Índice general

Introducción y Remembranza

En http://www.red-mat.unam.mx/foro/volumenes/vol029/catcontop.pdf quedó transcrito y en circulación libre uno de los artículos póstumos del matemático mexicano Roberto Vázquez García titulado "Categorías concretas topológicas". Debido a que este material llegó en forma manuscrita a la Universidad y por las siglas de su título, quedó clasificado, dentro del conjunto de documentos legado del Doctor a la Universidad, como el *manuscrito cct*.

El presente trabajo se ofrece como material de apoyo a la enseñanza del contenido del manuscrito cct. Está expuesto con la pretención de que lo entienda cualquier estudios@ que cuente con los conocimientos y la experiencia que dan las lecciones básicas de Topología y Álgebra moderna. Puesto que se buscará falimiarizar a quien esto leyere con la Topología categórica, se aconseja consultar unas notas que se publicaron como una memoria de las "Lecciones de Topología" de Roberto Vázquez en http://www.red-mat.unam.mx/foro/volumenes/vol002/voldos_5.html

No es nada raro que hacer difusión de algún aspecto de la obra de Roberto Vázquez sea estar difundiendo la obra de Graciela Salicrup; tal sucede tratándose del manuscrito cct. Dirigida por Vázquez, Graciela Beatriz Salicrup López se doctoró en ciencias en 1978 con la tesis "Epirreflexividad y conexidad en categorías concretas topológicas", disponible en http://texedores.matem.unam.mx/publicaciones/index.php/2012-03-30-17-01-12/2012-04-13-14-57-16/2012-05-04-16-40-40

Ha sido curioso encontrarnos en su ancianidad al doctor Vázquez ensayando un tema tratado por él con su discípula en aquella tesis: la epirreflexividad o, como ell@s la llamaban: la *coconexidad*. La propuesta en estas notas es confirmar que no es difícil seguir un hilo tendido desde aquí hacia ese meoyo de esos trabajos.

La publicación del material expuesto cumplirá su misión si (aunque sólo fuera por casualidad) motivase en alguien el acercamiento a las obras de est@s doct@s maestr@s. Se ha confeccionado imitando el estilo que tuvieron las notas que dictó Roberto Vázquez en los cursos de su última década como profesor de la Facultad de Ciencias en Ciudad Universitaria. A esta idea obedece diseminar ejercicios a lo largo de su desarrollo y recurrir a uno que otro en momentos del desarrollo posterior. Esto explica presentar al material como "notas de un curso póstumo de Roberto Vázquez García sobre categorías concretas topológicas".

En los dos primeros capítulos, tras ejemplificar y definir *categoría* y *categoría concreta*, es planteado y resuelto el problema de exhibir una categoría que no sea concretable. En esto se apega a la primera parte de la tesis de Graciela y en nada al manuscrito. En los capítulos del 3 al 6 se presentan generalizaciones hacia las categorías concretas de las nociones de topologías débiles y fuertes, así como de los conceptos de inmersión y cociente. Al mismo tiempo se introduce un *Principio de dualidad* que aclara cuáles de las nociones que se definan son mutuamente duales, además de que será especialmente útil en partes sucesivas del desarrollo de las notas. En el capítulo 7 se generaliza una noción ya no topológica sino algebraica: la de *grupo libre*. Es hasta el capítulo 8 que se expone un estudio preliminar de las categorías concretas topológicas. Después de este primer encuentro con ellas, se preparará el terreno para estudiar la relación de sus *subcategorías epirreflexivas* con sus *subcategorías coconexas*. En ese propósito hay que aprender a usar instrumentos clásicas de la Teoría de las categorías; así es que en el capítulo 9 se presenta a las *transformaciones naturales*, y en el 10 a los *funtores adjuntos*. Sólo por no haber querido interrumpir el hilo discursivo se postergó insertar un capítulo con el tema de los productos y coproductos cartesianos en las categorías concretas topológicas; pudo haberse hablado de ellos inmediatamente después de introducir las que aquí podemos llamar *estructuras débiles y fuertes*. Aprovechando su tratamiento en el capítulo 11, en el 12 y el 13 se tratan los productos y coproductos *fibrados*, y en el 14 y 15 generalizaciones de éstos: límites y colímites. Estas herramientas ya permiten hacernos en el capítulo 16 de un resultado importante: el teorema del funtor adjunto, y valernos de él en el estudio de las subcategorías reflexivas de las categorías concretas topológicas, iniciado en el capítulo 17. Justo es a partir de este capítulo en que por la vía de estas notas :(truncas) más profundamente puede un@ sambuyirse en la tesis doctoral de Graciela y en el manuscrito cct del doctor Vázquez.

