NOTAS SOBRE DINÁMICA COLECTIVA

HÉCTOR MÉNDEZ

RESUMEN. Dado un continuo X, consideramos el hiperespacio de todos los subconjuntos de X que son cerrados y no vacíos, 2^X, y el hiperespacio de todos los subcontinuos de X, $C(X)$, ambos con la métrica de Hausdorff. Una función continua $f : X \to X$ induce, de manera tersa y sin dificultad, funciones en estos hiperespacios: $\widehat{f} : 2^X \to 2^X$ y $C(f) : C(X) \to C(X)$.

En este mini-curso estudiamos algunas de las relaciones conocidas entre las propiedades dinámicas de f y las de $\widehat{f}$ y $C(f)$. Centraremos nuestra atención al caso cuando X es un arco, un árbol o una dendrita, y f es un homeomorfismo. A pesar de lo restrictivo que pueden sonar estas condiciones, hay algunos resultados interesantes que se intentará presentar de manera accesible.

1. HIPERESPACIOS Y FUNCIONES INDUCIDAS

En estas notas X representa un espacio métrico compacto no vacío y $f : X \to X$ una función continua en X. Denotamos con la letra $\mathbb{N}$ el conjunto de los números enteros positivos. Dado x en X, la *órbita de x bajo f* es la sucesión

$$o(x, f) = \left\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\right\},$$

donde f^n es la composición de f consigo misma n veces.

Una órbita representa el movimiento de un objeto: En el tiempo $t = 0$ éste se encuentra en x, en $t = 1$ se mueve hacia $f(x)$, en $t = 2$ está en $f^2(x)$, y así sucesivamente. Nuestro interés es el estudio del comportamiento de todas las posibles órbitas que se pueden generar a partir de X y f. Bajo esta óptica se dice que la pareja (X, f) es un sistema dinámico discreto.

El sistema dinámico (X, f) induce nuevos sistemas ahora definidos en los hiperespacios de X. Un *hiperespacio* de X es un subconjunto del conjunto potencia de X. Los hiperespacios que nos interesan son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\},$$

$$C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\right\},$$

dado $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\right\},$$

y

$$F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X),$$

que es la colección de todos los subconjuntos finitos de X.

Denotamos la métrica en X con la letra d. Dados $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, y $\varepsilon > 0$, la *nube de radio ε alrededor de A* es el conjunto,

$$N(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}.$$

Dados A y B dos elementos de 2^X el valor

$$H(A, B) = \text{ínf}\,\{\varepsilon > 0 : A \subset N(B, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subset N(A, \varepsilon)\}$$

define una distancia en 2^X conocida como la *métrica de Hausdorff*.

Un estudio detallado de las propiedades de la métrica de Hausdorff y de los hiperespacios mencionados se puede consultar en el libro de A. Illanes y S. B. Nadler, *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, [1].

Tenemos así que 2^X es un espacio métrico compacto. Dado que todos los hiperespacios definidos antes son subconjuntos del hiperespacio 2^X, entonces todos ellos son espacios métricos considerando en cada uno de ellos la restricción correspondiente de la métrica H.

Dada una colección finita de subconjuntos de X, $A_1, A_2, \ldots, A_k$, consideramos el siguiente subconjunto de 2^X:

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle$$

$$= \left\{ B \in 2^X : B \subset \cup_{i=1}^{k} A_i \text{ y para cada } i,\ 1 \leq i \leq k,\ B \cap A_i \neq \emptyset \right\}.$$

La colección de todos los posibles subconjuntos de 2^X de la forma

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle,$$

donde cada A_i es un subconjunto abierto de X es una base que induce una topología en 2^X. Esta topología es conocida como la *topología de Vietoris.* Ella coincide con la topología generada por la métrica de Hausdorff, ver [1]. Los hiperespacios $C(X)$, $F_n(X)$ y $F(X)$ son espacios topológicos considerando en cada uno de ellos la topología que induce la topología de Vietoris.

De aquí en adelante al referirnos a algún hiperespacio de X sólo consideramos una de las siguientes posibilidades: 2^X, $C(X)$, $F_n(X)$, $F(X)$.

