Capítulo 1

Subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$

El propósito de este capítulo es estudiar algunos ejemplos de subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ (como son: la subcategoría de los espacios localmente conectables por trayectorias, la de los espacios finitamente generados, la de los espacios compactamente generados) y sus correflexiones topológicas. Para motivar el concepto de subcategoría correflexiva se dará una idea intuitiva de éste.

Por subcategoría de $\mathfrak{Top}$ se entenderá simplemente cualquier familia de espacios topológicos que esté cerrada bajo homeomorfismos.[1]

Las *subcategorías correflexivas* se pueden pensar, en forma figurada, como una galería de espejos para $\mathfrak{Top}$. Cada *subcategorías correflexiva* implica la existencia de un espejo. Al exponer a la familia $\mathfrak{Top}$ de todos los espacios topológicos ante tal espejo, la *subcategorías correflexiva* puede considerarse como la colección de todas las imágenes (correflejos) que el espejo devuelve de $\mathfrak{Top}$. Esta clase, que se denotará por $\underline{A}$, debe ser tal que al anteponerle cualquier espacio topológico X, devuelva de X una imagen deformada[2] $A \in \underline{A}$ (su correflejo) a través de una transformación continua $c : A \to X$ (la $\underline{A}$-correflexión de X) tal que si A' se presentase como otro correflejo de X, con una pretendida correflexión $f : A' \to X$ exista una única $g : A' \to A$ tal que $cg = f$.

1.1. Definición y ejemplos de subcategoría correflexiva

Definición 1.1 *Una* ***subcategoría de*** $\mathfrak{Top}$ *es una familia* $\underline{\mathbf{A}}$ *de espacios topológicos que contiene con cada espacio* A *a todo espacio homeomorfo a* A*, es decir:*

$$(A \in \underline{\mathbf{A}} \text{ } y \text{ } B \cong A) \Rightarrow B \in \underline{\mathbf{A}}$$

Es común referirse a los elementos de la subcategoría $\underline{\mathbf{A}}$ *con el nombre de* $\underline{\mathbf{A}}$***-espacios.***

A lo largo de este capítulo, cuando se hable de una *subcategoría de* $\mathfrak{Top}$ se estará haciendo referencia a la definición anterior. Más adelante se precisarán detalles que trae consigo el concepto de subcategoría de $\mathfrak{Top}$.

Definición 1.2 *Sea* $\underline{\mathbf{A}}$ *una subcategoría arbitraria de* $\mathfrak{Top}$*. Una* $\underline{\mathbf{A}}$***-correflexión de un espacio topológico*** $\mathbf{X}$ *es una función continua*

$$c : A \to X$$

que satisface las siguientes condiciones:
(i) $A \in \underline{\mathbf{A}}$
(ii) Para toda función continua $f : A' \to X$*, con* $A' \in \underline{\mathbf{A}}$*, existe una única función continua* $g : A' \to A$ *tal que* $cg = f$*, como se representa en el diagrama conmutativo:*

diagrama

En tal caso se dice que el espacio X *es* $\underline{\mathbf{A}}$***-correflejable*** *y el espacio* A *recibe el nombre de* $\underline{\mathbf{A}}$***-correflector de*** X.

Definición 1.3 *Si la subcategoría* $\underline{\mathbf{A}}$ *es tal que cualquier espacio topológico es* $\underline{\mathbf{A}}$*-correflejable, se dice que* $\underline{\mathbf{A}}$ ***es una subcategoría correflexiva de*** $\mathfrak{Top}$*..*

[1] Ésta no es la noción de *subcategoría* que suele hallarse en la literatura especializada en estos temas; a este respecto, véase el comentario con que inicia la sección 3.4

[2] Que es como la que todo espejo brinda: una imagen falsa pero a la vez auténtica.

Una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ queda determinada describiendo dos cosas: los espacios topológicos que la forman y sus correflexiones.

Una importante propiedad de las correflexiones es su *unicidad salvo homeomorfismos*, que es lo que queda establecido en el siguiente resultado.

Proposición 1.1 (a) *El $\underline{\mathbf{A}}$-correflector de un espacio X es único salvo homeomorfismos. Es decir, si*

$$c : A \to X \quad y \quad c' : A' \to X$$

son $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones del espacio X, entonces existe un homeomorfismo

$$h : A \to A'$$

tal que

diagrama

(b) *Recíprocamente, todo espacio homeomorfo al $\underline{\mathbf{A}}$-correflector del espacio X es también un $\underline{\mathbf{A}}$-correflector de X. Esto es, si*

$$c : A \to X$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de X y $h' : A' \to A$ es un homeomorfismo, entonces $ch' : A' \to X$ también es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de X.

Demostración 1 (a): *Efectivamente, al ser c y c' $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones de X, existen, respectivamente, dos funciones continuas h y h' que hacen conmutativos los diagramas*

diagrama

Siendo así, obsérvese que la composición $h'h$ es una función continua de A en A tal que

$$c\,(h'h) = (ch')\,h = c'h = c$$

Y como el siguiente diagrama conmuta

diagrama

o equivalentemente, como 1_A es una función continua que también cumple la igualdad

$$c1_A = c$$

se tiene, de acuerdo con (ii), que

$$h'h = 1_A.$$

Análogamente se prueba que $hh' = 1_{A'}$. Por lo tanto, h es un homeomorfismo.

Demostración 2 (b): *En efecto, sea $f : B \to X$ cualquier función continua, con $B \in \underline{\mathbf{A}}$; entonces, existe una única función continua $g : B \to A$ tal que $cg = f$. Sea $g' = h'^{-1}g$; entonces*

$$(ch')\,g' = c\left(h'h'^{-1}\right)g = cg = f;$$

y si $g'_1 : B \to A'$ fuera otra función continua tal que $(ch')\,g'_1 = f$,

diagrama

entonces $h'g'$ y $h'g'_1$ serían dos funciones continuas de B en A tales que

$$c\,(h'g') = f = c\,(h'g'_1)$$

Entonces, debido a (ii), $h'g' = h'g'_1$, por lo que $g' = g'_1$. Por lo tanto, ch' es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de X.♦

Observación 1.1 $\underline{\{\emptyset\}}$ *es la mínima subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

En efecto, para cualquier espacio topológico X se tiene que existe una única función continua

$$\emptyset \xrightarrow{\phi} X$$

Esta *función vacía* es la $\underline{\{\emptyset\}}$-correflexión de X, como lo hace constar la conmutatividad del siguiente diagrama:

diagrama

También es cierto que sea cual sea la subcategoría correflexiva $\underline{\mathbf{A}}$ de $\mathfrak{Top}$, $\emptyset$ es uno de sus elementos. En efecto, como para cualquier $X \in \mathfrak{Top}$ debe existir una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión $c : A \to X$, con $A \in \underline{\mathbf{A}}$, en particular, cuando X es vacío no puede ser otra que $c = \phi$, con $A = \emptyset$; $\therefore \emptyset \in \underline{\mathbf{A}}$. Por lo tanto, $\underline{\{\emptyset\}}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ tal que para cualquier otra subcategoría correflexiva $\underline{A}$, se tiene que

$$\underline{\{\emptyset\}} \subseteq \underline{A}$$

$\underline{\{\emptyset\}}$ es la mínima correflexiva porque antes de ella sólo está $\underline{\emptyset}$: la subcategoría vacía de $\mathfrak{Top}$, que no satisface la definición de ser correflexiva porque ni siquiera para el espacio vacío es posible definir una $\underline{\emptyset}$-correflexión.♦

Obsérvese que en el primer caso ϕ no es, desde luego, necesariamente suprayectiva. El siguiente teorema muestra que cualquier otro ejemplo que se ocurra será distinto del anterior en ese sentido.

1.2. Definiciones de bicorreflexividad y de ciertos espacios

Teorema 1.1 *Si $\underline{\mathbf{A}}$ es cualquier subcategoría correflexiva con elementos no vacíos, entonces toda $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión debe ser biyectiva.*

Demostración 3 *Sea X cualquier espacio topológico y sea $c_X : A \to X$ una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de X. Si $X = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$ y $\phi : A \to X$ es biyectiva.*

Supóngase que $X \neq \emptyset$; entonces $c_X : A \to X$ es suprayectiva. En efecto, escójase cualquier punto $x \in X$ y defínase para cualquier elemento no vacío $B \in \underline{\mathbf{A}}$

$$B \xrightarrow{f} X$$

como la constante de valor x. De acuerdo con la definición de subcategoría correflexiva debe existir una, y sólo una, función continua $g : B \to A$ que haga conmutativo el diagrama

diagrama

Pero entonces

$$\forall b \in B, \quad c_X\left(g\left(b\right)\right) = f\left(b\right) = x$$

lo cual significa que $g\left(b\right)$ es preimagen de x en A bajo c_X; por lo tanto, c_X es suprayectiva.

$c_X : A \to X$ es inyectiva. En efecto, sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $c_X\left(a_1\right) = c_X\left(a_2\right)$ y reconsidérese la función f anterior para $x = c_X\left(a_1\right)$. Entonces se tiene el diagrama

diagrama

en el cual las funciones g_1 y g_2 son las constantes definidas para $i \in \{1, 2\}$ por

$$g_i\left(b\right) = a_i$$

Ambas hacen conmutar el diagrama, pero éste sólo conmuta bajo la acción de una función única. En consecuencia se trata de la misma constante, es decir, $a_1 = a_2$. Por lo tanto, c_X es inyectiva.♦

Debido a lo anterior, en adelante se llamarán **subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$** a las subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ con elementos no vacíos ya que, según se ha visto, en ellas todas las $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones son biyectivas.

Observación 1.2 *Nótese que aún en el caso de la subcategoría $\underline{\{\emptyset\}}$ las correflexiones son inyectivas (pues, por vacuidad, la función ϕ es inyectiva). Por lo tanto, en toda subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ las $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones son inyectivas; o, dicho de otro modo: toda subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ es **monocorreflexiva**.*

Observación 1.3 *$\mathfrak{Top}$ es subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Efectivamente, si $X \in \mathfrak{Top}$, $1_X : X \to X$ es una $\mathfrak{Top}$-correflexión.

