# La diagonal como separador

Jose Luis Suárez López

FCFM-BUAP

Noviembre 2013

# Preliminares.

# Preliminares.

**Definición (Continuo)**

Un continuo es un espacio topólogico metrizable, compacto, conexo y no vacío.

# Preliminares.

**Definición (Continuo)**

Un continuo es un espacio topólogico metrizable, compacto, conexo y no vacío.

**Definición**

Para un espacio topológico X. La diagonal del cuadrado de $X$, denotada por $\triangle_X$, es definida por $\triangle_X = \{(x, x) : x \in X\}$.

# Preliminares.

**Definición (Continuo)**

Un continuo es un espacio topólogico metrizable, compacto, conexo y no vacío.

**Definición**

Para un espacio topológico X. La diagonal del cuadrado de $X$, denotada por $\triangle_X$, es definida por $\triangle_X = \{(x, x) : x \in X\}$.

**Definición (Arco)**

Un arco es cualquier espacio topológico $X$ homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

# Problema.

Notamos que si al cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ le quitamos su diagonal $\triangle_{[0,1]}$, el resultado es un conjunto no conexo.

# Problema.

Notamos que si al cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ le quitamos su diagonal $\triangle_{[0,1]}$, el resultado es un conjunto no conexo.

Esto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Existe un continuo $X$ diferente del intervalo $[0,1]$ tal que su cuadrado $X \times X$ es separado por su diagonal $\triangle_X$?

# Problema.

Notamos que si al cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ le quitamos su diagonal $\triangle_{[0,1]}$, el resultado es un conjunto no conexo.

Esto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Existe un continuo $X$ diferente del intervalo $[0,1]$ tal que su cuadrado $X \times X$ es separado por su diagonal $\triangle_X$?

La respuesta es negativa.

# Recordemos.

# Recordemos.

### Definición

Sean $X$ un espacio topológico conexo y $p \in X$. Si $X \setminus \{p\}$ es conexo, entonces se dice que $p$ es un punto de no corte de $X$. Si $X \setminus \{p\}$ es no conexo, entonces se dice que $p$ es un punto de corte de $X$.

# Recordemos.

**Definición**

Sean $X$ un espacio topológico conexo y $p \in X$. Si $X \setminus \{p\}$ es conexo, entonces se dice que $p$ es un punto de no corte de $X$. Si $X \setminus \{p\}$ es no conexo, entonces se dice que $p$ es un punto de corte de $X$.

**Notación.**

Para un punto $q$ de un espacio topológico $X$, denotamos $X_q = X \setminus \{q\}$.

# Resultados.

# Resultados.

## Notación.

Para tres puntos diferentes $x, y, z \in X$ en un espacio topológico, denotamos:

$$H(x,y,z) = (\{x\} \times X_x) \cup (X_x \times \{x\})$$
$$\cup(\{y\} \times X_y) \cup (X_y \times \{y\})$$
$$\cup(\{z\} \times X_z) \cup (X_z \times \{z\})$$

# Resultados.

## Notación.

Para tres puntos diferentes $x, y, z \in X$ en un espacio topológico, denotamos:

$$H(x,y,z) = (\{x\} \times X_x) \cup (X_x \times \{x\})$$
$$\cup(\{y\} \times X_y) \cup (X_y \times \{y\})$$
$$\cup(\{z\} \times X_z) \cup (X_z \times \{z\})$$

## Lema

Sean $X$ espacio topológico conexo y $x, y, z \in X$ tres puntos diferentes que no son de corte. Entonces $H(x,y,z)$ es un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$.

**Teorema**

Si $X$ un continuo, entonces $(X \times X) \setminus \triangle_X$ no es conexo si y sólo si $X$ es un arco.

## Teorema

Si $X$ un continuo, entonces $(X \times X) \setminus \triangle_X$ no es conexo si y sólo si $X$ es un arco.

## Demostración

[$\Leftarrow$ Si $X$ es un arco, se tiene que $X$ es homeomorfo a $[0,1]$, además $(X \times X) \setminus \triangle_X$ es homeomorfo a $([0,1] \times [0,1]) \setminus \triangle_{[0,1]}$, así $(X \times X) \setminus \triangle_X$ es no conexo.

## Teorema

Si $X$ un continuo, entonces $(X \times X) \setminus \triangle_X$ no es conexo si y sólo si $X$ es un arco.

## Demostración

[$\Leftarrow$ Si $X$ es un arco, se tiene que $X$ es homeomorfo a $[0,1]$, además $(X \times X) \setminus \triangle_X$ es homeomorfo a $([0,1] \times [0,1]) \setminus \triangle_{[0,1]}$, así $(X \times X) \setminus \triangle_X$ es no conexo.

$\Rightarrow$] Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $X$ no es un arco, se sigue que $X$ tiene al menos tres puntos que no son de corte. Probaremos que $(X \times X) \setminus \triangle_X$ es conexo. Fijemos dos puntos que no son de corte, digamos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Notemos que $(x, y) \in (X \times X) \setminus \triangle_X$.