La función $f : X \to X$ induce una función en el hiperespacio 2^X,

$$\widehat{f} : 2^X \to 2^X,$$

de la siguiente forma: Dado A en 2^X, entonces

$$\widehat{f}(A) = f(A) = \{y \in X : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}.$$

Como f es continua, $\widehat{f}(A) \in 2^X$. Es decir, $\widehat{f}$ está bien definida.

Es conocido además que $\widehat{f} : 2^X \to 2^X$ es una función continua, ver [1].

Llamamos a $\widehat{f} : 2^X \to 2^X$ la *función inducida por f*.

Observemos que si

$$\Lambda \in \{C(X), F_n(X), F(X)\},$$

entonces la restricción de $\widehat{f}$ a Λ, $\widehat{f}|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$, está bien definida ya que para cada $A \in \Lambda$ se tiene que $\widehat{f}|_\Lambda(A)$ también es un elemento de Λ. La restricción de $\widehat{f}$ al hiperespacio $C(X)$ la denotamos con $C(f)$.

La discusión sobre las posibles órbitas generadas por $f : X \to X$ es, de cierto modo, un estudio de *dinámicas individuales*, para cada x en X sólo nos interesan las propiedades de la sucesión $o(x, f)$. Tomar un conjunto compacto, A, seguir su órbita bajo la función inducida $\widehat{f}$ y preguntarse sobre su comportamiento es lo que algunos autores llaman estudiar la *dinámica colectiva*.

Sea $A \in 2^X$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f^n(A) = \left(\widehat{f}\right)^n (A).$$

Esta igualdad nos permite tener dos puntos de vista cuando hablamos de la órbita $o(A, \widehat{f})$. Por un lado ella representa el movimiento de un conjunto compacto en el espacio X; por el otro, es el movimiento de un solo punto en el hiperespacio 2^X. Tener en mente esta dualidad puede ser una ayuda importante en el desarrollo de nuestra intuición al estudiar los temas aquí tratados.

Decimos que el espacio X es un *continuo* si, además de ser métrico compacto y no vacío, es conexo.

Un continuo X es

- un *arco* si es homeomorfo al intervalo unitario $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$;
- una *gráfica* si X se puede expresar como la unión finita de arcos tales que cada par de ellos se intersecan en un subconjunto de sus puntos extremos;
- un *árbol* si X es una gráfica que no contiene curvas cerradas;
- una *dendrita* si X es localmente conexo y no contiene curvas cerradas simples;

Un conjunto Y es un *subcontinuo* de X si $Y \subset X$ y Y es un continuo. El espacio $C(X)$ es el hiperespacio de todos los subcontinuos de X.

2. Puntos periódicos

Sean $f : X \to X$ y x un punto en X.

- Decimos que x es un *punto fijo* de f si $f(x) = x$. Un punto fijo x es *atractor* si existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y para toda $y \in U$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f^n(y) = x$.
- Decimos que x es *un punto periódico* de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos con $Per(f)$. Si $x \in Per(f)$, entonces

  $$n_0 = \min \{n : f^n(x) = x\}$$

  es el periodo de x.
- Decimos que x es un *punto preperiódico* de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in Per(f)$.

- El punto x es *asintóticamente periódico* si existe $y \in Per(f)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Proposición 2.1. *Sea $f : X \to X$, y sean u y v dos puntos en X tales que $\lim_{n\to\infty} f^n(u) = v$. Entonces v es un punto fijo de f.*

Demostración. Ver ejercicio 2. □

Ejemplo 2.1. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por $f(x) = x^2$. Entonces*

- *f sólo tiene dos puntos fijos, 0 y 1. El primero de ellos es atractor.*
- *$C(f) : C([0,1]) \to C([0,1])$ tiene tres puntos fijos $\{0\}$, $\{1\}$ y $[0,1]$. El primero de ellos es atractor.*
- *La función $C(f)$ no tiene puntos periódicos de periodo $n \geq 2$.*
- *La función $\widehat{f} : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ tiene una infinidad de puntos fijos.*

  Demostración. Sea $x_0 = \frac{1}{2}$. Observemos que

  $$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} f^{-n}(x_0) = 1$$

  Sea $A \in 2^{[0,1]}$,

  $$A = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0,1\}.$$

  Como $f(A) = A$, entonces A es un punto fijo de la función $\widehat{f}$.
  Sea x, $f(x_0) < x < x_0$. Entonces

  $$A_x = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0,1\}$$

  también es un punto fijo de $\widehat{f}$.
  Por último, obsérvese que si $f(x_0) < x_1 < x_0$, $f(x_0) < x_2 < x_0$ y $x_1 \neq x_2$, entonces $A_{x_1} \neq A_{x_2}$. □