Observación 1.4 *Si $\underline{\mathbf{A}}$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y (X,τ) es cualquier espacio topológico, entonces una de las $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones de (X,τ) es de la forma 1_X.*

Demostración 4 *Supóngase que*

$$c : (A,\xi) \to (X,\tau)$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de (X,τ); sea

$$\tau' = \{c\,(U) : U \in \xi\}$$

Como c es biyectiva, τ' es una topología para X y

$$c^{-1} : (X,\tau') \to (A,\xi)$$

se vuelve continua pues τ' es en realidad la topología inicial para X correspondiente a $c^{-1} : X \to (A,\xi)$ y a ξ, es decir,

$$\tau' = \left\{\left(c^{-1}\right)^{-1}(U) : U \in \xi\right\} = \{c\,(U) : U \in \xi\}$$

En consecuencia,

$$c^{-1} : (X,\tau') \to (A,\xi)$$

es un homeomorfismo. Por lo tanto, $(X,\tau') \in \underline{\mathbf{A}}$ y, por (b) de la proposición 1.1,

$$cc^{-1} = 1_X$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de (X,τ).♦

Subcategoría bicorreflexiva mínima.

Teorema 1.2 *La subcategoría de los espacios discretos es la mínima subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración 5 *Sea $\underline{\mathbb{D}}$ la subcategoría de los espacios discretos.*

(a) *$\underline{\mathbb{D}}$ es bicorreflexiva:* Sea (X,τ) cualquier espacio topológico. Si τ_d es la topología discreta para X, entonces

$$1_X : (X,\tau_d) \to (X,\tau)$$

es una $\underline{\mathbb{D}}$-correflexión porque: 1_X es continua; $(X,\tau_d) \in \underline{\mathbb{D}}$; y si $f : (W,\xi) \to (X,\tau)$ es continua, con $(W,\xi) \in \underline{\mathbb{D}}$, entonces $f : (W,\xi) \to (X,\tau_d)$ es la única función continua para la cual se tiene el diagrama

diagrama

Además, $\underline{\mathbb{D}}$ tiene elementos no vacíos; por lo tanto, $\underline{\mathbb{D}}$ es bicorreflexiva.

(b) *$\underline{\mathbb{D}}$ es la mínima bicorreflexiva:* Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y (X,τ) cualquier espacio discreto. Entonces existe una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión

$$c_{(X,\tau)} : A \to (X,\tau)$$

que, como se sabe, es continua y biyectiva. Como (X,τ) es discreto, también $c^{-1}_{(X,\tau)}$ es continua; por lo tanto $c_{(X,\tau)}$ es un homeomorfismo y $(X,\tau) \in \underline{A}$. Por lo tanto, $\underline{\mathbb{D}} \subseteq \underline{\mathbf{A}}$.♦

En la siguiente sección se verán ejemplos de otras subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$, como serán las subcategorías formadas por los *espacios finitamente generados*, por los *espacios compactamente generados* y por los *espacios conexamente generados*. Para verlos se finaliza esta sección dando las definiciones de estos espacios.

Espacios finitamente generados

Definición 1.4 *Se dice que un espacio topológico (X,τ) está* ***finitamente generado*** *si es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios finitos de (X,τ). Es decir, si*

$$\mathfrak{Fin}_X := \{F \subseteq X : F \text{ es finito}\}$$

entonces

$$(\iota_F : (F, \tau|_F) \hookrightarrow (X,\tau))_{\mathfrak{Fin}_X}$$

es un sumidero final correspondiente a $(\iota_\lambda)_\Lambda$ y a $(\tau_\lambda)_\Lambda$.

Ejemplo 1.1 *Todo espacio discreto está finitamente generado.*

Demostración 6 *En efecto, si (X,τ) es discreto, entonces el sumidero*

$$(\iota_F : (F, \tau|_F) \hookrightarrow (X,\tau))_{\mathfrak{Fin}_X}$$

es final, porque la topología discreta τ es la más grande de las topologías para X que hace continuas a las inclusiones ι_F.♦

Ejemplo 1.2 *Todo espacio finito está finitamente generado.*

Ejemplo 1.3 *Todo espacio indiscreto está finitamente generado.*

Demostración 7 *Sea τ la topología indiscreta para X y considérese el sumidero de inclusiones de los subespacios finitos de (X,τ)*

$$(\iota_F : (F, \tau|_F) \hookrightarrow (X,\tau))_{\mathfrak{Fin}_X}$$

Hay que probar que en este caso la topología final para X, τ', correspondiente a $(\tau|_F)_{\mathfrak{Fin}_X}$ y a $(\iota_F)_{\mathfrak{Fin}_X}$, es indiscreta; es decir, hay que ver que los únicos abiertos de τ' son el vacío y el total. Para ello se procederá por reducción al absurdo suponiendo que hay un subconjunto propio de X, no vacío y elemento de τ'. Sea U tal subconjunto de X. Al ser $U \in \tau$, se tiene que para toda $F \in \mathfrak{Fin}_X$

$$\iota_F^{-1}(U) \in \tau|_F$$

Por ser no vacío, existe al menos un $x \in U$. Por ser subconjunto propio, tampoco $X - U$ es vacío, por lo que existe $y \in X - U$; entonces $x \neq y$ y el subespacio de (X,τ)

$$\left(\{x,y\}, \tau\left|_{\{x,y\}}\right.\right)$$

es finito e indiscreto. Sin embargo, para la inclusión correspondiente

$$\iota : \left(\{x,y\}, \tau\left|_{\{x,y\}}\right.\right) \hookrightarrow (X,\tau)$$

se tiene que

$$\iota^{-1}(U) = \{x\} \notin \tau\left|_{\{x,y\}}\right. \qquad \underset{\circ}{\nabla}$$

Esto contradice el hecho de que U es elemento de la topología final. Luego, falso suponer propio a U cuando es no vacío y elemento de τ'; $\therefore U = X$, lo que significa que τ' es indiscreta. Por lo tanto

$$(\iota_F : (F, \tau|_F) \hookrightarrow (X,\tau))_{\mathfrak{Fin}_X}$$

es final y (X,τ) está finitamente generado.♦

Teorema 1.3 *Sea (X,τ) cualquier espacio topológico; son equivalentes:*
(a) (X,τ) está finitamente generado.
(b) Las intersecciones arbitrarias de abiertos son abiertas.
(c) Las uniones arbitrarias de cerrados son cerradas.
(d) Si $(A_i)_I$ es cualquier familia de subconjuntos de X, entonces

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Demostración 8 *(a) $\Rightarrow$ (b) : Sea $(A_i)_I$ cualquier familia de subconjuntos abiertos de (X,τ) y sea $A = \bigcap_{i\in I} A_i$. Defínase a*

$$\mathfrak{Fin}_X := \{F \subseteq X : F \text{ es finito}\}$$

Por (a), para cualesquiera subconjuntos de X, U y F, con $F \in \mathfrak{Fin}_X$, se tiene que

$$U \in \tau \Leftrightarrow U \cap F \in \tau|_F$$

En consecuencia, para cada F que se fije en $\mathfrak{Fin}_X$, se tiene que

$$A \cap F = \bigcap_{i\in I} (A_i \cap F)$$

es una intersección finita de abiertos de $(F, \tau|_F)$ (posiblemente de muchos intersectandos repetidos). Luego, para toda $F \in \mathfrak{Fin}_X$,

$$A \cap F \in \tau|_F$$

Por lo tanto, $A \in \tau$.
(b) $\Rightarrow$ (a) : Hay que probar que es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios finitos de (X,τ)

$$\mathcal{S} = (\iota_F : (F, \tau|_F) \hookrightarrow (X,\tau))_{\mathfrak{Fin}_X}$$

para lo cual basta demostrar que si U es un subconjunto de X tal que para todo $F \in \mathfrak{Fin}_X$,

$$U \cap F \in \tau|_F$$

entonces $U \in \tau$. Escójase U con esas características y un punto $x \in U$. Por (b), x posee una vecindad abierta mínima $V(x)$ según τ; a saber:

$$V(x) = \cap \{W \in \tau : x \in W\}$$

Ahora bien, si ocurriese que $V(x) - U \neq \varnothing$, entonces se podría escoger

$$y \in V(x) - U$$

y formar el subespacio finito $\left(\{x,y\} . \tau|_{\{x,y\}}\right)$. Entonces

$$U \cap \{x,y\} = \{x\} \in \tau|_{\{x,y\}}$$

lo cual implica que este abierto relativo $\{x\}$ debe poderse obtener al intersectar el abierto absoluto más chico que contiene a x con $\{x,y\}$. Pero esto es falso, porque $V(x) \cap \{x,y\} = \{x,y\}$ $\underset{\circ}{\nabla}$. Luego, $V(x) \subseteq U$; por lo tanto, $U \in \tau$ y $\mathcal{S}$ es final.
(b) $\Rightarrow$ (c) : Sea $(A_i)_I$ cualquier familia de subconjuntos cerrados de (X,τ) y sea $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Por (b),

$$X - A = \bigcap_{i\in I} (X - A_i) \in \tau$$

Por lo tanto, A es cerrado.
(c) $\Rightarrow$ (d) : Sea $(A_i)_I$ una familia arbitraria de subconjuntos de (X,τ). Claramente,

$$A_i \subseteq \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}, \ \forall i \in I$$

por lo tanto

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$$

Tomando cerraduras y aplicando (c) se obtiene

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$$

que es lo que se quería.
(d) $\Rightarrow$ (b) : Sea $(A_i)_I$ una familia cualquiera de subconjuntos abiertos de (X,τ) y sea

$$A = \bigcap_{i\in I} A_i$$

Por (*d*),

$$\overline{X - A} = \bigcup_{i \in I} \overline{X - A_i}$$

pero

$$\overline{X - A_i} = X - A_i$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{i \in I} \overline{X - A_i} = \bigcup_{i \in I} (X - A_i) = X - A$$

O sea que $X - A$ *es cerrado y* A *es abierto, como se quería probar.*♦

Definición 1.5 *Se dice que un espacio topológico es* ***localmente finito*** *si todo punto del espacio tiene una vecindad finita.*

Ejemplo 1.4 *Todo espacio localmente finito está finitamente generado.*

Proposición 1.2 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico arbitrario. Si*

$$\tau' = \{U \subseteq X : \forall F \in \mathfrak{Fin}_X,\, U \cap F \in \tau|_F\}$$

donde

$$\mathfrak{Fin}_X = \{F \subseteq X : F \text{ es finito}\}$$

entonces τ' *es una topología para* X *y es más fina que* τ.

