CONSTRUCCION DE INSTRUMENTOS PITAGORICOS DE GEOMETRIA

por

Filemón & Baucis

in memoriam

Borge Luis Jorges

En el trabajo que presentamos a continuación se explica cómo construir, desde la geometría, ciertas herramientas de dibujo que resultan de interés (por su calidad de artista) para el arquitecto. Además de los procedimientos que se describan para la realización de las construcciones correspondientes, también se exponen los argumentos matemáticos que justifican el funcionamiento de la herramienta construida.

Los procesos geométricos que se siguen a lo largo de la primera parte del trabajo datan de la Época Antigua y son muy elementales, de modo que cualquier estudiante que curse los primeros semestres de la carrera de arquitecto y que recuerde qué dicen los criterios de semejanzas de triángulos y el Teorema de Pitágoras, debe poder, en principio, entender cuanto en esta parte se diga de geometría. Los requisitos algebraicos también son elementales y quizá más antiguos que los geométricos ya mencionados[1]; sólo exigen saber resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita.[2] En cuanto a requisitos aritméticos, además de recordar cómo operar con quebrados o números racionales, se debe tener la habilidad de saber cuál es la relación de orden que guarden entre sí dos cualesquiera de estos números; para ello basta que recordemos que si $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ son números racionales, entonces son equivalentes las afirmaciones:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$$

y

$$m \times q \leq p \times n$$

En al primera parte se explica cómo fabricar (desde la geometría) un compás que ubica en cada segmento determinado por sus puntas extremas un punto que divide alsegmento en una *razón media* fija: *la Razón Áurea*. Por esta característica, este comás es también muy útil para aquellos profesionistas que buscan mucho la *Proporción Áurea* en sus obras. De aquí que esta primera parte del tabajo también esté pensada para estudiantes de los primeros semestres de las carreras de Artista Plástico, de Diseñador Gráfico y de Diseñador Industrial.

En la segunda parte nos ocupamos en construir (siempre desde la geometría) las curiosas *Escuadras de Constructor* empleadas por arquitectos medievales iniciados en el pitagorismo.

---

[1] Tanto, los criterios de semejanza como el Teorema de Pitágoras son resultados de la matemática que se hacía en Grecia hacia el sigloVII a.C. Por otra parte se sabe que ya en los siglos XIX y XX a.C. habían sido resueltas de manera empírica ecuaciones de segundo grado con una incógnita en Egipto y en Babilonia.

[2] Como señala Dirk Jean Struik en su *Historia Concisa de las Matemáticas,* ≪una fórmula general para la ecuación de segundo grado con una incógnita debió haber sido obtenida en términos algebraicos hacía finales del siglo I d.C. Ya la habilidad mostrada por Diofanto (que vivió alrrededor del año 250 d.C.) en el tratamiento de ecuaciones indeterminadas, hacía pensar a los historiadores que algunos pocos hombres activos debieron haber estado desarrollando la antigüa álgebra de Babilonia en una Grecia para entonce reducida a la condición de colonia gobernada por administradores romanos. Documentos hallados posteriormente han venido a corroborar esto; tal es el caso del papíro 620 de la Universidad de Michigan que data de principios del siglo II d. C. en el cual se atacan algunos problemas de álgebra griega≫ .

Al igual que el compás, estas escuadras guardan relación con el *Número de Oro* y con la *Sección Áurea*.

Part I
COMPÁS DE TRES PUNTAS COLINEALES

1. RAZÓN ÁUREA

Como se dijo desde la introducción, este compás tiene la propiedad de ubicar instantáneamente dentro del segmento determinado por sus puntas extremas un punto, llamado *punto de oro* del segmento en cuestión, que divide a éste en la llamada *Razón Áurea*.

La *Razón Áurea* es un número en el intervalo $[0, 1]$ de la recta numérica, también conocido como *Número de Oro*, al cual se lo suele denotar mediante la letra ϕ.

La explicación que sigue nos llevará a la definición del número ϕ.

Para empezar ubiquemos dentro del intervalo a su punto medio

$$M = \frac{1}{2}$$

Ahora pensemos en todos aquellos número mayores que $\frac{1}{2}$ cuyo cuadrado es menor que $\frac{1}{2}$. Uno de estos números es, por ejemplo: $\frac{3}{5}$. En efecto,

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5}$$

ya que

$$1 \times 5 < 2 \times 3$$

Además

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} < \frac{1}{2}$$

porque

$$9 \times 2 < 25 \times 1$$

Por otro lado tenemos, en conformidad con la definición geométrica de *centro de simetría*[3], que en este caso dos números r y s del intervalo son simétricos respecto a M sí M es punto medio del subintervalo $[r, s]$; es decir

$$M = \frac{r + s}{2}$$

ϕ es también un número mayor que un medio cuyo cuadrado es menor que un medio, y dentro de los números con esta propiedad, ϕ es el único que guarda simetría con su cuadrado respecto a M

$$[FIGURA1]$$

[3]En términos generales se dice que dos punto P y Q (de una recta, de un palno, del espacio, etc.) tienen a un punto M como *centro de simetría* si M es punto medio del segmento PQ.

Siendo así, tenemos que

$$M = \frac{\phi^2 + \phi}{2}$$

o sea que

$$\frac{\phi^2 + \phi}{2} = \frac{1}{2}$$

de cuya simplificación resulta la expresión

$$\phi^2 + \phi - 1 = 0 \quad \cdots \quad (*)$$

misma que podemos mirar como una ecuación de segundo grado en la incógnita ϕ .