- *Existe $A \in Per(2^f)$ de periodo 2.*

  Demostración. Sean $x_0 = \frac{1}{2}$ y

  $$A = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{Z},\ n \text{ par}\} \cup \{0,1\}.$$

  Es inmediato que $\widehat{f}(A) \neq A$ y $(\widehat{f})^2(A) = A$. □

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ un homeomorfismo. Las siguientes afirmaciones son verdaderas, el lector es invitado en el ejercicio 6 a dar los detalles de las demostraciones correspondientes.

- f tiene al menos un punto fijo en $[0,1]$.
- Si f es creciente, entonces $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Si f es decreciente, entonces $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$.
- Si f es creciente, entonces para todo $x \in [0,1]$ se tiene que $o(x,f)$ es una sucesión monótona.
- Si f es creciente, entonces todo punto periódico de f es de periodo 1.

No es difícil demostrar que si el conjunto de los puntos periódicos de f, $Per(f)$, es denso en X, entonces el conjunto de los puntos periódicos de la función inducida $\widehat{f} : 2^X \to 2^X$ es denso en 2^X, ver ejercicio 3. En general, la densidad del conjunto $Per(\widehat{f})$ en 2^X no implica la densidad de $Per(f)$ en X, ver referencia [2]. Sin embargo, si X es el intervalo $[0,1]$ entonces esta segunda afirmación es cierta, ver ejercicio 5.

3. El omega conjunto límite

Dado $x \in X$, el omega conjuto límite de x es el lugar a donde se dirige la órbita de x. Por ejemplo, si la órbita $o(x,f)$ es una sucesión convergente al punto x_0, entonces el omega conjunto limite de x es $\{x_0\}$. Si la órbita $o(x,f)$ se dirige, en algún sentido, a una órbita periódica, entonces el omega conjunto límite de x está formado por los puntos que visita esa órbita periódica.

Denotamos el omega conjunto límite de x con $\omega(x,f)$.

Como la órbita $o(x,f)$ *tiende* a $\omega(x,f)$, entonces algunas de las características de este conjunto nos darán información sobre el comportamiento de los puntos $f^n(x)$ cuando n es un número muy grande.

Definición 3.1. *Sea $x_0 \in X$. Decimos que $y \in X$ es* punto límite *de la órbita $o(x_0,f)$ si existe una sucesión de números naturales*

$$\{n_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = y.$$

La colección de todos los puntos límite de $o(x_0,f)$ es el omega conjunto límite *de x_0 bajo f,*

$$\omega(x_0,f) = \{y \in X : y \text{ es punto límite de } o(x_0,f)\}.$$

De la definición es inmediato lo siguiente: Si x_0 es un punto fijo bajo f, entonces $\omega(x_0,f) = \{x_0\}$.

La demostración de la siguiente afirmación no es tan inmediata: Si x_0 es un punto periódico de f, entonces $\omega(x_0,f)$ es precisamente la órbita $o(x_0,f)$. Sin embargo invitamos al lector, en el ejercicio 10, a ofrecer los argumentos necesarios.

De aquí en adelante cuando nos referimos a una sucesión formada por números naturales, $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, se entenderá que esta sucesión es estrictamente creciente. Es decir, $n_i < n_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.1. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por $f(x) = 1 - x$. Sea $x_0 \in [0,1]$. Entonces*

- *Si $x_0 = \frac{1}{2}$, $\omega(x_0,f) = \{x_0\}$.*
- *Si $x_0 \neq \frac{1}{2}$, $\omega(x_0,f) = \{x_0, 1-x_0\}$.*
- *Si $A \in 2^{[0,1]}$, entonces la cardinalidad de $\omega(A,\widehat{f})$ sólo puede ser 1 ó 2. Ver ejercicio 8.*

Ejemplo 3.2. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por $f(x) = x^2$. Sea $x_0 \in [0,1]$. Entonces*