Demostración 9 *Considérese el sumidero de inclusiones*

$$S = (\iota_F : (F, \tau|_F) \hookrightarrow X)_{\mathfrak{Fin}_X}$$

Si se piensa en X *topologizado con* τ *entonces* S *es un sumidero topológico porque cada inclusión* ι_F *se convierte en una función continua (pues* $(F, \tau|_F)$ *es subespacio de* (X, τ)*). Obsérvese, por otra parte, que* τ' *es la topología final para* X *correspondiente a la familia* $(\tau|_F)_{\mathfrak{Fin}_X}$ *y a las inclusiones* $(\iota_F)_{\mathfrak{Fin}_X}$ *(esto es, correspondiente al sumidero* S*), ya que consta de aquellos* $U \subseteq X$ *que para todo* $F \in \mathfrak{Fin}_X$

$$\iota_F^{-1}(U) = U \cap F$$

Por lo tanto τ' *es una topología para* X *y es la más grande que hace continuas a estas inclusiones. Por lo tanto*

$$\tau \subseteq \tau'.♦$$

Proposición 1.3 *Sean* (X, τ) *un espacio topológico arbitrario y*

$$\tau' = \{U \subseteq X : \forall F \in \mathfrak{Fin}_X,\, U \cap F \in \tau|_F\}$$

Entonces:
(a) (X, τ') *está finitamente generado.*
(b) *Si* $f : (W, \xi) \to (X, \tau)$ *es continua y* (W, ξ) *está finitamente generado, entonces*

$$f : (W, \xi) \to (X, \tau')$$

es continua.

Demostración 10 (*a*). *Hay que probar que es final el sumidero*

$$S' = (\iota_F : (F, \tau'|_F) \hookrightarrow (X, \tau'))_{\mathfrak{Fin}_X}$$

Para ello tómense $(Y, \sigma) \in \mathfrak{Top}$ *y* $g : X \to Y$ *tales que, para toda* $F \in \mathfrak{Fin}_X$,

$$g\iota_F \in \mathfrak{Top}((F, \tau'|_F), (Y, \sigma))$$

Sea $V \in \sigma$; *entonces, para toda* $F \in \mathfrak{Fin}_X$, *se tiene que*

$$g^{-1}(V) \cap F = \iota_F^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) = (g\iota_F)^{-1}(V) \in \tau'|_F$$

De acuerdo con la definición de τ', *esto significa que* $g^{-1}(V) \in \tau'$. *Luego, es continua*

$$g : (X, \tau') \to (Y, \sigma)$$

lo cual demuestra la finalidad del sumidero S'.

Demostración 11 (b). *Sea $f:(W,\xi)\to(X,\tau)$ una función continua cuyo dominio (W,ξ) está finitamente generado. Entonces, el sumidero de inclusiones*

$$S=\left(\iota_F:(F,\xi|_F)\hookrightarrow(W,\xi)\right)_{\mathfrak{Fin}_W}$$

es final; esto es, (W,ξ) tiene la topología final respecto a la familia $(\xi|_F)_{\mathfrak{Fin}_W}$ y a $(\iota_F)_{\mathfrak{Fin}_W}$ donde

$$\mathfrak{Fin}_W=\{F\subseteq W : F \text{ es finito}\}$$

Por otro lado, debido a la continuidad de la función $f:(W,\xi)\to(X,\tau)$, para toda $F\in\mathfrak{Fin}_W$ resulta continua la restricción

$$f\Big|_F^{f(F)}:(F,\xi|_F)\to\left(f(F),\tau|_{f(F)}\right)$$

Pero $F\in\mathfrak{Fin}_W$ implica $f(F)\in\mathfrak{Fin}_X$; luego, a consecuencia de la definición de τ', para todo $F\in\mathfrak{Fin}_W$ resulta continua la inclusión

$$(\iota)_{f(F)}:\left(f(F),\tau|_{f(F)}\right)\to(X,\tau')$$

Entonces, puesto que para todo $F\in\mathfrak{Fin}_W$, conmuta el diagrama

diagrama

resulta que, para todo $F\in\mathfrak{Fin}_W$, la composición

$$(F,\xi|_F)\xrightarrow{\iota_F}(W,\xi)\xrightarrow{f}(X,\tau')$$

es continua. Esto implica, debido a la finalidad de ξ respecto a $(\xi|_F)_{\mathfrak{Fin}_W}$ y a $(\iota_F)_{\mathfrak{Fin}_W}$, y a la proposición **??**, *que*

$$f:(W,\xi)\to(X,\tau')$$

es continua, como se quería demostar.♦

(X,τ') es **el espacio finitamente generado asociado a** (X,τ).

Espacios compactamente generados.

Definición 1.6 *Se dice que un espacio topológico (X,τ) está* ***compactamente generado*** *si es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios compactos de (X,τ).*[3]

Proposición 1.4 *Si (X,τ) es cualquier espacio topológico, son equivalentes:*
(a) (X,τ) está compactamente generado.
(b) Para todo $K\subseteq X$ compacto en (X,τ), $U\in\tau\Leftrightarrow U\cap K\in\tau|_K$.

Demostración 12 *(a) $\Rightarrow$ (b): Sea*

$$\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}:=\{K\subseteq X : K \text{ es compacto en } (X,\tau)\}$$

Por (a), es final el sumidero

$$\left(\iota_K:(K,\tau|_K)\hookrightarrow(X,\tau)\right)_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$$

Por lo tanto, para toda $K\in\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}$,

$$U\in\tau\Leftrightarrow\iota_K^{-1}(U)\in\tau|_K$$

es decir, para toda $K\in\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}$,

$$U\in\tau\Leftrightarrow U\cap K\in\tau|_K$$

(b) $\Rightarrow$ (a): De acuerdo a la definición de sumidero final, (b) significa que τ es la topología final corespondiente a $(\tau|_K)_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$ y a $(\iota_K)_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$. Por lo tanto, el sumidero

$$\left(\iota_K:(K,\tau|_K)\hookrightarrow(X,\tau)\right)_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$$

es final y (X,τ) está compactamente generado.♦

[3] En la terminología antigua este concepto recibía el nombre de K-espacio.

Ejemplo 1.5 *Todo espacio finitamente generado está compactamente generado.*

Demostración 13 *En efecto, supóngase que (X, τ) está finitamente generado y considérese la familia $\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}$ de los subespacios compactos de (X, τ). Sea $U \subseteq X$ tal que para toda $K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}$, $U \cap K \in \tau|_K$. Puesto que cualquier subespacio finito de (X, τ) es compacto, en particular se tiene que para todo $F \in \mathfrak{Fin}_X$,*

$$U \cap F \in \tau|_F$$

y como se trata de un espacio finitamente generado, entonces $U \in \tau$; de modo que, por (b) de la proposición anterior, (X, τ) está compactamente generado.♦

Proposición 1.5 *Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Si*

$$\tau' = \left\{U \subseteq X : \forall K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)},\ U \cap K \in \tau|_K\right\}$$

entonces τ' es una topología para X más fina que τ.

Demostración 14 *Considérese el sumidero de inclusiones*

$$S = (\iota_K : (K, \tau|_K) \hookrightarrow X)_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$$

Si se piensa en X topologizado con τ entonces S es su sumidero topológico porque cada inclusión ι_K se convierte en una función continua (pues $(K, \tau|_K)$ es subespacio de (X, τ)). Obsérvese también que τ' es la topología final para X respecto a la familia $(\tau|_K)_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$ y a las inclusiones $(\iota_K)_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$. En efecto, la topología final para X respecto a la familia $(\tau|_K)_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$ y a las inclusiones $(\iota_K)_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$ es

$$\tau' := \left\{U \subseteq X : \forall K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)},\ \iota_K^{-1}(U) \in \tau|_K\right\};$$

pero, para toda $K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}$, $\iota_K^{-1}(U) = U \cap K$. Por lo tanto τ' es la más grande de las topologías para X que hace continuas a las inclusiones ι_K; de aquí que resulte

$$\tau \subseteq \tau'.\blacklozenge$$

Corolario 1.1 *Si (X, τ) es cualquier espacio topológico y*

$$\tau' = \left\{U \subseteq X : \forall K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)},\ \iota_K^{-1}(U) \in \tau|_K\right\}$$

entonces, $K \subseteq X$ es compacto en (X, τ) si, y sólo si, K es compacto en (X, τ').

Demostración 15 *Si K es compacto en (X, τ) y $(U_j)_J \subseteq \tau'$ es una cubierta de K, entonces, de acuerdo con la definición de τ', para toda $j \in J$ se tiene que*

$$U_j \cap K \in \tau|_K$$

En consecuencia, para toda $j \in J$ existe $V_j \in \tau$ tal que

$$V_j \cap K = U_j \cap K$$

Entonces

$$K = \bigcup_{j \in J} (U_j \cap K) = \bigcup_{j \in J} (V_j \cap K);$$

esto implica que $(V_j)_J$ es una cubierta abierta de K según τ y, por consiguiente, puede extraerse de ella una subcubierta finita $(V_j)_{J_0}$. Entonces

$$K = \left(\bigcup_{j \in J_0} V_j\right) \cap K = \bigcup_{j \in J_0} (V_j \cap K) \subseteq \bigcup_{j \in J_0} (U_j \cap K)$$

lo cual significa que $(U_j)_{J_0}$ es una subcubierta fnita de $(U_j)_J$. Por lo tanto K es compacto en (X, τ').
Recíprocamente, puesto que por la proposición anterior τ' es más fina que τ, se tiene que

$$1_X : (X, \tau') \to (X, \tau);$$

es continua; por lo tanto cualquier compacto K de (X, τ') es aplicado por 1_X en un compacto de (X, τ), que es precisamente K.♦

Proposición 1.6 *Sea (X, τ) cualquier espacio topológico. Si*

$$\tau' = \left\{U \subseteq X : \forall K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)},\ \iota_K^{-1}(U) \in \tau|_K \right\}$$

entonces:
(a) (X, τ') está compactamente generado.
(b) Si $f : (W, \xi) \to (X, \tau)$ es cualquier función continua, donde (W, ξ) está compactamente generado, entonces $f : (W, \xi) \to (X, \tau')$ es continua.

Demostración 16 *(a). De acuerdo con la definición de τ', es final el sumidero de inclusiones de los subespacios compactos de (X, τ)*

$$(\iota_K : (K, \tau|_K) \hookrightarrow (X, \tau'))_{K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$$

Por el corolario anterior, tales subespacios son los mismos que los compactos de (X, τ'). Consecuentemente, también es final el sumidero

$$(\iota_K : (K, \tau'|_K) \hookrightarrow (X, \tau'))_{K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau')}}$$

lo cual significa que (X, τ') está compactamente generado.