Para saber qué número ϕ es resolvamos $(*)$ aplicando la fórmula general. Nos arroja dos raíces; una negativa que desechamos porque buscamos un número positivo en el intervalo $[0, 1]$. Nos los da la fórmula en la otra raíz; es

$$\phi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

2. Ubicación geométrica de ϕ en el intervalo $[0, 1]$

En esta sección nos ocuparemos en determinar un proceso de maniobra que habremos de ejecutar, sin contar con más herramientas que sólo una regla (no graduada) y un compás (común), a fin de ubicar un punto sobre un segmento dibujado, del que podamos estar seguros que divide al segmento en la razón ϕ. En tal caso diremos que el punto ubicado es *punto de oro* del segmento en cuestión.

En el caso particular en que el segmento está determinado por el intervalo $[0, 1]$[4], el problema de ubicar un punto de oro en él se puede reducir al problema de determinar, valiéndonos de la regla y del compás, la posición exacta del número ϕ en el intervalo$[0, 1]$ (y, por lo tanto también, en la recta numérica). Para justificar por qué podemos abordar este problema en lugar del anterior, recordemos que ϕ es la raíz positiva de la ecuación

$$\phi^2 + \phi - 1 = 0$$

de la cual resulta que

$$\frac{1 - \phi}{\phi} = \phi$$

lo cual significa precisamente que ϕ divide a $[0, 1]$ en la razón ϕ .

$[FIGURA3]$

El número por cuya ubicación vamos es

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

[4]Se entiende que el segmento escogido para representar al intervalo $[0, 1]$ tiene una longitud arbitraria que nosotros adoptamos como unidad.

Observemos que también podemos escribirlo como

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

Veamos si las operaciones involucradas en esta expresión se dejan llevar por la regla y el compás.

Lo primero que vemos es un diferencia: a una cantidad $(\frac{\sqrt{5}}{2})$ se le resta media unidad.

Obtener media unidad localizando el punto medio del segmento unitario y sustraerla del segmento de longitud $\frac{\sqrt{5}}{2}$ no representa dificultad si contamos con regla y compás.

El problema estriba, por lo tanto, en conseguir abrir el compás exactamente a $\frac{\sqrt{5}}{2}$ unidades de longitud.

Es fácil compobrar, aplicando el teorema de pitágoras, que la longitud de la hipótenusa del triángulo rectángulo de catetos 1 y $\frac{1}{2}$ es precisamente $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Construir este triángulo con regla y compás no es problema. Por consiguiente, la construcción de ϕ está técnicamente resuelta.

Como consecuencia de lo anterior, para la ubicación de ϕ podemos proceder como sigue:[5]

1.- Sean P_0 y P_1 los puntos del segmento unitario correspondientes a los números 0 y 1, respectivamente. ubiquémos dentros del segmento su punto

$$M = \frac{1}{2}$$

2.- Por P_1 levantemos una perpendicular l al segmento.

3.- Trazemos la circunferencia auxiliar de centro en P_1 y radio $\overline{P_1M}$. Esta circunferencia intersecta a l en dos puntos. Denotemos por P a cualquiera de ellos.

4.- Observemos que el triángulo P_0P_1P es, por construcción, un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen las longitudes

$$\overline{P_0P_1} = 1 \qquad \text{y} \qquad \overline{P_1P} = \tfrac{1}{2}$$

Por tanto, la longitud de su hipotenusa es

$$\overline{P_0P} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Trazemos esta hipotenusa.

$[FIGURA4]$

5.- Puesto que de ellas tenemos que sustraer un segmento de media unidad de longitud, centremos el compás en P y con radio $\overline{PP_1}$ trazemos un arco de circunferencia que intersectará a la hipotenusa en un punto que designaeremos por F. Obsérvese que

$$\overline{P_0F} = \overline{P_0P} - \overline{PF} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

[5]Daremos por supuesto que el lector conoce cómo levantar perpendiculares a segmentos dados así como ubicar en ellos sus puntos medios respectivos, empleando regla y compás.

6.-Haciendo centro en P_0 y con radio $\overline{P_0F}$ abatamos el punto F al segmento P_0P_1. Sea Φ el punto así obtenido sobre P_0P_1 . Entonces

$$\overline{P_0\Phi} = \phi$$

por lo que el proceso queda concluido.

2.1. Localización de un punto de oro en un segmento de recta arbitrario. El procedimiento que acabamos de describir puede aplicarse a un segmento A_0A_1 de longitud arbitraria hasta localizar dentro de él un punto Φ.

$[FIGURA 5]$

Observemos que

$$\frac{\overline{\Phi A_1}}{\overline{A_0\Phi}} = \phi$$

En efecto, siendo d la longitud del segmento A_0A_1tenemos, siguiendo los pasos anteriores, que

$$\overline{A_1A} = \overline{AF} = \tfrac{1}{2}d \qquad \text{y} \qquad \overline{A_0A} = \tfrac{\sqrt{5}}{2}d$$

Puesto que además

$$\overline{A_0\Phi} = \overline{A_0F} = \overline{A_0A} - \overline{AF} = \frac{\sqrt{5}}{2}d - \frac{1}{2}d$$

y

$$\overline{\Phi A_1} = \overline{A_0A_1} - \overline{A_0\Phi} = d - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)d = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)d$$

tenemos:

$$\frac{\overline{\Phi A_1}}{\overline{A_0\Phi}} = \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)d}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)d} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{2}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi$$

Esto implica que el punto Φ así localizado es punto de oro del segmento A_0A_1 .