- *Si $x_0 < 1$, $\omega(x_0, f) = \{0\}$.*
- *Si $x_0 = 1$, $\omega(x_0, f) = \{1\}$.*
- *Si $A \in C([0,1])$ y $1 \notin A$, $\omega(A, C(f)) = \{0\}$.*
- *Si $A \in C([0,1])$, $1 \in A$ y $A \neq \{1\}$, entonces $\omega(A, C(f)) = \{[0,1]\}$.*
- *Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $A \in 2^{[0,1]}$ tal que $\omega(A, \widehat{f})$ tiene cardinalidad n. Ver ejercicio 4.*

Ejemplo 3.3. *Sea $f : [-1,1] \to [-1,1]$ la función dada por*

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right).$$

Para todo punto $x \neq 0$ se tiene que $\omega(x, f) = \{-1, 1\}$. Ver ejercicio 12.

Proposición 3.1. *Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Entonces para todo $x \in X$, se tiene que $\omega(x, f) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Como X es compacto, la sucesión

$$o(x, f) = \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$$

tiene una subsucesión convergente, digamos a $y_0 \in X$.

Entonces $y_0 \in \omega(x, f)$. □

Dados $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, la *bola abierta* de radio ε con centro en x_0 es el conjunto

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Proposición 3.2. *Sea $f : X \to X$ una función continua en un espacio métrico y compacto X. Para todo $x \in X$, $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en $\omega(x_0, f)$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Demostraremos que $y_0 \in \omega(x_0, f)$ y con ello concluimos que $\omega(x_0, f)$ es cerrado.

Como la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto y_0, para $\varepsilon_1 = 1$, existe n_1 en $\mathbb{N}$ tal que $d(y_{n_1}, y_0) < \frac{\varepsilon_1}{2}$.

Dado que $y_{n_1} \in \omega(x_0, f)$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{k_1}(x_0) \in B\left(y_{n_1}, \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \subset B(y_0, \varepsilon_1).$$

Para $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ tal que $d(y_{n_2}, y_0) < \frac{\varepsilon_2}{2}$.

Como $y_{n_2} \in \omega(x_0, f)$, entonces existe $k_2 > k_1$ tal que

$$f^{k_2}(x_0) \in B\left(y_{n_2}, \frac{\varepsilon_2}{2}\right) \subset B(y_0, \varepsilon_2).$$

De esta manera encontramos una sucesión creciente de números naturales $\{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$ tal que para cada j,

$$f^{k_j}(x_0) \in B(y_0, \varepsilon_j), \quad \varepsilon_j = \frac{1}{j}.$$

Por lo tanto, y_0 pertenece al conjunto $\omega(x_0, f)$. □

En el ejercicio 19 se presenta otra demostración de la proposición 3.2.

Proposición 3.3. *Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Para todo $x \in X$, se tiene que $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$. Es decir, $\omega(x, f)$ es un conjunto compacto estrictamente invariante bajo f.*

Demostración. Tomemos $x_0 \in X$ y consideremos el conjunto $\omega(x_0, f)$.

Veamos primero que $f(\omega(x_0, f))$ está contenido en $\omega(x_0, f)$.

Sea $y_0 \in f(\omega(x_0, f))$. Existe $z_0 \in \omega(x_0, f)$ tal que $f(z_0) = y_0$.

Existe, además, una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ contenida en $\mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = z_0.$$

Entonces, gracias a la continuidad de la función $f : X \to X$,

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i+1}(x_0) = f(z_0) = y_0.$$

Así y_0 está en el $\omega(x_0, f)$. Por lo tanto, $f(\omega(x_0, f)) \subset \omega(x_0, f)$.

Ahora demostraremos que $\omega(x_0, f) \subset f(\omega(x_0, f))$.

Sea $y_0 \in \omega(x_0, f)$. Existe una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ de números naturales tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = y_0.$$

Podemos suponer que cada n_i es mayor o igual a 2.

Como X es compacto y la sucesión $\left\{f^{n_i-1}(x_0)\right\}_{i=1}^{\infty}$ está contenida en X, entonces existe una subsucesión de $\{n_i - 1\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0) = z_0.$$

Así $z_0 \in \omega(x_0, f)$ y

$$f(z_0) = f\left(\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0)\right) = \lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}}(x_0) = y_0.$$

Por lo tanto, $y_0 \in f(\omega(x_0, f))$. □

El lector es invitado en el ejercicio 16 a dar los argumentos necesarios en la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 3.4. *Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Sea $k \in \mathbb{N}$, fijo. Entonces para todo $x \in X$ se cumplen las siguientes dos afirmaciones:*

- $f(\omega(x, f^k)) = \omega(f(x), f^k)$.
- $\omega(x, f) = \omega(x, f^k) \cup \omega(f(x), f^k) \cup \omega(f^2(x), f^k) \cup \cdots \cup \omega(f^{k-1}(x), f^k)$.