Demostración 17 *(b). La prueba es análoga a la de la proposición 1.3* ♦

Observación 1.5 *(X, τ') es conocido como* **el espacio compactamente generado asociado a** *(X, τ).*

Ejemplo 1.6 *Todo espacio topológico en el que cada punto posea una vecindad compacta está compactamente generado.*

Demostración 18 *En efecto, sea (X, τ) cualquier espacio con la propiedad anterior. Hay que probar que si $U \subseteq X$ es tal que, para toda $K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}$,*

$$U \cap K \in \tau|_K$$

entonces $U \in \tau$. Sea $x \in U$ y sea K la vecindad compacta que por hipótesis posee x; entonces

$$x \in U \cap K \in \tau|_K$$

o sea que $U \cap K$ es una vecindad relativa de x contenida en la vecindad absoluta K de x; pero $U \cap K$ es abierto en K si y sólo si $U \cap K = K \cap V$ para algún $V \in \tau$; entonces $U \cap K$ es la intersección de dos vecindades absolutas K y V; por lo tanto $U \cap K$ es una vecindad absoluta de x contenida en U. Por lo tanto U es abierto en X, es decir, $U \in \tau$.♦

Observación 1.6 *Como casos particulares del ejemplo anterior se tienen los espacios compactos y los espacios localmente compactos.*

Ejemplo 1.7 *Todo espacio topológico que satisfaga el primer axioma de numerabilidad está compactamente generado.*

Demostración 19 *Sea U un subconjunto de X tal que, para todo $K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}$,*

$$U \cap K \in \tau|_K$$

Se probará que U es abierto valiéndose del siguiente hecho: Si (X, τ) es un espacio primero numerable entonces $A \subseteq X$ es abierto según τ si y sólo si para toda sucesión de puntos de X, $\{x_n\}$, que tenga límite en algún $x \in A$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$, $\forall n \geq n_0$. Sea entonces $x \in U$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de X que converge a x; considérese el conjunto

$$K_0 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

K_0 es compacto, pues para toda cubierta abierta arbitraria $(A_r)_R$ de K_0 existe una subcubierta finita de K_0 dada por el abierto A_{r_x} que contiene a x (que ya contiene una infinidad de términos del conjunto K_0) y por el conjunto de abiertos de $(A_r)_R$ que cubren a los que están fuera del abierto A_{r_x} que son un número finito. Por lo tanto

$$U \cap K_0 \in \tau|_{K_0}$$

Y como la propiedad de ser primero numerable es hereditaria, entonces también es espacio primero numerable $(K_0, \tau|_{K_0})$. En consecuencia, para el abierto de K_0, $U \cap K_0$ se cumple la caracterización de abierto enunciada al principio de esta prueba. Por lo tanto, para la sucesión $\{x_n\}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U \cap K_0$, $\forall n \geq n_0$ $\therefore$ $x_n \in U$, $\forall n \geq n_0$. Por lo tanto $U \in \tau$.♦

El siguiente resultado enuncia otra forma de determinar a un espacio compactamente generado.

Teorema 1.4 *Sea (X,τ) cualquier espacio topológico; son equivalentes:*
a) (X,τ) está compactamente generado.
b) Si $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ es una función tal que $f|_K : K\to(Y,\sigma)$ es continua, para todo subespacio compacto K de (X,τ), entonces f es continua en (X,τ).

Demostración 20 *$(a)\Rightarrow(b)$: Por (a), es final el sumidero*

$$(\iota_K : (K,\tau|_K) \hookrightarrow (X,\tau))_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$$

Como además cada composición

$$f\iota_K : (K,\tau|_K) \to (Y,\sigma)$$

es continua, entonces una caracterización de sumidero final permite asegurar que f es continua.
$(b)\Rightarrow(a)$: Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ cualquier función tal que, para toda $K\in\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}$

$$f\iota_K : (K,\tau|_K) \to (Y,\sigma)$$

es continua. Por (b), f es continua; por lo tanto

$$(\iota_K : (K,\tau|_K) \hookrightarrow (X,\tau))_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$$

es un sumidero final. Luego, (X,τ) está compactamente generado.♦

Espacios conexamente generados.

Para todo espacio topológico (X,τ), la notación $\mathfrak{Conex}_{(X,\tau)}$ designará a la familia de subespacios conexos de (X,τ).

Definición 1.7 *Se dice que un espacio topológico (X,τ) está* ***conexamente generado*** *si es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios conexos de (X,τ).*

Ejemplo 1.8 *Todo espacio conexo está conexamente generado.*

Proposición 1.7 *Si (X,τ) es cualquier espacio topológico, son equivalentes:*
(a) (X,τ) está conexamente generado.
(b) Para todo $C\in\mathfrak{Conex}_{(X,\tau)}$, $U\in\tau \Leftrightarrow U\cap C\in\tau|_C$.♦

Proposición 1.8 *Sea (X,τ) cualquier espacio topológico; son equivalentes:*
(a) (X,τ) está conexamente generado.
(b) Toda componente conexa en (X,τ) es abierta.

Demostración 21 *$(a)\Rightarrow(b)$: Sea $x\in X$ y sea $c(x)$ su componente conexa. Se sabe por hipótesis, que los abiertos U en (X,τ) se caracterizan por la propiedad de que, para toda $C\in\mathfrak{Conex}_{(X,\tau)}$, $U\cap C\in\tau|_C$. Se probará que $c(x)$ satisface la propiedad anterior. Para ello tómese cualquier conexo $C\subseteq X$; para C no hay más que dos posibles casos en relación a x: tenerlo como elemento ó no tenerlo como elemento. Si $x\in C$, entonces $C\subseteq c(x)$, porque $c(x)$ es el máximo conexo que contiene a x; por lo tanto*

$$C\cap c(x) = C \in \tau|_C$$

Si $x\notin C$, entonces

$$C\cap c(x) = C \quad \text{ó} \quad C\cap c(x)=\emptyset$$

En ambos casos resulta $C\cap c(x)\in\tau|_C$. Consecuentemente, $c(x)\in\tau$. Por lo tanto toda componente conexa en X es abierta.
$(b)\Rightarrow(a)$: Sea $U\subseteq X$ no vacío tal que, para toda $C\in\mathfrak{Conex}_{(X,\tau)}$, $U\cap C\in\tau|_C$. Sea $x\in U$ y sea $c(x)$ la componente conexa de x; $c(x)$ es abierta por hipótesis, y también por hipótesis $U\cap c(x)$ es un abierto relativo a $c(x)$. Pero $U\cap c(x)\subseteq c(x)$ es abierto en $c(x)$ si y sólo si $U\cap c(x) = c(x)\cap V$ para algún $V\in\tau$. Por lo tanto $U\cap c(x)$ es la intersección de dos abiertos absolutos y es, por tanto, un abierto absoluto contenido en U que contiene a x. Por lo tanto, $U\in\tau$. Por lo tanto (X,τ) está conexamente generado.♦

Ejemplo 1.9 *Todo espacio localmente conexo está conexamente generado.*

Demostración 22 *Se quiere probar que si (X,τ) es localmente conexo y $U \subseteq X$ es tal que , para toda $C \in \mathfrak{Conex}_{(X,\tau)}$, $U \cap C \in \tau|_C$, entonces $U \in \tau$. Sea $x \in U$; por hipótesis se tiene que para cualquier vecindad V de x, existe una vecindad C de x conexa tal que $C \subseteq V$. Así, x posee una vecindad conexa C; se tiene entonces que $x \in U \cap C \in \tau|_C$, luego $U \cap C$ es una vecindad relativa de x contenida en C vecindad absoluta; pero $U \cap C$ es abierto en C si y sólo si $U \cap C = C \cap W$ para algún $W \in \tau$ $\therefore$ $U \cap C$ es la intersección de dos vecindades absolutas de x $\therefore$ $U \cap C$ es una vecindad absoluta de x contenida en U y esto significa que U es abierto en X. Por lo tanto (X,τ) está conexamente generado.*♦

1.3. Ejemplos de subcategorías bicorreflexivas

La subcategoría de los espacios finitamente generados es bicorreflexiva.

En efecto, debido a los resultados de las proposiciones 1.2 y 1.3, para cualquier espacio topológico (X,τ) se tiene la topología

$$\tau' = \{U \subseteq X : U \cap F \in \tau|_F \text{ },\forall F \in \mathfrak{Fin}_X\}$$

según la cual (X,τ') está finitamente generado; entonces, la función

$$1_X : (X,\tau') \to (X,\tau)$$

es continua, porque $\tau \subseteq \tau'$, y si $f : (W,\xi) \to (X,\tau)$ es cualquier función continua y (W,ξ) está finitamente generado, entonces $f : (W,\xi) \to (X,\tau')$ es la única función continua para la cual conmuta en $\mathfrak{Top}$ el diagrama

diagrama

Por lo que todo espacio topológico (X,τ) es correflejable en la subcategoría de los espacios finitamente generados. Para designar a esta subcategoría bicorreflexiva se empleará la notación $\underline{\mathbb{F}}$.

La subcategoría de los espacios compactamente generados es bicorreflexiva.

Análogamente, pero apoyándose en los resultados de las proposiciones 1.5 y 1.6, se tiene que la subcategoría de los espacios compactamente generados es bicorreflexiva; para designarla se empleará la notación $\underline{\mathbb{K}}$.

La subcategoría de los espacios conexamente generados es bicorreflexiva.

En efecto, dado un espacio topológico (X,τ), se puede considerar la familia

$$\tau' = \left\{U \subseteq X : \forall C \in \mathfrak{Conex}_{(X,\tau)}, U \cap C \in \tau|_C\right\}$$

en la que

$$\mathfrak{Conex}_{(X,\tau)} = \{C \subseteq X : C \text{ es conexo en } (X,\tau)\}$$

Es fácil ver que τ' resulta ser una topología para X más fina que τ, y que siempre que $f : (W,\xi) \to (X,\tau)$ sea una función continua tal que (W,ξ) esté conexamente generado, entonces $f : (W,\xi) \to (X,\tau')$ es continua. De aquí se sigue que la categoría de los espacios conexamente generados (que se denotará por $\underline{\mathbb{C}}$) es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.

Para ver que la subcategoría de los espacios localmente conectables por trayectorias es otro ejemplo no trivial de subcategoría bicorreflexiva, se probarán los resultados siguientes.

Proposición 1.9 *Si (X,τ) es un espacio topológico, son equivalentes:*
(a) (X,τ) es localmente conectable por trayectorias.
(b) Las componentes por trayectorias de cualquier abierto A de X son abiertas.
(c) τ posee una base cuyos elementos son conectables por trayectorias.