3. Compás de tres puntas

Supongamos que v_1 y v_2 son las dos varillas de igual longitud que formarán el par de puntas externas de nuestro compás.

En cada una encuéntrese un punro de oro.

Únanse con un perno los extremos de v_1 y v_2 que están más próximos al punto de oro hallado en cada una.

Cualquier abertura (que puede ir de $0°$ a $180°$) de esto que hasta el momento no es más que un compás común, determina un triángulo isóceles cuyos lados iguales son v_1 y v_2 y cuyo tercer lado queda determinado por el segmento que va de punta a punta a punta del compás.

Sea V_1VV_2 uno de estos triángulos, con

$$V_1V = v_1 \qquad \text{y} \qquad VV_2 = v_2$$

$[FIGURA6]$

Sea Φ el punto de oro hallado en v_1y sea Ψ un punto del lado V_1V_2 tal que el segmento $\Phi\Psi$ sea paralelo a v_2.

Como consecuencia del teorema de proporcionalidad de Tales de Mileto, tenemos que la razón en la que este punto Ψ divide al segmento V_1V_2 es la misma que aquélla en que Φ divide a V_1V; es decir, que

$$\frac{\overline{\Psi V_2}}{\overline{V_1\Psi}} = \frac{\overline{\Phi V}}{\overline{V_1\Phi}} = \phi$$

lo cual significa que Ψ es punto de oro del intervalo V_1V_2.

Para hacer ver que con el segmento $\Phi\Psi$ podemos construir la tercera varilla de nuestro compás, hay que mostrar que para cualquier otra abertura de v_1 y v_2, el segmento $\Phi\Psi'$ que entonces resulte tiene la misma longitud que $\Phi\Psi$; es decir,que solamente ha rotado $\Phi\Psi$ (desde Φ)según el ángulo correspondiente con la nueva abertura.

Para probar que esto es cierto dibujemos dos esquemas yuxtapuestos de nuestro compás correspondientes a aberturas distintas, superponiendo v_1 a v_1,tal como se indica en la siguiente figura

$[FIGURA7]$

Entonces, Ψ es punto de oro del segmento V_1V_2, así como Ψ' lo es del segmento V_1V_2'.

Debido al paralelismo de los segmentos $\Phi\Psi$ y V_2V en el triángulo V_1VV_2 y $\Phi\Psi'$ y $V_2'V$ en el triángulo V_1VV_2', podemos aplicar el teorema de proporcionalidad de Tales de Mileto y asegurar que

$$\frac{\overline{V_1\Phi}}{\overline{V_1V}} = \frac{\overline{\Phi\Psi}}{\overline{V_2V}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\overline{V_1\Phi}}{\overline{V_1V}} = \frac{\overline{\Phi\Psi'}}{\overline{V_2'V}}$$

Entonces

$$\frac{\overline{\Phi\Psi}}{\overline{V_2V}} = \frac{\overline{\Phi\Psi'}}{\overline{V_2'V}}$$

y puesto que $\overline{V_2V} = \overline{V_2'V}$, resulta que también

$$\overline{\Phi\Psi} = \overline{\Phi\Psi'}$$

que es lo que queríamos probar.

En consecuencia podemos referirnos ya a la tercera varilla

$$v_3 = \Phi\Psi$$

sujeta por un perno a la varilla v_1 desde su punto Φ.

Sólo resta exhibir un mecanismo que permita mantener paralela esta tercera varilla a v_2, cualquiera que sea la abertura del compás.

Esto se consigue acoplando una cuarta varilla v_4 (aún más pequeña que v_3) al sistema de varillas ya ensambladas. Para realizar este acoplamiento, abramos el compás de modo que v_1 y v_2 formen un ángulo recto y que v_3 quede paralela a v_2. Sea F el punto de oro previamente hallado en v_2. Partiendo de F hagamos llegar una perpendicular a v_3, designando con P al punto de contacto. Los extremos de la varilla v_4 quedan sujetos por sendos pernos a v_2 y a v_3 en F y en P, respectivamente.

Para hacer ver que este mecanismo funciona, hay que probar que cualquiera que sea la abertura de nuestro compás, siempre se mantendrán iguales los ángulos

$$\widehat{V_1VV_2} \qquad \text{y} \qquad \widehat{V_1\Phi P}$$

Es obvio que al poner en movimiento el compás, la distancia entre cualesquiera dos pernos contiguos no cambia; equidistan contiguamente, por lo que el cuadrilátero ΦVFP adopta siempre la forma de rombo.

Es fácil comprobar que los ángulos opuestos de un rombo son iguales entre sí, y que sus angulos contiguos son suplementarios, es decir, que suman entre sí 180°. Consecuentemente, puesto que el suplemento del ángulo $\widehat{P\Phi V}$ es $\widehat{V_1\Phi P}$, tenemos que

$$\widehat{V_1\Phi P} = \widehat{V_1VV_2}$$

ya que $\widehat{V_1VV_2}$ y $\widehat{P\Phi V}$ son ángulos contiguos del rombo ΦVFP.