La siguiente proposición aclara lo que queremos decir cuando expresamos que la órbita de x *tiende* al conjunto $\omega(x, f)$.

Proposición 3.5. *Sean $f : X \to X$ una función continua, X un espacio compacto, $x_0 \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que*

$$\omega(x_0, f) \subset U.$$

Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $f^n(x_0) \in U$.

Demostración. Sea U un conjunto abierto tal que $\omega(x_0, f) \subset U$.

El conjunto $X \setminus U$ es cerrado, por tanto es compacto.

Si la cardinalidad de

$$A = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) \in X \setminus U\}$$

es infinita, entonces existe una sucesión de números naturales, $n_1 < n_2 < \cdots$, tal que las iteraciones correspondientes $f^{n_i}(x_0)$ permanecen en $X \setminus U$.

Podemos suponer, sin perder generalidad, que la sucesión $\{f^{n_i}(x_0)\}$ es convergente a un punto de $X \setminus U$, digamos a y_0.

De aquí se sigue que $y_0 \in \omega(x, f)$ y y_0 no pertenece al conjunto U. Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto A es finito y concluimos la demostración. $\square$

Con la ayuda de la proposición 3.5 obtenemos ahora información sobre la dinámica que induce la función f en el conjunto $\omega(x, f)$ cuando este conjunto es finito.

Proposición 3.6. *Sean $f : X \to X$ una función continua, X un espacio compacto y x un punto en X tal que el conjunto $\omega(x, f)$ es finito. Entonces existe y en $\omega(x, f)$ tal que y es un punto periódico bajo f. Además*

$$\omega(x, f) = o(y, f).$$

Demostración. Supongamos que la cardinalidad de $\omega(x, f)$ es k. Así

$$\omega(x, f) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}.$$

Como $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$, entonces f restringida al conjunto $\omega(x, f)$ es una permutación. Por tanto cada punto x_i, $1 \leq i \leq k$, es elemento de una órbita periódica.

Consideremos la órbita $o(x_1, f)$ contenida en $\omega(x, f)$. Renombrando los elementos de $\omega(x, f)$, si es necesario, podemos suponer que

$$o(x_1, f) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

con $m \leq k$.

Afirmamos que $o(x_1, f) = \omega(x, f)$.

Si sucede que $o(x_1, f) \neq \omega(x, f)$, entonces $m < k$.

Observemos que la órbita $o(x_1, f)$ es un conjunto estrictamente invariante bajo la función f. Esto implica que el conjunto $\{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_k\}$ también es estrictamente invariante bajo f.

Sea $\delta > 0$ tal que para cada pareja $1 \leq i, j \leq k$, con $i \neq j$,

$$cl\,(B\,(x_i, \delta)) \cap cl\,(B\,(x_j, \delta)) = \emptyset. \tag{1}$$

Sean

$$U = \bigcup_{i=1}^{m} B\,(x_i, \delta) \quad \text{y} \quad W = \bigcup_{i=m+1}^{k} B\,(x_i, \delta). \tag{2}$$

Observemos que $o(x_1, f) \subset U$ y que $U \cup W$ es un conjunto abierto que contiene a $\omega(x, f)$. Además de (1) y (2) se sigue que

$$cl(U) \cap cl(W) = \emptyset.$$

Por la proposición 3.5, existe un número natural N tal que si $n \geq N$, entonces $f^n(x)$ está en $U \cup W$.

Consideremos ahora los conjuntos

$$E = \{n \geq N : f^n(x) \in U\} \quad \text{y} \quad F = \{n \geq N : f^n(x) \in W\}.$$

Ambos son infinitos ya que tanto U como W contienen una parte de $\omega(x, f)$. Los puntos $f^n(x)$ deben ir y venir de U a W constantemente.