Demostración 23 $(a) \Rightarrow (b)$: *Sean $a \in A$ y $A \in \tau$ arbitrarios y sea $x \in c_A(a)$ también arbitrario. Por (a) y puesto que $x \in A$ existe una vecindad N de x que es conectable por trayectorias y tal que $N \subseteq A$. Puesto que el máximo subespacio conectable por trayectorias de $(A,\tau|_A)$ que tiene a x es $c_A(x)$, se tiene que $N \subseteq c_A(x)$. Pero*

$x \in c_A(x) \cap c_A(a)$. Por lo tanto $N \subseteq c_A(a) = c_A(x)$. Esto significa que $c_A(a)$ es abierto.
$(b) \Rightarrow (c)$: Sea

$$\beta_X = \{c_A(a) : A \in \tau \text{ y } a \in A\}$$

la familia de componentes por trayectorias de abiertos de (X, τ). Por (b) $\beta_X \subseteq \tau$; además se sabe que todo abierto A de X se ve partido en las componentes por trayectorias $c_A(a)$, $a \in A$. Esto implica que β_X es una base de τ cuyos miembros son conectables por trayectorias.
$(c) \Rightarrow (a)$: Si $\beta \subseteq \tau$ es base de conectables por trayectorias es fácil ver que haciendo para todo $x \in X$,

$$\beta_x = \{B \in \beta : x \in B\}$$

se obtienen bases locales de vecindades conectables por trayectorias. Por lo tanto (X, τ) es un espacio localmente conectable por trayectorias.⧫

Lema 1.1 *Si $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es continua y $y \in f(X)$ entonces $f^{-1}(c(y))$ es unión de componentes por trayectorias de (X, τ).*

Demostración 24 *Puesto que $y \in f(X)$, $f^{-1}(c(y)) \neq \emptyset$. Si $x \in f^{-1}(c(y))$ entonces*

$$f(c(x)) \cap c(y) \neq \emptyset$$

Pero $f(c(x))$ es conectable por trayectorias; en consecuencia también

$$f(c(x)) \cup c(y)$$

es conectable por trayectorias y, además, tiene a y. Esto y el hecho de ser $c(y)$ el máximo subespacio conectable por trayectorias de (Y, σ) que contiene a y, implica que

$$f(c(x)) \subset c(y)$$

Pero entonces

$$c(x) \subset f^{-1}(c(y))$$

y recuérdese que esto ocurre para toda $x \in f^{-1}(c(y))$, debido a lo cual se tiene que

$$\bigcup_{x \in f^{-1}(c(y))} c(x) \subseteq f^{-1}(c(y))$$

Finalmente , para toda $x \in f^{-1}(c(y))$, es claro que

$$x \in \bigcup_{x \in f^{-1}(c(y))} c(x)$$

Por lo tanto

$$f^{-1}(c(y)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(c(y))} c(x)$$

con lo que el lema queda demostrado.⧫

La subcategoría de los espacios localmente conectables por trayectorias, $\underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}}$, es bicorreflexiva.

Teorema 1.5 *Si (X, τ) es un espacio topológico arbitrario y τ' es la topología para X cuya base consta de las componentes por trayectorias de los abiertos de (X, τ) entonces*

$$1_X : (X, \tau') \to (X, \tau)$$

es una correflexión de (X, τ) en la subcategoría de los espacios localmente conectables por trayectorias.

Demostración 25 *(i) Por (c) de la proposición anterior, (X, τ') es localmente conectable por trayectorias.*
(ii) Sea $f : (W, \omega) \to (X, \tau)$ cualquier función continua en la que (W, ω) es localmente conectable por trayectorias; hay que demostrar que $f : (W, \omega) \to (X, \tau')$ es continua: Sea B un abierto básico de τ'. Entonces B es una componente por trayectorias de un abierto A de (X, τ). Puesto que $f : (W, \omega) \to (X, \tau)$ es continua, $f^{-1}(A)$ es abierto en (W, ω). Al ser (W, ω) localmente conectable por trayectorias, las componentes por trayectorias de $f^{-1}(A)$ son abiertas en (W, ω). Se sabe, por el lema anterior, que $f^{-1}(B)$ es unión de componentes por trayectorias de $f^{-1}(A)$, pues

$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A)$. Por lo que $f^{-1}(B)$ es abierto y por lo tanto $f : (W, \omega) \to (X, \tau')$ es continua.
(iii) Por otra parte, puesto que todo $A \in \tau$ es unión de las componentes por trayectorias de A, entonces también es abierto según τ', es decir, τ' es más fina que τ. Esto implica que

$$1_X : (X, \tau') \to (X, \tau)$$

es continua. En consecuencia, $f : (W, \omega) \to (X, \tau')$ es la única función continua para la cual conmuta en $\mathfrak{Top}$ el diagrama

diagrama

Por lo tanto,

$$1_X : (X, \tau') \to (X, \tau)$$

es una correflexión de (X, τ) en la subcategoría de los espacios localmente conectables por trayectorias.♦

Del teorema anterior se desprenden dos resultados que serán de gran utilidad en la prueba del teorema **??** del capítulo cuarto.

Corolario 1.2 *Si $\mathcal{S} = \left((X_\lambda, \tau_\lambda) \overset{f_\lambda}{\to} (X, \tau)\right)_\Lambda$ es un $\mathfrak{Top}$-sumidero final cuyo dominio $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es una familia de espacios localmente conectables por trayectorias, entonces también (X, τ) es localmente conectable por trayectorias.*

Demostración 26 *Sea τ' una topología cuya base está formada por las componentes por trayectorias de los abiertos de (X, τ); entonces (X, τ') es localmente conectable por trayectorias y $1_X : (X, \tau') \to (X, \tau)$ es una correflexión de (X, τ) en la subcategoría de los espacios localmente conectables por trayectorias. Por otro lado, puesto que para toda $\lambda \in \Lambda$, el espacio $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ es localmente conectable por trayectorias, entonces para toda flecha del sumidero $\mathcal{S}$ existe una única función continua $g_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau')$ tal que $1_X g_\lambda = f_\lambda$. Pero $1_X g_\lambda = g_\lambda$; luego $g_\lambda = f_\lambda$ y, por lo tanto,*

$$f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau')$$

es continua para toda $\lambda \in \Lambda$. En consecuencia, toda composición

$$f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \overset{f_\lambda}{\to} (X, \tau) \overset{1_X^{-1}}{\to} (X, \tau')$$

es continua; por la finalidad de $\mathcal{S}$ esto implica que también la identidad inversa 1_X^{-1} es continua y, por lo tanto (X, τ) y (X, τ') son homeomorfos. En consecuencia (X, τ) es localmente conectable por trayectorias, como se quería demostrar.♦

Corolario 1.3 *Los coproductos y cocientes de espacios localmente conectables por trayectorias son localmente conectables por trayectorias.*

Demostración 27 *Si $\coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$ es el coproducto de una familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de espacios localmente conectables por trayectorias entonces las coproyecciones*

$$m_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to \coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$$

forman un sumidero final[4]. Si $p : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es identificación entonces $\{p\}$ es un sumidero final.♦

1.4. Caracterización de las subcategorías bicorreflexivas

Esta sección se dedicará a dar una importante caracterización de las subcategorías bicorreflexivas que permitirá manejarlas de una manera más simple. El primer lema de esta sección describe una característica importante de estas subcategorías y es que son cerradas bajo la formación de retracciones; para verlo, se requieren las siguientes dos proposiciones.

Proposición 1.10 *Si $r : X \to Y$ es una retracción y $r = gf$, donde*

$$f : X \to Z \quad \text{y} \quad g : Z \to Y$$

son continuas, entonces g es una retracción.

[4] Véase el inciso (b) del lema **??**

Demostración 28 *Como r es retracción existe una función continua $s : Y \to X$ tal que $rs = 1_Y$; puesto que $r = gf$, entonces*

$$1_Y = rs = gfs$$

es decir, fs es un inverso derecho continuo de la función g. Luego g es retracción.♦

Proposición 1.11 *Toda retracción inyectiva es homeomorfismo.*

Demostración 29 *Sea $r : X \to Y$ una retracción inyectiva arbitraria. Por ser retracción existe una función continua $s : Y \to X$ tal que $rs = 1_Y$. Obviamente r es suprayectiva ya que si $y \in Y$ es arbitrario, entonces por lo anterior, existe $s(y) \in X$ tal que $r(s(y)) = y$. En consecuencia, r es una función continua, biyectiva que posee un inverso derecho (pero entonces también izquierdo) continuo; es decir, r es homeomorfismo.*♦.

Se dice que una subcategoría $\underline{\mathbf{A}}$ de $\mathfrak{Top}$ **está cerrada bajo la formación de retracciones (ó de cocientes)** si el hecho de que $r : A \to B$ sea una retracción (ó un cociente) con $A \in \underline{\mathbf{A}}$ implica que $B \in \underline{\mathbf{A}}$.

Lema 1.2 *Toda subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ está cerrada bajo la formación de retracciones.*

Demostración 30 *Sean, $\underline{\mathbf{A}}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva, A un $\underline{\mathbf{A}}$-espacio y*

$$r : A \to X$$

una retracción arbitraria. Si $c_X : A' \to X$ es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de X, entonces existe una función única y continua $f : A \to A'$ que hace que conmute en $\mathfrak{Top}$ al diagrama

diagrama

Por la proposición 1.10, c_X también es retracción, y al ser inyectiva se tiene, por la proposición anterior, que es un homeomorfismo, de modo que $X \in \underline{\mathbf{A}}$. ♦

Otras formas para determinar si una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ es o no es bicorreflexiva se establecen en dos resultados siguientes.

Observación 1.7 *Nótese que*

$$\underline{\mathbf{A}} = \{X \in \mathfrak{Top} : X \text{ es discreto o indiscreto}\}$$

es una subcategoría que no es bicorreflexiva.

(a) $\underline{\mathbf{A}}$ *es una subcategoría de* $\mathfrak{Top}$: Sean $X \in \underline{\mathbf{A}}$ y $h : X \to A$ un homeomorfismo:
(i) Si X es discreto, entonces $\{h(x)\}$ es abierto en A, para toda $x \in X$, porque h es abierta. Pero $\{h(x) : x \in X\} = \{a : a \in A\}$ pues es biyectiva. Luego $\{a\}$ es abierto en A, para toda $a \in A$ $\therefore$ A es discreto y $A \in \underline{\mathbf{A}}$.
(ii) Si X es indiscreto y U es abierto no vacío de A, entonces $h^{-1}(U) = X$ y, debido a la biyectividad de h, $U = A$ $\therefore$ A es indiscreto y $A \in \underline{\mathbf{A}}$.