Además del compás de tres puntos (que algunos autores llaman *compás áureo*), existen dos compases, el *compás de proporción* y el *compás de reducción*, con los que también pueden hallarse los puntos de oro de un segmento dado.

Part II
ESCUADRAS DE CONSTRUCTOR

Del par de escuadras a que nos referiremos en esta segunda parte, se sabe hoy que entraron en uso a Europa hacia el siglo XIII y que fueron secretamente empleadas en el diseño de los planos de un buen número de catedrales góticas. Su invención, sin embargo, nos remonta a la Grecia de Pericles. Atenas, que entonces atrajo a pensadores de toda la Hélade, albergó entre éstos a un rico armador proveniente de la isla de Chíos llamado Hipócrates.

Durante su estancia en la metrópoli, se adhirió a la secta de los pitagóricos a quienes demostró que desde su país de origen ya venía cultivando la matemática.

Como geómetra, Hipócrates es autor de un trazo inscrito en un pentágono regular con el que sugiere, en un plano, la manera de poner en relación espacial a los cinco cuerpos platónicos bajo Sección Áurea. También ideó unos instrumentos de dibujo (hoy casi olvidados) que facilitan el diseño de planos a partir de ese trazo: sus *escuadras de constructor*.

Para dar una definición precisa de ellas mediante los procedimientos que hay que seguir para su construcción geométrica, daremos por supuesto que el lector sabe cómo dibujar un pentágono regular inscrito en una circunferencia y que conoce las medidas angulares elementales de un pentágono regular.

Cada una de estas escuadras se designa con la letra griega χ (ji minúscula) y se las distingue con los subíndices $_1$ y $_2$.

4. Procedimiento para la construcción de χ_1

Como se verá a continuación, la obtención de χ_1 es muy simple: Sobre un pentágono regular inscrito en una circunferencia escójase uno cualquiera de sus vértices y desígnese por A. El diámetro por A nos ubica, en su otro extremo, un punto de la circunferencia (antípoda de A) que denotaremos por B. Unamos a B con uno cualquiera de los vértices adyacentes a A; si llamamos C a este vértice, entonces en el triángulo ABC tenemos a χ_1.

Debido a la regularidad de la figura tenemos que el diámetro AB biseca al ángulo del pentágono que tiene su vértice en A. Este ángulo es de 108° ($\frac{3\pi}{5}$ radianes); por lo tanto el ángulo $\widehat{BAC}$ es de 54° ($\frac{3\pi}{10}$ radianes)

Por otro lado, observemos que el punto B de nuestro dibujo está adyacente a un vértice del pentágono que con los vértices A y C forma un triángulo isóceles. Debido a la regularidad del pentágono, el ángulo de ese triángulo en ese vértice es la mitad del ángulo central del pentágono, que es de 72° ($\frac{2\pi}{5}$ radianes); mide, por consiguiente, 36° ($\frac{\pi}{5}$ radianes). Ahora bien: los lados de χ_1 que parten de B subtienden el mismo arco $\widehat{AC}$ que los lados del triángulo isóceles desde el vértice que dijimos. Aplicando resultados de geometría elemental de la circunferencia tenemos que χ_1 tiene en $\widehat{ABC}$ un ángulo de 36°.

$\widehat{BAC}$ y $\widehat{ABC}$ son, por lo tanto, complementarios[6] y ABC es, pues, un triángulo rectángulo.[7]

5. Procedimiento para la construcción de χ_2

Como se verá, la construcción geométrica de χ_2 es algo más elaborada que la de χ_1.

1. En una circunferencia del mismo radio que la anterior inscríbase otro pentágono y escójanse sobre él dos vértices U y V adyacentes uno del otro.

2. Reticúlese la circunferencia trazando dos rectas ℓ y ℓ', perpendiculares entre sí y que pasen por el centro, cuidando que una de ellas, digamos ℓ, quede paralela al lado UV del pentágono.

3. Entonces una de las diagonales del pentágono resulta paralela a ℓ; sean S y T sus extremos (otros dos vértices del pentágono). Desde el centro O de la circunferencia disparemos un rayo a 45° con respecto a ℓ en dirección a la diagonal ST y denotemos con P al punto en que el rayo intersecta a la diagonal.

4. Por P hagamos pasar una perpendicular a la diagonal ST; tal perpendicular intersecta al lado UV del pentágono en un punto al que denotaremos por X.

5. Observemos, por otro lado, que hay dos tangentes a la circunferencia que son paralelas a la perpendicular que hicimos pasar por P. Fijémonos en la que está del lado opuesto de O con referencia a la perpendicular por P. Sea Y el punto en que esta tangente y la prolongación de UV se intersectan.

6. Finalmente, consideremos la tangente paralela a UV y opuesta a O con referencia a este lado; sea Z el punto de intersección de esta tangente con la anterior.

En el triángulo XYZ tenemos construida a χ_2.

5.1. Inspección matemática de χ_2. Por la construcción que acabamos de hacer, es claro que XYZ es un triángulo rectángulo. Fijémonos primeramente en el cateto YZ.

[6](que suman 90°)

[7]Recuérdese que los ángulos interiores de un triángulo deben sumar 180°.

Designando con L al punto en que este cateto toca a la circunferencia, tenemos que

$$\overline{YZ} = \overline{YL} + \overline{LZ}$$ [9]

Observemos que $\overline{LZ}$ es igual al radio de la circunferencia, en tanto que $\overline{YL}$ es igual a la apotema del pentágono inscrito.