Esto implica que existe una sucesión de naturales, $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, tal que

$$f^{n_i}(x) \in U \quad \text{y} \quad f^{n_i+1}(x) \in W.$$

Sin perder generalidad podemos suponer que la sucesión $\{f^{n_i}(x)\}$ es convergente a un punto z en $cl(U)$. Como

$$cl(U) \cap \omega(x, f) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = o(x_1, f),$$

y $z \in \omega(x, f)$, entonces $z \in o(x_1, f)$.

Por otro lado, dado que f es continua,

$$\lim_{i \to \infty} f^{n_i+1}(x) = f(z).$$

Como la sucesión $\left\{f^{n_i+1}(x)\right\}$ está contenida en W, entonces $f(z)$ es un elemento del conjunto $cl(W)$.

Dado que

$$f(z) \in o(x_1, f) \subset U \subset cl(U),$$

concluimos que

$$cl(U) \cap cl(W) \neq \emptyset.$$

Esto es una contradicción. Por lo tanto, $o(x_1, f) = \omega(x, f)$. □

Dados X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una función continua y x un punto en X sabemos, por la proposición 3.3, que $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$. Como la órbita de x tiende hacia el conjunto $\omega(x, f)$, entonces para valores muy grandes de n el comportamiento dinámico de la órbita de x es cada vez más parecido a la dinámica de la función f restringida al omega conjunto límite de x.

Resulta que si la cardinalidad del conjunto $\omega(x, f)$ es finita, entonces existe $y \in Per(f)$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Por tanto el comportamiento de las órbitas $o(x, f)$ y $o(y, f)$ es, en esencia, el mismo. Claro, con la ventaja de que y es un punto periódico bajo f.

4. Ejercicios

Todas las funciones consideradas en esta sección son continuas. La letra X representa un espacio métrico, no vacío y compacto.

Ejercicio 1. *Demostrar que el hiperespacio $F(X)$ forma un subconjunto denso de 2^X.*

Ejercicio 2. *Sea $f : X \to X$, y sean u y v dos puntos en X tales que* $\lim_{n\to\infty} f^n(u) = v$. *Demostrar que v es un punto fijo de f.*

Ejercicio 3. *Demostrar que si el conjunto de los puntos periódicos de la función $f : X \to X$ es denso en X, entonces el conjunto de los puntos periódicos de la función inducida $\widehat{f} : 2^X \to 2^X$ es denso en 2^X.*

Ejercicio 4. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por $f(x) = x^2$. Demostrar las siguientes afirmaciones:*

- *$C(f) : C([0,1]) \to C([0,1])$ tiene tres puntos fijos $\{0\}$, $\{1\}$ y $[0,1]$. El primero de ellos es atractor.*
- *La función $C(f)$ no tiene puntos periódicos de periodo $n \geq 2$.*
- *Para todo $n \in N$, existe $A \in Per(2^f)$ de periodo n.*

Ejercicio 5. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$. Demostrar que si el conjunto de puntos periódicos de la función inducida $\widehat{f} : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ forma un conjunto denso en $2^{[0,1]}$, entonces el conjunto $Per(f)$ es denso en el intervalo $[0,1]$.* Sugerencia: *Dado un intervalo abierto (a,b), $a < b$, contenido en $[0,1]$, existen $A \in 2^{[0,1]}$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $A \subset (a,b)$ y $f^N(A) = A$.*

Ejercicio 6. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ un homeomorfismo. Demostrar lo siguiente:*

- *f tiene al menos un punto fijo en $[0,1]$.*
- *Si f es creciente, entonces $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Si f es decreciente, entonces $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$.*
- *Si f es creciente, entonces para todo $x \in [0,1]$ se tiene que $o(x,f)$ es monótona.*
- *Si f es creciente, entonces todo punto periódico de f es de periodo 1.*

Ejercicio 7. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ un homeomorfismo. Demostrar que para todo $x \in [0,1]$ se tiene que la cardinalidad de $\omega(x,f)$ es 1 ó 2.*

Ejercicio 8. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por $f(x) = 1 - x$. Demostrar que todo $A \in 2^{[0,1]}$ es punto periódico bajo $\widehat{f}$ de periodo 1 ó 2. ¿Alguno de los puntos fijos de $\widehat{f}$ es atractor?*

Ejercicio 9. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función lineal por partes definida por $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$.*

