^{-1}(V)$ y como f^{-1} es continua por hipótesis, entonces $f(V)$ es un abierto en Y.
Probemos que f es monótona , tomemos K un subcontinuo de Y, como f es un homeomorfismo f^{-1} es continua, y dado que tanto la compacidad como la conexidad se preservan por funciones continuas tenemos que $f^{-1}(K)$ es un continuo, y así f es monótona.
Por lo tanto f es una función abierta y monótona.

Proposición 3

Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, si f es monótona entonces es confluente.

Proposición 3

Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, si f es monótona entonces es confluente.

Demostración

Sea $f : X \to Y$ una función monótona y Q un subcontinuo de Y, tomamos K una componente de $f^{-1}(Q)$, como f es monótona se sigue de la proposición 1 que $f^{-1}(Q)$ es un continuo y así conexo, por lo que K sólo puede ser $f^{-1}(Q)$, de modo que $f(K) = f(f^{-1}(Q)) = Q$. De lo que podemos concluir que f es confluente.

Proposición 4

Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, si f es confluente entonces es débilmente confluente.

Observación 1

No toda función abierta es monótona.

Observación 1

No toda función abierta es monótona.

Ejemplo 1

Definamos $f(x) = \mid x \mid$ para $x \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, con la métrica heredada por la métrica usual en $\mathbb{R}$. La función f es abierta pero no es monótona.

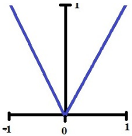


Figura : 1

f es una función abierta ya que es una función continua y suprayectiva, ahora tomemos U un abierto básico de $[-1,1]$, entonces U es de la forma $[-1,a)$, $(b,1]$ ó (a,b) con $-1 < a < b < 1$ y tenemos los casos:
Caso I. Si $0 \in U$, entonces,

$$f(U) = \begin{cases} [0,1] & \text{si } U = [-1,a) \text{ ó } (b,1]; \\ [0,c), \text{ donde } c = \text{máx}\{-a,b\} & \text{si } U = (a,b) \end{cases}$$

los cuales son abiertos en $[0,1]$.

Caso II. Si $0 \notin U$, entonces

$$f(U) = \begin{cases} (-a, 1], & \text{si } U = [-1, a); \\ (b, 1], & \text{si } U = (b, 1] \\ (a, b), & \text{si } U = (a, b) \text{ y } 0 < a \\ (-b, -a), & \text{si } U = (a, b) \text{y } b < 0 \end{cases}$$

los cuales son abiertos en $[0, 1]$.
Por lo cual f es una función abierta, pero si tomamos el punto $1 \in [0, 1]$, su imagen inversa es $\{-1, 1\}$ la cual no es conexa, así f no es monótona.

Observación 2

No toda función abierta es un homeomorfismo.

Observación 2

No toda función abierta es un homeomorfismo.

Observación 3

No toda función monótona es un homeomorfismo.

Observación 2

No toda función abierta es un homeomorfismo.

Observación 3

No toda función monótona es un homeomorfismo.

ejemplo 2

Sea $f : [0,1] \to [0, \frac{1}{2}]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

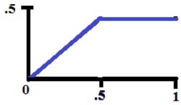


Figura : 2

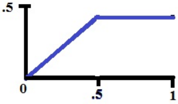


Figura : 2

f es monótona, pero no es un homeomorfismo.
Veamos que f es monótona, para esto tomemos un punto $x \in [0, \frac{1}{2}]$.
Si $x \in [0, \frac{1}{2})$ tenemos que $f^{-1}(\{x\}) = \{x\}$, el cual es conexo.

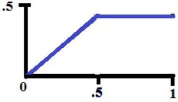


Figura : 2

f es monótona, pero no es un homeomorfismo.
Veamos que f es monótona, para esto tomemos un punto $x \in [0, \frac{1}{2}]$.
Si $x \in [0, \frac{1}{2})$ tenemos que $f^{-1}(\{x\}) = \{x\}$, el cual es conexo.
Si $x = \frac{1}{2}$ entonces $f^{-1}(\{x\}) = [\frac{1}{2}, 1]$ el cual es conexo. por lo que f es monótona.

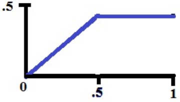


Figura : 2

f es monótona, pero no es un homeomorfismo.
Veamos que f es monótona, para esto tomemos un punto $x \in [0, \frac{1}{2}]$.
Si $x \in [0, \frac{1}{2})$ tenemos que $f^{-1}(\{x\}) = \{x\}$, el cual es conexo.
Si $x = \frac{1}{2}$ entonces $f^{-1}(\{x\}) = [\frac{1}{2}, 1]$ el cual es conexo. por lo que f es monótona. La función f no es un homeomorfismo pues no es inyectiva.