Ahora pongamos nuestra atención en el otro cateto. Si llamamos L' al punto en que ℓ' intersecta a XY, tenemos que

$$\overline{XY} = \overline{XL'} + \overline{L'Y}$$

Claramente $\overline{L'Y}$ coincide con el radio de la circunferencia. Para saber qué longitud es $\overline{XL'}$, llamemos P' al punto en que la perpendicular con la que localizamos a X intersecta a ℓ.

Entonces tenemos que

$$\overline{XL'} = \overline{OP'}$$

Puesto que el rayo disparado desde O hacia la diagonal ST forma con ℓ un ángulo de $45°$, también con ℓ' forma el mismo ángulo. En consecuencia, si llamamos P'' al punto en que ST y ℓ' se intersectan, tenemos que

$$\overline{OP'} = \overline{OP''}$$

Antes de continuar, recordemos que cuando dentro de un pentágono regular trazamos todas sus diagonales, los puntos en que éstas se intersectan determinan los vértices de otro pentágono regular, concéntrico al anterior pero invertido con relación a éste.

Con esto en mente, es fácil convencernos de que $\overline{OP''}$ es la apotema del pentágono invertido.

De todo esto resulta que uno de los catetos de χ_2 se obtiene añadiendo al radio de la circunferencia la apotema del pentágono inscrito, mientras que para obtener el otro cateto hay que añadir al radio la apotema del pentágono invertido.

Desde la antiguedad se conocen las relaciones que guardan entre sí estas magnitudes.

Si denotamos por r al radio de la circunferencia y por a y a' a las apotemas de los pentágonos inscrito e invertido, respectivamente, se tiene que

$$a = \tfrac{1+\sqrt{5}}{4} r \qquad \text{y} \qquad a' = \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4} r$$

En consecuencia, las longitudes de los catetos del triángulo XYZ son

$$\begin{aligned} \overline{XY} &= r + a' = r + \frac{-1+\sqrt{5}}{4} r = \frac{3+\sqrt{5}}{4} r \\ \overline{YZ} &= r + a = r + \frac{1+\sqrt{5}}{4} r = \frac{5+\sqrt{5}}{4} r \end{aligned}$$

Estos datos nos permiten conocer el valor de la función tangente aplicada al ángulo $\widehat{ZXY}$, para la cual tenemos

$$\tan \widehat{ZXY} = \frac{5+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \quad \left(\begin{array}{c}\text{que es el cuadrado del lado del pentágono} \\ \text{inscrito en la circunferencia unitaria}\end{array}\right)$$

[11] El uso de la barra denota longitud; así, $\overline{YZ}$ significa la longitud del lado YZ de χ_2.

Por consiguiente

$$\widehat{ZXY} = \arctan \frac{5-\sqrt{5}}{2} \approx 54°6'36.88''$$

y su complemento

$$35°53'23.12'' \approx \widehat{YZX}$$

En cuanto a la hipotenusa XZ, aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos que

$$\overline{XZ} = \sqrt{\overline{XY}^2 + \overline{YZ}^2}$$

Después de efectuar las operaciones correspondientes y de simplificar resulta que

$$\overline{XZ} = \frac{r}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}$$

6. Pentagrama Armónico de Hipócrates de Chíos

Como mencionamos al inicio, las escuadras de constructor de Hipócrates de Chíos fueron empleadas en Europa a partir del siglo XIII; desde entonces y hasta el final de su duración, la Arquitectura Gótica se vio influenciada, en lo referente a la edificación de catedrales y a la construcción de rosetones, por el uso que de ellas secretamente se hacía.

Durante ese periodo las cofradías de arquitectos (como la de los *Maestros de Piedra*, en la que se inició al constructor francés Willars de Honecort en la *deconstrucción armoniosa del Pentagrama Condensado de Hipócrates de Chíos*, o la de los *Maestros de Obra*, a la que siglos más tarde acudió Durero para entrar en conocimiento de la *Perspectiva Selecta*) transmitieron, de generación en generación, el rito iniciático en el conocimiento del arcano empleo de esas escuadras para la *deconstrucción armoniosa* del trazo de Hipócrates y así conseguir lo que ellos mismos llamaban la *Perspectiva Selecta*.

La investigación de todo esto forma parte del tratado de Arquitectura Gótica que hacia 1922 dio a la estampa su autor, el arqueólogo noruego Macody Lund.

Escribir este tratado le llevó a Lund algo más de una década.

En 1911 el gobierno francés encargó a Lund dar su opinión sobre la restauración de la catedral de Chartres. Al acometer su encargo, este arqueólogo encontró, en sus primeros ensayos de restauración del sistema de trazos, que todas las directrices oblicuas formaban, a veces con la horizontal, otras con la vertical, un ángulo de $54°6'$. Juzgó que las posiciones de ciertos elementos importantes en la alzada y la fachada habían sido directamente determinados a partir de una construcción geométrica rigurosa que involucraba este ángulo.

Ya había notado que sobre varias piedras del edificio figuraba como *sello lapidario* un trazo inscrito sobre un pentágono regular, cuyos segmentos presentaban un rítmo continuo sobre el tema de la Sección Áurea. Tiempo después encontró el mismo trazo en un tratado de Geometría del siglo XV donde se lo presentaba como el *Pentagrama Armónico de Hipócrates de Chíos*.