- *Demuestra que para todo $x \in [0,1]$, la cardinalidad de $\omega(x,f)$ es 1 ó 2. Describe el conjunto de todos los puntos x tales que la cardinalidad de $\omega(x,f)$ es 2.*

- *Encuentra todos los puntos fijos de* $C(f) : C([0,1]) \to C([0,1])$. *¿Alguno de estos puntos fijos es atractor?*
- *Sea* $A \in Per(C(f))$. *¿Cuáles son los periodos posibles de la órbita de* A *bajo* $C(f)$.
- *Demuestra que para toda* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $A \in 2^{[0,1]}$ *tal que* A *es punto periódico bajo* $\widehat{f}$ *de periodo* n.

Ejercicio 10. *Sea* $f : X \to X$. *Demostrar que si* $x_0 \in X$ *es un punto periódico de* f, *entonces* $\omega(x_0, f) = o(x_0, f)$

Ejercicio 11. *Sean* $f : X \to X$ *y* $x_0 \in X$. *Entonces para cada* $k \in \mathbb{N}$, *se tiene que* $\omega(x_0, f) = \omega\left(f^k(x_0), f\right)$.

Ejercicio 12. *Demostrar la afirmación contenida en el ejemplo 3.3.*

Ejercicio 13. *Sean* $f : X \to X$, $x, y \in X$.

- *Demostrar que si* $y \in \omega(x, f)$, *entonces* $\omega(y, f) \subset \omega(x, f)$.
- *Mostrar un ejemplo donde* $y \in \omega(x, f)$ *y* $\omega(y, f) \neq \omega(x, f)$.

Ejercicio 14. *Sean* $f : X \to X$ *y* $x \in X$. *Demostrar que si la cardinalidad del conjunto* $\omega(x, f)$ *es finita, entonces existe* $y \in Per(f)$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^n(x), f^n(y)\right) = 0.$$

Ejercicio 15. *Verdadero o falso: Sea* $f : [0,1] \to [0,1]$, *y sea* $x_0 \in [0,1]$. *Entonces*

$$\omega(x_0, f) = \omega\left(x_0, f^2\right).$$

Ejercicio 16. *Sea* $f : X \to X$. *Sea* $k \in \mathbb{N}$, *fijo. Entonces para todo* $x \in X$ *se tiene lo siguiente:*

- $f(\omega(x, f^k)) = \omega(f(x), f^k)$.
- $\omega(x, f) = \omega(x, f^k) \cup \omega(f(x), f^k) \cup \omega(f^2(x), f^k) \cup \cdots \cup \omega(f^{k-1}(x), f^k)$.

Ejercicio 17. *Sean* $f : X \to X$ *y* x_0 *y* y_0 *en* X *tales que*

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^n(x_0), f^n(y_0)\right) = 0.$$

Demostrar que $\omega(x_0, f) = \omega(y_0, f)$.

¿Será cierto el recíproco: si $\omega(x_0, f) = \omega(y_0, f)$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^n(x_0), f^n(y_0)\right) = 0\,?$$

Ejercicio 18. *Sean* $f : [a,b] \to [a,b]$ *y* $g : [c,d] \to [c,d]$ *dos funciones conjugadas bajo el homeomorfismo* $h : [a,b] \to [c,d]$. *Es decir, para toda* $x \in [a,b]$ *se tiene que* $h(f(x)) = g(h(x))$.

Demostrar que para toda $x \in [a,b]$, *se tiene que*

$$h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g).$$

Ejercicio 19. *Sea $f : X \to X$. Para cada $x \in X$ y $m \in \mathbb{N}$ consideramos el siguiente conjunto:*

$$A_m(x) = \left\{ f^k(x) : k \geq m \right\} = o(f^m(x), f).$$

Demostrar que

$$\omega(x, f) = \bigcap_{m \geq 0} cl(A_m(x)).$$

De aquí se concluye que $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado. Comparar con la demostración de la proposición 3.2.

Referencias

[1] Illanes A. y Nadler S. B., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. **216**, Marcel Dekker Inc., New York, 1999.

[2] Méndez H., *On Density of Periodic Points for Induced Hyperspace Maps*, Topology Proceedings, **35** (2010), 281-290.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, Ciudad Universitaria, C.P. 04510, D. F., México.

E-mail address: `hml@ciencias.unam.mx`