(b) $\underline{\mathbf{A}}$ *no es bicorreflexiva:* Sea (X, τ) un espacio topológico no vacío que no sea discreto ni indiscreto. De acuerdo con la observación 1.4, si $\underline{\mathbf{A}}$ fuera bicorreflexiva, para (X, τ) tendría que haber una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de la forma 1_X; por la forma que se ha tomado el espacio (X, τ), el dominio indiscreto para 1_X queda descartado y sólo resta examinar el caso en que

$$1_X : (X, \tau_d) \to (X, \tau)$$

tiene dominio discreto. Sea $B \in \underline{\mathbf{A}}$ un espacio indiscreto y supóngase que $f : B \to (X, \tau)$ es continua sin ser constante; entonces $|f(B)| > 1$, lo cual hace imposible que $f : B \to (X, \tau_d)$ sea continua, siendo f la única función que puede hacer conmutar el diagrama:

diagrama ♦

Antes de ver la otra forma de determinar si una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ es bicorreflexiva será necesario contar con el siguiente resultado.

Proposición 1.12 *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua y suprayectiva arbitraria. Entonces existen, un cociente $p : (X, \tau) \to (Z, \rho)$ y una función continua y biyectiva $h : (Z, \rho) \to (Y, \sigma)$ tales que $f = hp$ (f y p tienen las mismas fibras).*

Demostración 31 *Sea* $\sim_f$ *la relación de equivalencia en* X *definida para cualesquiera puntos* $x_1, x_2 \in X$ *mediante*

$$x_1 \sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Denotando por $X/\!\sim_f$ *a la familia de clases de equivalencia de esta relación, considérese la proyección canónica*

$$\begin{array}{rccc} p: & X & \to & X/\!\sim_f \\ & x & \mapsto & [x] \end{array}$$

Asignando a $X/\!\sim_f$ *la topología final* $\widetilde{\tau}$ *correspondiente a* p *y a* τ*, se obtiene el cociente*

$$p : (X, \tau) \to (X/\!\sim_f, \widetilde{\tau})$$

Sea

$$h : (X/\!\sim_f, \widetilde{\tau}) \to (Y, \sigma)$$

definida como

$$h[x] = f(x)$$

Entonces h *es una función bien definida porque*

$$[x] = [y] \Rightarrow x \sim_f y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

Por lo tanto, $f(x)$ *es independiente del representante* x *de la clase* $[x]$ *que se elija. Por otro lado,*

$$(hp)(x) = h(p(x)) = h[x] = f(x)$$

para toda $x \in X$*.*

$$\therefore \ f = hp$$

Ahora se verá que h *es inyectiva. Supóngase que* $[x], [y] \in X/\!\sim_f$ *son tales que*

$$h[x] = h[y];$$

entonces $f(x) = f(y)$*, lo cual significa que* $x \sim_f y$ *y, por lo tanto,* $[x] = [y]$*. Además,* h *es suprayectiva, pues como* f *es suprayectiva, para toda* $y \in Y$ *existe* $x \in X$ *tal* $f(x) = y$*, o lo que es lo mismo,* $h(p(x)) = y$*; es decir, para toda* $y \in Y$ *existe* $p(x) \in X/\!\sim_f$ *tal que* $h(p(x)) = y$*. Por esto y por lo anterior,* h *es una función biyectiva. Sólo resta probar que* h *es continua. En efecto, el hecho de que la composición* hp *sea continua y de que* p *sea un cociente implican que* h *es continua. En consecuencia,* h *es continua y biyectiva y* p *es un cociente tales que:*

diagrama ♦

Teorema 1.6 *Sea* $\underline{\mathbf{A}}$ *cualquier subcategoría bicorreflexiva de* $\mathfrak{Top}$*. Entonces:*
(a) $\underline{\mathbf{A}}$ *está cerrada bajo la formación de cocientes.*
(b) $\underline{\mathbf{A}}$ *está cerrada bajo la formación de coproductos.*

Demostración 32 (a)*. Sea* $g : A \to X$ *cualquier cociente, con* $A \in \underline{\mathbf{A}}$*; si*

$$c_X : A' \to X$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$*-correflexión de* X*, entonces existe* $f : A \to A'$ *continua tal que*

diagrama

Pero entonces c_X^{-1} *es continua porque lo es* $c_X^{-1} g$ *y* g *es un cociente. Por lo tanto,* c_X *es un homeomorfismo y* $X \in \underline{\mathbf{A}}$*.*

Demostración 33 (b)*. Sea* $(\eta_i : A_i \to X)_I$ *un coproducto, donde* $A_i \in \underline{\mathbf{A}}, \forall i \in I$*; hay que probar que* $X \in \underline{\mathbf{A}}$*. Sea* $c_X : A \to X$ *una* $\underline{\mathbf{A}}$*-correflexión de* X*; entonces para toda* $i \in I$ *existe* $f_i : A_i \to A$ *continua tal que* $c_X f_i = \eta_i$*. Por la definición de coproducto existe una función continua* $g : X \to A$ *tal que* $g\eta_i = f_i, \forall i \in I$*; entonces* $c_X g : X \to X$ *es una función continua tal que*

$$(c_X g)\,\eta_i = c_X(g\eta_i) = c_X f_i = \eta_i$$

Pero al ser $(\eta_i)_I$ *un coproducto,* 1_X *es la única función continua que hace conmutar al triángulo*

diagrama

Por lo tanto, $c_X g = 1_X$*. Esto implica que* g *(que es continua) es la función inversa de* c_X*. Por lo tanto,* c_X *es un homeomorfismo; por lo tanto,* $X \in \underline{\mathbf{A}}$*.*♦

La más importante caracterización de las subcategorías bicorreflexivas es la enunciada en el siguiente teorema.

Teorema 1.7 *Sea $\underline{\mathbf{A}}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ con elementos no vacíos. Son equivalentes:*
a) $\underline{\mathbf{A}}$ es bicorreflexiva.
b) $\underline{\mathbf{A}}$ está cerrada bajo la formación de cocientes y coproductos.

Demostración 34 $(a) \Rightarrow (b)$*: Es el teorema anterior.*
$(b) \Rightarrow (a)$*: Sea X cualquier espacio topológico. Si $X = \varnothing$, entonces $X \in \underline{\mathbf{A}}$ porque $\varnothing$ es coproducto de cualquier familia vacía de $\underline{\mathbf{A}}$-espacios. Supóngase X no vacío. Sea $\mathcal{S} = (f_i : A_i \to X)_I$ el sumidero de todas las funciones continuas de elementos de $\underline{\mathbf{A}}$ en X. Hay que probar que existe una función continua $h : A \to X$, con $A \in \underline{\mathbf{A}}$, y que para cada miembro de $\mathcal{S}$ existe una única función continua $g_i : A_i \to A$ tal que $hg_i = f_i$. Sea $(\eta_i : A_i \to C)_I$ el coproducto de $(A_i)_I$; por (b), $C \in \underline{\mathbf{A}}$, y por tratarse de un coproducto existe una única función continua $f : C \to X$ tal que $f\eta_i = f_i$, $\forall i \in I$; por lo tanto, f es suprayectiva*[5]*. Por la proposición 1.12 existen, un cociente $g : C \to Z$ y una biyección continua $h : Z \to X$ tales que $f = hg$; al factorizar a f, que es única, también estas funciones son únicas. Haciendo $A = Z$ se tiene, debido a (b), que $A \in \underline{\mathbf{A}}$, y haciendo $g_i = g\eta_i$ se finaliza porque entonces $f_i = hg_i$, $\forall i \in I$.* ♦

Así, queda hecha la descripción de las subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$; son aquéllas que se encuentran cerradas bajo la formación de cocientes y coproductos.

1.5. Descripción de la subcategoría bicorreflexiva generada

Observación 1.8 *Obsérvese que si $\left(\underline{A_i}\right)_I$ es una familia arbitraria de subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$, entonces la intersección*

$$\underline{\mathbf{A}} = \bigcap \underline{A_i}$$

también es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.

Demostración 35 *En efecto, $\underline{\mathbf{A}}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ ya que si para algún $X \in \mathfrak{Top}$ existe $A \in \underline{\mathbf{A}}$ tal que A es homeomorfo a X, entonces $X \in \underline{A_i}$, para toda $i \in I$ y, por lo tanto, $X \in \underline{\mathbf{A}}$. Además, si $A \in \underline{\mathbf{A}}$ y*

$$q : A \to X$$

es una aplicación cociente entonces, para toda $i \in I$, $X \in \underline{A_i}$, por ser $\underline{A_i}$ una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$; por consiguiente, $\underline{\mathbf{A}}$ está cerrada bajo la formación de cocientes. Finalmente, si $(A_j)_J$ es una familia cualquiera de miembros de $\underline{\mathbf{A}}$ y $\left(A_j \xrightarrow{\eta_j} X\right)_J$ es un coproducto suyo, entonces $A_j \in \underline{A_i}$, para toda $j \in J$ y para toda $i \in I$, y por lo tanto, $X \in \underline{A_i}$, para toda $i \in I$; o sea que $\underline{\mathbf{A}}$ también está cerrada bajo la formación de coproductos. Por lo tanto, $\underline{\mathbf{A}}$ es correflexiva.♦

Esta observación confirma la existencia de la subcategoría bicorreflexiva más chica.

En vista de que $\mathfrak{Top}$ misma es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ y de la observación anterior, toda subcategoría $\underline{\mathbf{A}}$ de $\mathfrak{Top}$ se encuentra contenida en una correflexiva mínima que es **la subcategoría correflexiva generada por $\underline{\mathbf{A}}$** :

$$\bigcap \{\underline{B} \subseteq \mathfrak{Top} : \underline{B} \text{ es correflexiva y } \underline{A} \subseteq \underline{B}\}$$

Para una descripción de esta subcategoría en términos de $\underline{\mathbf{A}}$ convendrá contar con el siguiente resultado.

Lema 1.3 *Sean*

$$\left(A_i \overset{\upsilon_i}{\to} A\right)_I \text{ y } \left(X_i \overset{\nu_i}{\to} X\right)_I$$

coproductos topológicos arbitrarios. Si para toda $i \in I$ existe una aplicación cociente

$$c_i : A_i \to X_i$$

entonces la única función continua $c : A \to X$ que para toda $i \in I$ hace conmutar el diagrama

diagrama

también es una aplicación cociente.