Prosiguiendo su indagatoria, dio con el par de escuadras del viejo pitagórico, así como con algunas referencias que orientaban someramente acerca de cómo operar con ellas sobre su pentagrama.

Volvió con estos instrumentos a Chartres (ya habían pasado un par de años). Pudiendo reconstruir con ellos los trazados verticales y las grandes líneas así como los puntos extremos, encontró que las demás líneas y puntos notables del edificio se situaban por sí mismos en el croquis así determinado. Tenía la solución completa del problema: Todos los puntos y todas las líneas directrices horizontales no localizadas aún, concordaban con la partición según la Sección Áurea de los segmentos obtenidos tras los primeros trazos. Comprendió que los constructores en nada arriesgaban su secreto dejando como *sello lapidario* el propio *Pentagrama Armónico* que inspiraba el diseño del edificio, pues para entender cómo se suceden los puntos en la partición completa no basta saber cuál es el diagrama central lógico sino *deconstruirlo* mediante el uso del par de escuadras.

Por su extensión, la *deconstrucción armoniosa* del también llamado *Pentagrama Condensado de Hipócrates de Chíos* sería tema de otro artículo, por lo que no nos ocuparemos aquí de ello.

7. Obtención de χ_1 y χ_2 a partir del pentágono estrellado

En seguida examinaremos un método sugerido por el propio Hipócrates de Chíos para la fabricación de sus escuadras.

1. Sobre una circuferencia de centro T y radio r, ubíquense los vértices de un pentágono regular a fin de obtener una estrella de cinco puntas o *pentágono estrellado.*

2. Ahora realícese el trazo de la tangente a la circunferencia que pase por un vértice U de la figura. Debido a la regularidad del pentágono estrellado, uno de sus lados, digamos PR, es paralelo a esta tangente. Obsérvese que los lados de la estrella que hacen vértice en U cortan a PR en sendos puntos; escójase uno cualquiera de ellos, al que llamaremos Q.

3. Haciendo centro en U, abatamos el punto Q hacia la tangente siguiendo el camino más corto (es decir, dejándolo caer según la inclinación que hacia la tangente tiene la diagonal UQ); sea S el punto de la tangente localizado con este movimiento.

4. Céntrese nuevamente el compás en U y abátase el centro T de la circunferencia sobre la tangente, girando en la misma dirección en que se giró al realizar el movimiento anterior; sea V el punto ubicado sobre la tangente con este movimiento.

5. Finalmente, prolónguese UT hasta el punto en que se intersectan dos de las diagonales del pentágono; sea W este punto de intersección.

Una de las propiedades de la circunferencia es que cualquiera de sus tangentes es perpendicular, en el punto de tangencia, al radio correspondiente.

Consecuentemente, para este caso tenemos que el ángulo

$$\widehat{SUT}\left(=\widehat{VUW}\right)$$

es recto, y se asegura que los triángulos rectángulos

$$STU \qquad \text{y} \qquad UVW$$

son modelo de un juego de escuadras de constructor.

Para cerciorarnos de que existen razones convincentes que soportan esta afirmación, hagamos el análisis separado de cada uno de estos triángulos.

7.1. Inspección matemática del triángulo UVW. Fijémonos, para empezar, en el cateto UW del triángulo; observemos que

$$\overline{UW} = \overline{UT} + \overline{TW}$$

donde $\overline{UT}$ es el radio r de la circunferencia, en tanto que $\overline{TW}$ es el radio (que denotaremos por r') de la circunferencia que circunscribe al pentágono invertido del centro de la estrella. Así, tenemos que

$$\overline{UW} = r + r'$$

mientras que por construcción

$$\overline{UV} = r$$

Sería bueno que pudiéramos saber cuánto es r' en términos de r, porque así obtendríamos una expresión para $\overline{UW}$ en función de r que nos permitiría operar con $\overline{UV}$ y obtener resultados que sólo dependen de r.

Más arriba apuntamos la relación que existe entre la apotema a' del pentágono invertido y el radio r de la circunferencia en la que está inscrita la estrella; es

$$a' = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} r$$

Ahí mismo quedó indicada la relación entre el radio r y la apotema a del pentágono regular. Desde lugo, y debido a la regularidad del pentágono invertido, esa misma relación se conserva referida a a' y r'; siendo así tenemos:

$$a' = \frac{1+\sqrt{5}}{4} r'$$

Después de igualar los segundos miembros de estas expresiones de a', despejamos r' obteniendo que

$$r' = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} r = \frac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} r = \frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)} r = \frac{3-\sqrt{5}}{2} r$$

De aquí se desprende que

$$\overline{UW} = r + r' = r + \frac{3-\sqrt{5}}{2} r = \frac{5-\sqrt{5}}{2} r$$

Estos datos nos permiten saber el valor de la tangente del ángulo $\widehat{UVW}$; tenemos:

$$\tan \widehat{UVW} = \frac{\overline{UW}}{\overline{UV}} = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{2} r}{r} = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \quad \left(\begin{array}{c}\text{que es el cuadrado del lado del pentágono}\\ \text{inscrito en la circunferencia unitaria}\end{array}\right)$$

y ya hemos visto que

$$\arctan \frac{5-\sqrt{5}}{2} \approx 54°6'36.88''$$

Consecuentemente, y debido a la rectangularidad del triángulo UVW, tenemos que

$$\widehat{UVW} \approx 54°6'36.88'' \qquad \text{y} \qquad \widehat{UWV} \approx 35°53'23.12''$$

Esto nos asegura que, efectivamente, el triángulo UVW es modelo de χ_2, la segunda escuadra de constructor de Hipócrates de Chíos.