Sea $(p,q) \in (X \times X) \setminus \triangle_X$ tal que $(p,q) \neq (x,y)$, probaremos que existe un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ tal que contiene a $(x,y)$ y $(p,q)$.

Sea $(p,q) \in (X \times X) \setminus \triangle_X$ tal que $(p,q) \neq (x,y)$, probaremos que existe un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ tal que contiene a $(x,y)$ y $(p,q)$.

Tenemos los siguientes casos:

*Caso I*. Los puntos $p$ y $q$ no son de corte.

Sea $(p, q) \in (X \times X) \setminus \triangle_X$ tal que $(p, q) \neq (x, y)$, probaremos que existe un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ tal que contiene a $(x, y)$ y $(p, q)$.

Tenemos los siguientes casos:

*Caso I.* Los puntos $p$ y $q$ no son de corte.

*I.1.* $(p, q) = (y, x)$.
Sea $z \in X \setminus \{x, y\}$ tal que $z$ no es un punto de corte de $X$. Se sigue que, $H(x, y, z)$ es un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ tal que $(x, y)$ y $(p, q)$ están contenidos en $H(x, y, z)$.

*I.2.* $(p,q) \neq (y,x)$.
Supongamos que $p \in X \setminus \{x,y\}$, se sigue que $H(x,y,p)$ es un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ tal que contiene a $(x,y)$. Notemos que $(p,q) \in (\{p\} \times X_p) \subset H(x,y,p)$, se sigue $(p,q) \in H(x,y,p)$, así $H(x,y,p)$ es el subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ que deseamos.

*Caso II*. Al menos uno de los puntos $p$ y $q$ es un punto de corte.

S. P. G. Supongamos que $p$ es un punto de corte, de esta manera $X_p$ es no conexo. Como $q \in X_p$, sea $K$ la componente conexa de $X_p$ tal que $q \in K$. Sabemos que $K \cup \{p\}$ es un continuo y que existe un punto $z$ que no es de corte de $K \cup \{p\}$ tal que $z \in K$ y $z$ no es de corte de $X$. Como $p \notin K$ se sigue que $z \neq p$. Notemos que $\{p\} \times K$ es un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ tal que $(p, q), (p, z) \in \{p\} \times K$. Luego tenemos los siguientes subcasos:

*II. 1.* $z \in X \setminus \{x, y\}$.
Se sigue que $H(x, y, z)$ es un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ tal que $(x, y) \in H(x, y, z)$. Note que $(p, z) \in X_z \times \{z\} \subset H(x, y, z)$, de tal forma que $(p, z) \in (\{p\} \times K) \cap H(x, y, z)$, así $(\{p\} \times K) \cup H(x, y, z)$ es el subconjunto que deseamos.

*II. 1.* $z \in X \setminus \{x, y\}$.
Se sigue que $H(x, y, z)$ es un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ tal que $(x, y) \in H(x, y, z)$. Note que $(p, z) \in X_z \times \{z\} \subset H(x, y, z)$, de tal forma que $(p, z) \in (\{p\} \times K) \cap H(x, y, z)$, así $(\{p\} \times K) \cup H(x, y, z)$ es el subconjunto que deseamos.

*II. 2.* $z \in \{x, y\}$
Supongamos que $z = x$. Entonces $(p, q), (p, x) \in (\{p\} \times K)$. Sea $w \in X \setminus \{x, y\}$ un punto que no es de corte de $X$. Se sabe que $H(x, y, w)$ es un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ tal que $(x, y) \in H(x, y, w)$. Note que $(p, x) \in X_x \times \{x\} \subset H(x, y, w)$ de tal forma que $(p, x) \in (\{p\} \times K) \cap H(x, y, w)$, luego $(\{p\} \times K) \cup H(x, y, w)$ es un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ que deseamos.

Ahora, si $z = y$. Se sigue que $(p, q), (p, y) \in (\{p\} \times K)$. Como $y$ es un punto que no es de corte, tenemos que $X_y \times \{y\}$ es conexo y subconjunto de $(X \times X) \setminus \triangle_X$, además $(x, y), (p, y) \in (X_y \times \{y\})$. Luego, $(\{p\} \times K) \cup (X_y \times \{y\})$ es un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ que contiene a $(x, y)$ y $(p, q)$.

Ahora, si $z = y$. Se sigue que $(p, q), (p, y) \in (\{p\} \times K)$. Como $y$ es un punto que no es de corte, tenemos que $X_y \times \{y\}$ es conexo y subconjunto de $(X \times X) \setminus \triangle_X$, además $(x, y), (p, y) \in (X_y \times \{y\})$. Luego, $(\{p\} \times K) \cup (X_y \times \{y\})$ es un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ que contiene a $(x, y)$ y $(p, q)$.

Dados los casos $I$ y $II$ se tiene un subconjunto conexo de $(X \times X) \setminus \triangle_X$ que contiene a $(x, y)$ y $(p, q)$. Lo cual prueba que $(X \times X) \setminus \triangle_X$ es un conjunto conexo.

$\square$

Gracias por su atención.