[5] Aclárase esto al pensar que en $\mathcal{S}$ se hallan cada una de las constantes de valor $x, \forall x \in X$.

Demostración 36 *La continuidad de c viene dada por la propiedad universal del coproducto topológico que posee $(\upsilon_i)_I$. Por otra parte, puesto que las coproyecciones $(\nu_i)_I$ son flechas de un episumidero*[6]*, dado cualquier $x \in X$ existen $i \in I$ y $x_i \in X_i$ tales que $\nu_i(x_i) = x$; y puesto que para esa i, c_i es suprayectiva, también existe $a_i \in A_i$ tal que $c_i(a_i) = x_i$. Entonces, $\upsilon_i(a_i)$ es un punto de A que es preimagen de x bajo c, ya que, en vista de la conmutatividad del diagrama anterior, se tiene que*

$$c(\upsilon_i(a_i)) = \nu_i(c_i(a_i)) = \nu_i(x_i) = x$$

lo cual prueba que c es suprayectiva. Supóngase, finalmente, que $g : X \to Y$ es una función tal que la composición $gc : A \to Y$ es continua. Entonces también será continua, para toda $i \in I$, la composición

$$gc\upsilon_i = g\nu_i c_i$$

puesto que c_i es una aplicación cociente, esto implica que $g\nu_i$ es continua, para toda $i \in I$. Pero

$$\left(X_i \xrightarrow{\nu_i} X\right)_I$$

es un sumidero final; en consecuencia, también g es continua, y por lo tanto, c es una aplicación cociente, como se quería demostrar.♦

Teorema 1.8 *Sea $\underline{\mathbf{A}}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ arbitraria. Entonces*

$$\widetilde{\underline{\mathbf{A}}} = \{X \in \mathfrak{Top} : X \text{ es espacio cociente de un coproducto de elementos de } \underline{\mathbf{A}}\}$$

es la subcategoría correflexiva generada por $\underline{\mathbf{A}}$.

Demostración 37 (a) *Supóngase que $Y \in \mathfrak{Top}$ es un espacio homeomorfo a algún $X \in \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$; sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Puesto que para X existe una aplicación cociente*

$$c : A \to X$$

de un coproducto A de elementos de $\underline{\mathbf{A}}$, se tiene que

$$hc : A \to Y$$

también es una aplicación cociente, y por lo tanto, también $Y \in \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$. Esto prueba que $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$. De modo más general: dados $X \in \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ y una aplicación cociente $q : X \to Y$, puesto que para X existe la aplicación cociente c mencionada arriba, se tiene que

$$qc : A \to Y$$

también es una aplicación cociente, y por lo tanto, también $Y \in \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$. Esto prueba que $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ está cerrada bajo la formación de cocientes.
Por otro lado, si $(X_i)_I$ es una familia de elementos de $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ y

$$\left(X_i \xrightarrow{\nu_i} X\right)_I$$

es un coproducto suyo, entonces se tiene que para toda $i \in I$ existe una aplicación cociente

$$c_i : A_i \to X_i$$

en la que cada A_i es un coproducto de una familia $(A_{ij})_{j \in J_i}$ de elementos de $\underline{\mathbf{A}}$. Para toda $i \in I$ considérense explícitamente las coproyecciones del coproducto A_i correspondiente:

$$\left(A_{ij} \xrightarrow{u_{ij}} A_i\right)_{J_i}$$

Sea

$$A = \coprod_{\substack{i \in I \\ j \in J_i}} A_{ij}$$

[6] Proposición 1.1

entonces A es un coproducto de elementos de $\underline{\mathbf{A}}$; supóngase que las coproyecciones de este coproducto son

$$\left(A_{ij} \xrightarrow{w_{ij}} A\right)_{J_i,\ I}$$

Si de estas coproyecciones se consideran solamente aquellas w_{ij} con i fija y con $j \in J_i$, se tendrá, aplicando la propiedad universal del coproducto topológico, que para esta i fija (que es cualquiera) existe una única función continua

$$u_i : A_i \to A$$

que hace conmutar el diagrama

diagrama

Obsérvese que

$$\left(A_i \xrightarrow{u_i} A\right)_I$$

es un coproducto. En efecto, dada cualquier familia de funciones continuas

$$\left(A_i \xrightarrow{g_i} B\right)_I$$

puede considerarse la familia de composiciones

$$\left(A_{ij} \xrightarrow{g_i u_{ij}} B\right)_{J_i,\ I}$$

y asegurar que existe una única función continua

$$f : A \to B$$

tal que

$$f w_{ij} = g_i u_{ij}$$

pero entonces se tiene que

$$f u_i u_{ij} = g_i u_{ij}$$

y puesto que $(u_{ij})_{J_i}$ es un episumidero, esto implica que

$$f u_i = g_i$$

y por lo tanto el sumidero $(u_i)_I$ satisface la propiedad universal del coproducto topológico. Así que están dadas las condiciones del lema anterior y, por consiguiente, la única función continua

$$c : A \to X$$

que hace conmutar el diagrama

diagrama

es una aplicación cociente. Así, X ha venido a ser espacio cociente de un coproducto de elementos de $\underline{\mathbf{A}}$. Por lo tanto $X \in \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}$ y $\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}$ está cerrada bajo la formación de coproductos. Esto, aunado a lo anterior, demuestra que $\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.

Por otra parte

$$\underline{\mathbf{A}} \subseteq \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}$$

porque para todo $A \in \underline{\mathbf{A}}$, A es espacio cociente del coproducto A de la familia cuyo único elemento es $A \in \underline{\mathbf{A}}$. Además si $\underline{\mathbf{A}} \subseteq \underline{\mathbf{B}}$ y $\underline{\mathbf{B}}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$, $\underline{\mathbf{B}}$ contendrá los coproductos de miembros de $\underline{\mathbf{A}}$ y (por estar cerrada bajo la formación de cocientes) también a todos los cocientes de estos coproductos; es decir

$$\underline{\widetilde{\mathbf{A}}} \subseteq \underline{\mathbf{B}}$$

Esto prueba que $\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}$ es la mínima subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ que contiene a $\underline{\mathbf{A}}$, tal como se quería probar.⧫

1.6. Bicorreflexivas generadas y jerarquía de bicorreflexivas

Ejemplo 1.10 *Como un primer ejemplo de subcategoría correflexiva generada, se tiene a la generada por la subcategoría vacía $\underline{\emptyset}$. Puesto que $\underline{\{\emptyset\}}$ es la subcategoría correflexiva más chica de $\mathfrak{Top}$, y puesto $\underline{\emptyset} \subset \underline{\{\emptyset\}}$, resulta que*

$$\widetilde{\underline{\emptyset}} = \underline{\{\emptyset\}}$$

Ejemplo 1.11 *La subcategoría $\underline{\mathbb{D}}$ de los espacios discretos es la subcategoría bicorreflexiva generada por la subcategoría de los espacios singulares.*

Demostración 38 *Sea*

$$\underline{A}_m = \{(X_\lambda, \tau_\lambda) \in \mathfrak{Top} : X_\lambda = \{x_\lambda\} \text{ ó } X_\lambda = \emptyset,\ \lambda \in \Lambda\}$$

siendo Λ cierta clase de índices. Sin que se pierda generalidad se puede suponer que si $\lambda \neq \lambda'$ entonces $\{x_\lambda\} \neq \{x_{\lambda'}\}$; esto simplificará la unión ajena sobre subclases de Λ a uniones corrientes. Siendo $\widetilde{\underline{A}_m}$ la subcategoría bicorreflexiva generada por $\underline{A}_m$, se tiene que a $\widetilde{\underline{A}_m}$ la forman cocientes de coproductos de miembros de $\underline{A}_m$. Sea I una subclase arbitraria de Λ y considérese el coproducto

$$(X, \tau) = \coprod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$$

Entonces τ es final para $\{x_i : i \in I\} = X$ con respecto al sumidero de inclusiones

$$\left((X_i, \tau_i) \overset{\iota_i}{\hookrightarrow} X\right)_I$$

En consecuencia, cualquiera que sea $J \subseteq I$, para el subconjunto de X

$$U = \{x_j : j \in J\}$$

para toda $i \in I$ se tiene que

$$\iota_i^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset, & si\ i \notin J \\ \{x_i\}, & si\ i \in J \end{cases}$$

de modo que en cualquier caso $\iota_i^{-1}(U) \in \tau_i$; esto significa, debido a la definición de topología final para un sumidero, que $U \in \tau$. Por lo tanto, (X, τ) es un espacio discreto. Por otra parte, puesto que el espacio cociente de todo espacio discreto también es discreto, resulta que todo miembro de $\widetilde{\underline{A}_m}$ es discreto. Recíprocamente, si (X, τ) es un espacio discreto y haciendo, para toda $x_\lambda \in X$

$$X_\lambda = \{x_\lambda\} \quad y \quad \tau_\lambda = \tau|_{X_\lambda}$$

es claro que

$$\left((X_\lambda, \tau_\lambda) \overset{\iota_\lambda}{\hookrightarrow} (X, \tau)\right)_\Lambda$$

es un sumidero final de inclusiones y, por lo tanto, (X, τ) es un coproducto de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ de $\underline{A}_m$-espacios y, por lo tanto, $(X, \tau) \in \widetilde{\underline{A}_m}$. Esto demuestra que

$$\widetilde{\underline{A}_m} = \underline{\mathbb{D}}. \blacklozenge$$

Ejemplo 1.12 *Sea $\underline{\mathbb{I}_2}$ la subcategoría de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son todos los espacios indiscretos con dos puntos; tiene sentido pensar en la subcategoría bicorreflexiva $\widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$ generada por $\underline{\mathbb{I}_2}$.*

Sea $A \in \widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$; entonces existe una familia $(X_\lambda)_\Lambda$ de $\underline{\mathbb{I}_2}$-espacios y una aplicación cociente

$$p : \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to A$$

Sea U un abierto arbitrario de A; entonces $p^{-1}(U)$ es abierto en $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, por lo que para toda inclusión ι_λ se tiene que

$$\iota_\lambda^{-1}\left(p^{-1}(U)\right)$$

es abierto en X_λ. Debido a la indiscreción de los espacios X_λ, esto implica que sea cual sea $\lambda \in \Lambda$, sólo hay dos posibles casos:

$$p^{-1}(U) \cap X_\lambda = \varnothing \quad \text{ó} \quad p^{-1}(U) \cap X_\lambda = X_\lambda$$

En caso de darse la primera situación, resulta que

$$p^{-1}(A-U)\cap X_\lambda = \left[\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda - p^{-1}(U)\right]\cap X_\lambda = X_\lambda$$

en tanto que al presentarse el segundo caso, se tiene que

$$p^{-1}(A-U)\cap X_\lambda = \left[\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda - p^{-1}(U)\right]\cap X_\lambda = \varnothing$$

Debido a que la topología de $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es final con respecto al sumidero

$$\left(\iota_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)_\Lambda$$

lo anterior implica que $p^{-1}(A-U)$ es abierto en $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$; y como también la topología de A es final respecto a p y a la topología de $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, se tiene que $A-U$ también es abierto en A y, por lo tanto, U es cerrado. Queda demostrado, entonces, que en los espacios miembros de $\widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$ todo subconjunto abierto es cerrado.