7.2. Inspección matemática del triángulo STU. Los antiguos pitagóricos de los tiempos de Pericles, conocían bien el hecho de que cada punto de intersección de las diagonales de un pentágono regular divide a éstas en Razón Áurea. Aplicando este resultado a nuestro esquema tenemos que

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} = \phi$$

También sabían que el segmento mayor en cada diagonal inducido por el punto de intersección de dos de ellas es igual al lado del pentágono regular. Ahora bien; la relación que guarda el lado del pentágono regular con el radio de la circunferencia que lo circunscribe es

$$\ell = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}r$$

Como consecuencia de esto tenemos que

$$\overline{PQ} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}r$$

Por consiguiente, podemos despejar $\overline{QR}$ de la primera igualdad y escribir

$$\overline{QR} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\phi r$$

Luego de simplificar esta expresión resulta

$$\overline{QR} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}r$$

Puesto que $\overline{QR} = \overline{SU}$, esto ya nos permite conocer la tangente del ángulo $\widehat{UST}$; tenemos

$$\tan \widehat{UST} = \frac{\overline{UT}}{\overline{SU}} = \frac{r}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}r} = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

Aplicando la función inversa tenemos

$$\widehat{UST} = \arctan \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = 54°$$

Consecuentemente,

$$\widehat{STU} = 36°$$

por lo que el triángulo STU es modelo de χ_1, la primera escuadra de constructor de Hipócrates de Chíos.

7.3. Observación. Es importante destacar el hecho de que la proporción que guardan entre sí las escuadras del juego que acabamos de construir no es la misma que la que guardan las escuadras del juego construido anteriormente.

En efecto, si comparamos entre sí las logitudes de las hipotenusas de los triángulos ABC y XYZ mediante los cuales definimos a χ_1 y χ_2, tenemos la razón

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{XZ}} = \frac{2r}{\frac{r}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}} = \frac{4}{\sqrt{11+4\sqrt{5}}} \approx 0.895675919$$

Por otro lado, aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos extraidos de la estrella, tenemos que sus hipotenusas son

$$\overline{ST} = \sqrt{6-2\sqrt{5}}r \qquad \text{y} \qquad \overline{VW} = \sqrt{\tfrac{17-5\sqrt{5}}{2}}r$$

y la razón correspondiente es

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{VW}} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}r}{\sqrt{\frac{17-5\sqrt{5}}{2}}r} = \sqrt{\frac{12-4\sqrt{5}}{17-5\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{26-2\sqrt{5}}{41}} \approx 0.72461704$$

Esto significa que los dos procedimientos seguidos para la construcción de χ_1 y χ_2 no arrojan uno ni el mismo sino dos juegos de escuadras de construcor diferentes.

Confrontemos la situación con el caso de las escuadras convencionales; nótese que es cierto que no cualquier par de escuadras ´´de 45 y 60" hacen juego. Por cierto, a propósito de todo esto, ¿cómo se construye un juego de escuadras convencionales?

8. Escuadras de constructor vs. escuadras de dibujante

Sigamos comparando las escuadras de Hipócrates con las escuadras convencionales, también conocidas como *escuadras de dibujante*.

Un hecho por destacar es que de las medidas angulares de éstas últimas se conocen los valores ´´exactos" que arrojan las funciones trigonométricas y uno suele encontrarse desde el bachillerato (y aun desde antes) con la tabla

θ	senθ	cosθ	tanθ
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	1	0	∞

Para las medidas angulares de χ_1 y χ_2 contamos con una tabla similar:

θ	senθ	cosθ	tanθ
$35°53'23.12''$	$\sqrt{\frac{17+5\sqrt{5}}{82}}$	$\sqrt{\frac{65-5\sqrt{5}}{82}}$	$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$
$36°$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$54°6'36.88''$	$\sqrt{\frac{65-5\sqrt{5}}{82}}$	$\sqrt{\frac{17+5\sqrt{5}}{82}}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$
$54°$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

En cuanto a los trazos que son posibles valiéndose de unas y otras, es fácil darse cuenta de que con las escuadras de constructor se puede trazar la estrella de cinco puntas, en tanto que con las escuadras de dibujante se consigue el trazo de la estrella de seis puntas.

La estrella de cinco puntas fue el símbolo que pitagóricos y neopitagóricos empearon bajo el nombre de *pentalfa* como emblema de la salud y de la vida. El mismo símbolo sirvió en la Edad Media como *Sello de la Santa Vehme*, aquellos tribunales secretos que oepraron en Europa desde el siglo XI hasta el siglo XVI. En su *Estética de las Proporciones*, el investigador francés Matila Ghika reporta que la *Logia de los Sabios de Heliópolis* empleó una variante especial de la pentalfa estampada en sus actas, hacia 1860. En el siglo XX este emblema fue enarbolado en estandarte como la Estrella Roja de los Soviets hasta la Perestroika. En la actualidad grupos satánicos de todo el mundo están haciendo suyo este signo.

Por su parte, la estrella de seis puntas o *Sello de Salomón*, ha desempeñado un papel importante en la mística judaica así como en su arte decorativo. Tanto esta estrella como el triángulo equilátero son símbolos hebreos que también los masones (al lado del *cartabón*) han recogido para sí.