Observación 4

No toda función confluente es monótona.

Observación 4

No toda función confluente es monótona.

Ejemplo 3

Consideremos la función del ejemplo 1,veamos que es confluente.
Sea Q un subcontinuo de $[0,1]$ de modo que $Q=[a,b]$ donde $0\leq a\leq b\leq 1$, de modo que

$$f^{-1}(Q)=\begin{cases} [-b,-a]\cup[a,b], & \text{si } 0<a\leq b\leq 1; \\ [-b,b], & \text{si } 0=a\leq b\leq 1 \end{cases}$$

Si $f^{-1}(Q) = [-b, -a] \cup [a, b]$ entonces $f([-b, -a]) = [a, b] = Q$ y $f([a, b]) = [a, b] = Q$.

Si $f^{-1}(Q) = [-b, -a] \cup [a, b]$ entonces $f([-b, -a]) = [a, b] = Q$ y $f([a, b]) = [a, b] = Q$.
Si $f^{-1}(Q) = [-b, b]$ entonces $f([-b, b]) = [1, b] = Q$.

Si $f^{-1}(Q) = [-b, -a] \cup [a, b]$ entonces $f([-b, -a]) = [a, b] = Q$ y $f([a, b]) = [a, b] = Q$.
Si $f^{-1}(Q) = [-b, b]$ entonces $f([-b, b]) = [1, b] = Q$. Por lo que f es confluente.

Observación 5

No toda función débilmente confluente es confluente.

Ejemplo 4

Consideremos la función $f : [-1, 2] \to [0, 2]$ definida por $f(x) = |\ x\ |$

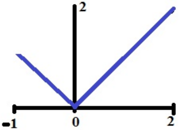


Figura : 3

Veamos que f es débilmente confluente, para esto tomemos un subcontinuo Q de $[0,2]$, de modo que $Q=[a,b]$, con $0 \leq a \leq b \leq 2$.

Veamos que f es débilmente confluente, para esto tomemos un subcontinuo Q de $[0,2]$, de modo que $Q = [a,b]$, con $0 \leq a \leq b \leq 2$. Si $1 \in int(Q)$, entonces $f^{-1}(Q) = [-1,-a] \cup [a,b]$ y $f([a,b]) = [a,b] = Q$

Veamos que f es débilmente confluente, para esto tomemos un subcontinuo Q de $[0,2]$, de modo que $Q = [a,b]$, con $0 \leq a \leq b \leq 2$.
Si $1 \in int(Q)$, entonces $f^{-1}(Q) = [-1,-a] \cup [a,b]$ y
$f([a,b]) = [a,b] = Q$
Si 1 no está en $int(Q)$, entonces
i) $f^{-1}(Q) = [-b,-a] \cup [a,b]$, si $b \leq 1$, con $f([a,b]) = [a,b] = Q$
ii)$f^{-1}(Q) = [a,b]$, si $1 \leq a$, y $f([a,b]) = [a,b] = Q$.

Veamos que f es débilmente confluente, para esto tomemos un subcontinuo Q de $[0, 2]$, de modo que $Q = [a, b]$, con $0 \leq a \leq b \leq 2$.
Si $1 \in int(Q)$, entonces $f^{-1}(Q) = [-1, -a] \cup [a, b]$ y
$f([a, b]) = [a, b] = Q$
Si 1 no está en $int(Q)$, entonces
i) $f^{-1}(Q) = [-b, -a] \cup [a, b]$, si $b \leq 1$, con $f([a, b]) = [a, b] = Q$
ii)$f^{-1}(Q) = [a, b]$, si $1 \leq a$, y $f([a, b]) = [a, b] = Q$.
Por lo que f es una función débilmente confluente.

Veamos que f es débilmente confluente, para esto tomemos un subcontinuo Q de $[0,2]$, de modo que $Q = [a,b]$, con $0 \leq a \leq b \leq 2$.
Si $1 \in int(Q)$, entonces $f^{-1}(Q) = [-1,-a] \cup [a,b]$ y
$f([a,b]) = [a,b] = Q$
Si 1 no está en $int(Q)$, entonces
i) $f^{-1}(Q) = [-b,-a] \cup [a,b]$, si $b \leq 1$, con $f([a,b]) = [a,b] = Q$
ii)$f^{-1}(Q) = [a,b]$, si $1 \leq a$, y $f([a,b]) = [a,b] = Q$.
Por lo que f es una función débilmente confluente. Pero f no es confluente, ya que si tomamos a $Q = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ subcontinuo de $[0,2]$, tenemos que $f^{-1}(Q) = [-1,-\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, pero $f([-1,-\frac{1}{2}]) = [\frac{1}{2}, 1] \neq Q$.

GRACIAS