Los espacios que tienen esta propiedad de que todo abierto suyo es cerrado se llaman **espacios localmente indiscretos**. Se puede demostrar que en $\widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$ se hallan todos los espacios localmente indiscretos (véase [**?**][**?**][7]). Estos espacios, por lo tanto, constituyen una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ a la que se suele denotar mediante $\underline{\mathbb{I}_\mathbb{L}}$ y que, de acuerdo con todo esto, es

$$\underline{\mathbb{I}_\mathbb{L}} = \widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$$

La siguiente proposición es verdadera, pero su demostración no se verá aquí (véase [**?**][8]).

Proposición 1.13 *Toda subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ distinta de $\underline{\mathbb{D}}$ tiene entre sus elementos a los espacios indiscretos de dos puntos.*♦

Como consecuencia de la proposición anterior se puede asegurar que $\underline{\mathbb{I}_\mathbb{L}}$ es la subcategoría bicorreflexiva inmediatamente superior a $\underline{\mathbb{D}}$ según el orden dado por la contención $\subseteq$ entre categorías; esta situación entre $\underline{\mathbb{D}}$ e $\underline{\mathbb{I}_\mathbb{L}}$ quedará indicada escribiendo

$$\underline{\mathbb{D}} \sqsubset \underline{\mathbb{I}_\mathbb{L}}.\ \blacklozenge$$

Ejemplo 1.13 *Sea S el espacio de Sierpinski y considérese la clase de espacios*

$$\Sigma = \{A_\lambda \in \mathfrak{Top} : \lambda\in\Lambda \ y \ A_\lambda \cong S\}$$

siendo Λ una clase de índices tal que si $B\in\mathfrak{Top}$ es homeomorfo a S, entonces existe $\lambda\in\Lambda$ tal que $A_\lambda = B$. No se pierde generalidad si, siendo $A_\lambda = (X_\lambda, \sigma_\lambda)$, con

$$X_\lambda = \{x_\lambda, x'_\lambda\} \quad y \quad \sigma_\lambda = \{X_\lambda, \{x_\lambda\}, \varnothing\}$$ [9]

se supone que

$$X_\lambda \cap X_{\lambda'} = \varnothing, \forall \lambda \neq \lambda'$$

Es claro que mediante Σ queda configurada una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ que será denotada mediante $\underline{\Sigma}$. Sea I una subclase arbitraria de Λ y considérese el coproducto de la familia $(A_i)_I$

$$\coprod_{i\in I} A_i = (X,\sigma)\,;$$

entonces

$$X = \bigcup_{i\in I} X_i$$

y σ es final para X con respecto al sumidero de inclusiones

$$(\iota_i : (X_i,\sigma_i) \hookrightarrow X)_I$$

[7] Véase de Enrique Bazúa: *$\underline{A}_\mathcal{H}$-correflexiones y fibraciones de Hurewicz* en www.red-mat.unam.mx
[8] Véase de Enrique Bazúa: *$\underline{A}_\mathcal{H}$-correflexiones y fibraciones de Hurewicz* en www.red-mat.unam.mx
[9] Ntese que el punto aislado en cada A_λ est siendo designado por la equis correspondiente (x_λ) sin apstrofe.

Lema 1.4 *Considérese el espacio (X,σ) del ejemplo anterior. Para todo $U \in \sigma$ que para cierta $i_0 \in I$ tenga entre sus elementos a $x'_{i_0} \in X_{i_0}$, tendrá también al punto aislado x_{i_0}.*

Demostración 39 *Supóngase que esto no es cierto y que existe $U \in \sigma$ y cierta $i_0 \in I$ tales que*

$$x'_{i_0} \in U \quad y \quad x_{i_0} \notin U$$

Obsérvese que para toda $i \in I$, $X_i \subseteq X$ satisface la condición de membresía de σ; en particular se tiene que

$$X_{i_0} \in \sigma$$

Pero entonces, puesto que U es abierto en X,

$$\left\{x'_{i_0}\right\} = U \cap X_{i_0} \in \sigma$$

lo cual implica (por ser σ final respecto al sumidero $(\iota_i)_I$) que para toda $i \in I$

$$\iota_i^{-1}\left\{x'_{i_0}\right\} \in \sigma_i$$

En particular

$$\left\{x'_{i_0}\right\} = \iota_{i_0}^{-1}\left\{x'_{i_0}\right\} \in \sigma_{i_0}$$

Pero de acuerdo con la definición que se dio de las topologías σ_λ, se tiene que $\{x_{i_0}\} \in \sigma_{i_0}$; entonces (X_{i_0}, σ_{i_0}) es discreto y no de Sierpinski $\underset{\circ}{\nabla}$ ♦

Considérese ahora una familia arbitraria $(U_j)_J$ de abiertos en σ. En cuanto a su intersección $U = \bigcap\limits_{j\in J} U_j$, hay dos posibles casos:
1º Que U sea vacía, en cuyo caso $U \in \sigma$.
2º Supóngase que $U \neq \varnothing$; sea $x \in U$. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que

$$x = x_{i_0} \quad \text{ó} \quad x = x'_{i_0}$$

Si $x = x_{i_0}$, entonces

$$\{x\} = \{x_{i_0}\} \in \sigma_{i_0}$$

y se tiene que para toda $i \in I$

$$\iota_i^{-1}\{x\} = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } i \neq i_0 \\ \{x_{i_0}\}, \text{ si } i = i_0 \end{cases}$$

en ambos casos, $\iota_i^{-1}\{x\} \in \sigma_i$. Entonces $\{x\}$ es un abierto de X según σ, enteramente contenido en U y que contiene a x como elemento. Si $x = x'_{i_0} \in U$, debido al lema anterior, también $x_{i_0} \in U$, de manera que en este caso también hay un abierto de X que contiene a x y que está enteramente contenido en U, a saber: X_{i_0}. Esto demuestra que $U \in \sigma$, lo cual significa que (X,σ) es un espacio cuya topología está cerrada bajo intersecciones arbitrarias, es decir, (X,σ) está finitamente generado. Puesto que $\underline{\mathbb{F}}$, la subcategoría de los espacios finitamente generados, por ser correflexiva está cerrada bajo cocientes y coproductos, resulta que cualquier cociente de cualquier coproducto de elementos de $\underline{\Sigma}$ es elemento de $\underline{\mathbb{F}}$; en símbolos:

$$\widetilde{\underline{\Sigma}} \subseteq \underline{\mathbb{F}}$$

También es válida la contención en sentido contrario, pero su demostración no se verá en este trabajo (véase [**?**][10]). Queda indicado entonces que

$$\widetilde{\underline{\Sigma}} = \underline{\mathbb{F}}$$

Proposición 1.14 *Todo espacio localmente indiscreto está finitamente generado, pero no recíprocamente.*

Demostración 40 *Si A es localmente indiscreto y $(U_j)_J$ es una familia arbitraria de abiertos de A, entonces $U = \bigcap\limits_{j\in J} U_j$ es cerrada en A por ser una intersección de cerrados de A, (en A todo abierto es cerrado). Luego U es abierto en A y queda probado que A está finitamente generado. Para mostrar que lo recíproco es falso, basta pensar en el espacio de Sierpinski que está finitamente generado pero que, claramente, no es localmente indiscreto.* ♦

[10] Véase de Enrique Bazúa: $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-*correflexiones y fibraciones de Hurewicz* en www.`red-mat.unam.mx`

Proposición 1.15 *Toda subcategoría bicorreflexiva que contenga propiamente a $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$ tiene entre sus elementos al espacio de Sierpinski.*

Demostración 41 *Si $\underline{A}$ es una subcategoría bicorreflexiva que contiene propiamente a $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$, entonces es posible hallar un espacio $A \in \underline{A}$ y un abierto $U \subseteq A$ no cerrado; entonces*

$$\varnothing \neq U \neq A$$

Sea

$$p_U : A \;\to\; \overset{S}{\overset{\shortparallel}{\{\cdot\,,\cdot\}}}$$

el cociente que identifica en un punto cada uno de los subconjuntos U y $A - U$. Entonces $p_U(U)$ es abierto en S y no es cerrado. Por lo tanto, S es el espacio de Sierpinski. Al ser bicorreflexiva, $\underline{A}$ está cerrada bajo la formación de cocientes. Por lo tanto, $S \in \underline{A}$. ♦

Como consecuencia de las dos proposiciones anteriores se tiene el siguiente

Corolario 1.4 $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}} \sqsubset \underline{\mathbb{F}}$. ♦

Cuando se hizo ver que $\underline{\{\varnothing\}}$ es la subcategoría correflexiva más chica de $\mathfrak{Top}$ y que $\underline{\mathbb{D}}$ es la bicorreflexiva mínima, quedó insinuada la existencia de una jerarquía entre las subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ dada por la relación de contención $\subseteq$ entre ellas. Los resultados anteriores no han hecho sino corroborar la existencia de tal jerarquía; si se añade a ello el hecho de que todo espacio finitamente generado está compactamente generado pero no recíprocamente, todo esto puede sintetizarse escribiendo

$$\underline{\{\varnothing\}} \sqsubset \underline{\mathbb{D}} \sqsubset \underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}} \sqsubset \underline{\mathbb{F}} \subset \underline{\mathbb{K}}$$

Como ha mostrado Horst Herrlich en [?], entre las subcategorías $\underline{\mathbb{F}}$ y $\underline{\mathbb{K}}$ no puede establecerse la relación $\sqsubset$ ya que entre ellas median otras subcategorías bicorreflexivas bastante más abstractas. En ese documento se hace ver que la jerarquía de que aquí se habla viene dada por una retícula o *lattice* cuyos elementos *cero* y *uno* son $\underline{\{\varnothing\}}$ y $\mathfrak{Top}$, respectivamente.