Posiblemente se debió a lo oculto que fue el uso de las escuadras de constructor el que haya predominado el empleo de las ecuadras de dibujante en las academias de arquitectura del mundo, dejando a las otras relegadas al olvido. Pero también existe la sospecha de un duelo entre dos facciones en pugna pertenecientes a la misma secta (librado posiblemente dentro de la masonería), una inclinada hacia el esoterismo de la geometría pitagórica en tanto que la otra arriba al misticismo judáico relacionado con la Cábala. Habría que escrutar la historia de las escuadras de dibujante para saber si se confirma esta sospecha.

9. Comentarios finales

Las reliquias arquitectónicas del gótico europeo que perduraron a través de los siglos, adolecieron en los sistemas de trazos de sus planos de una comlejidad geométrica que no dejó de asombrar a los futuros arquitectos que pudieron admirarlas, tanto más cuanto que no se conseguían desentrañar los procedimientos seguidos por su ejecución, envueltos siempre en un alo de misterio puesto que se sabía del proceso iniciático por el que habían pasado sus constructores para adquirir ese conocimiento; conocimiento del cual los profanos eran apartados con tanto celo como en otro tiempo los que querían penetrar los arcanos de la Orden de Pitágoras.

Es posible que ese celo lo hayan heredado aquellos constructores medievales de los propios pitagóricos, que también celaron aquel mismo conocimiento. Pero quizá fue el que el propio Hipócrates, de estancia en Bizancio, aflojó el celo de la Orden y dio a saber el modo de obtener sus escuadras a partir de la pentalfa, lo que permitió que este conocimiento haya podido llegar (siempre de pocos a pocos) a los *maestros de obra y piedra* del gótico.

Es importante señalar aquí que casi toda la pentalfa (con la excepción de una sola de las diagonales) figura como parte del Pentagrama Condensado. El que Hipócrates haya podido extraer el par de escuadras del propio pentagrama sobre el cual operan, es un hecho notable que los pitagóricos hicieron celosamente suyo; el haberlo revelado en Bizancio costó a Hipócrates la expulsión de la Orden.

Como se sabe, tras la caída de Roma, es Bizancio (entonces ya convertida en Constantinopla) el único gran pilar heredero de la civilización antigua que permanece en pie a lo largo de todo el obscurantismo medieval. Quizás fue de allí que aquel saber legado por Hipócrates pudo irse propagando poco a poco hacia Occidente. Uno de los logros de Macody Lund parece confirmarlo así: el hallazgo del Pentagrama Armónico plasmado como símbolo visible en la iglesia bizantina de Spalato, en Croacia (siglo IX).

Con elementos como este reportados en su tratado, Lund demuestra que lo mismo que ocurrió con otros temas de matemáticas (como el de la resolución completa de la ecuación general de segundo grado con una incógnita) también con los de Sección Áurea y diagramas pentagonales se dio una transmisión ininterrumpida desarrollada por unas cuantas mentes activas que cultivaron estos temas en cada generación.

Otro dato relevante aportado por el arqueólogo noruego es que los propios miembros de la hermandad pitagórica llegaron a diseñar obras de construcción menores (como los recintos en que se reunían) basándose en el Pentagrama Armónico. De las pocas que se conservan, una al menos tiene grabado en uno de sus muros. No se tiene noticia de que otro tipo de obras como caminos o puentes hayan sido construidos en la Antiguedad a partir de este principio.

Cerramos esta parte con la mención de un dato curioso.

Nada se sabe acerca de que Isaac Newton haya diseñado como arquitecto los planos de algún inmueble, y es muy remoto que algo así llegue a saberse porque muy probablemente este interesante suceso no llegó a producirse nunca. Sin embargo, Newton no fue ajeno a la Arquitectura, y se sabe que se avocó con empeño en la reconstrucción minuciosa de los planos del gran templo de Salomón.

Además, por influencia del filósofo John Loke, ingresó a la sociedad secreta de los francmasones, lo cual justifica el que a su muerte hayan sido encontrados entre sus objetos personales, el cartabón y la regla de cobre (emblemas típicos de la masonería) así como un par de escuadras de constructor.

Aparte de su estudio de los planos del gran templo de Salomón no parece haberse dedicado al análisis ni diseño de otras obras de arquitectura aunque sí de ingeniería, y manda tender un puente en el Colegio de la Reina, en Cambridge, diseñado por él.

Del famoso *puente matemático de Newton* se sabe que no tenía un solo clavo y que funcionó firmemente durante más de tres siglos dando paso a peatones que lo usaban diariamente.

En 1970 un grupo de ingenieros, intrigados por los principios en los cuales se fundaba la construcción del puente, solicitaron al Colegio el permiso de desmontarlo a fin de saber cómo fue diseñado.

El permiso les fue otorgado y el desmantelamiento del puente se realizó sin ofrecer indicio alguno a los ingenieros acerca de su diseño.

Convencidos de que el reconstruirlo daría la clave del prolema pusieron manos a la obra, pero todos sus esfuerzos por rehacerlo fueron inútiles; el puente tuvo que ser reforzado con aditamentos convencionales (como el clavo) y su misterio se agrandó aún más.

Hoy existe la sospecha de que el alquimista inglés puso en juego el par de escuadras para el tendido de su puente.