La clase está por terminar. El fin de semestre corre a todo tren. En la Facultad, cientos de tareas se hacen y se revisan. Las capacidades de resistencia de la juventud predominante en la población estudiantil se tensa saludablemente con el esfuerzo que le demanda el cuerpo de profesores. Pese a la parsimonia que aparenta, el heptagenario doctor Vázquez está muy consciente de las prisas que corren y de que la semana que entra todavía será peor. ¡Magnífico, muchachit@s! Lleva varias semanas dictando cátedra sin enunciar el último ejercicio. Es lunes; si no lo encarga hoy, el último reconocimiento parcial será hasta la otra semana, pudiendo desatendernos de la materia para dedicarle tiempo a otras materias que también urgen. Dan las dos; ya parece que Vázquez se despide pero se dirige a un espacio del pizarrón hasta entonces en limpio y escribe: Ejercicio 10. El solo hecho de leer la palabra y el número provoca en l@s más la aspiración de una ese entre dientes que, aunque discreta en cada un@, ha terminado siendo bastante sonora por venir de tant@s. A Chuchín se le escapa proferir una vulgaridad tan procaz como su nombre. De divertido que me parece, volteo sonriente hacia Margarita que ya dis-gusta a carcajadas la insolencia de Chuchín. ¡Qué bueno que reververa aquí esa risa franca, fresca, joven y jovial de la Márgara! ¡Me agrada leerla resonar silente en esta memoria que refiere un momento en aquel salón de seminarios del Instituto de Matemáticas donde orgullos@s gozamos un delicioso mazoquismo de baja intensidad, a fuego lento y a merced de Vázquez.

PARÁFRASIS
a
Roberto Vázquez García

Los rumores de la Facultad quedan atrás y entro en el IMATE. De una manera casi física siento gravitar el Álgebra y la Topolgía, el ámbito sereno de un caos en orden, el tiempo disecado y conservado mágicamente. A izquierda y derecha, cubículos tras cuyas puertas se adivinan, absortos en su deduciones, los rostros momentáneos de los investigadores, ante estudiosos pizarrones que les arrojan respuestas (como en la hipálage de Borges). Recuerdo haber recordado ya esa figura, en este lugar, y después aquel otro epíteto que también define por el contorno los empeños de esta gente abstracta del Topos, y después aquel hexámetro de la Eneida:

SIC ITUR AD ASTRA

Estas reflexiones me dejan en la puerta de su cubículo. Entro; cambiamos unas cuantas convencionales y cordiales palabras y le doy este documento. Si no me engaño, usted no me malquería, Vázquez, y le hubiera gustado que le gustara algún trabajo mío. Ello no ocurrió nunca, pero esta vez usted vuelve las páginas y lee con aprobación algún enunciado, acaso porque en él ha reconocido su propio estilo, acaso porque la práctica deficiente le importa menos que la sana teoría. En este punto se deshace mi sueño, como el álito en el viento. La vasta ala Poniente del Instituto me rodea; es nueva, lejana al cubículo 202, apartada de él por varias puertas herméticas de codificado acceso, y a usted, Vázquez, la enfermedad lo mató a mediados del noventa y cuatro. Mi vanidad y mi nostalgia han armado una escena imposible. Así será (me digo) pero mañana yo también habré muerto y se confundirán nuestros tiempos y la cronología se perderá en un orbe de símbolos y de algún modo será justo afirmar que yo le he traído este documento y que usted lo ha aceptado.

Capítulo 1

Categorías y Categorías Concretas

1.1. Definiciones

Definición 1.1 *Una **digráfica** G es una cuarteta*

$$G = (\mathcal{V}, \mathcal{F}, d, c)$$

en la que $\mathcal{V}$ y $\mathcal{F}$ son clases, y

$$d : \mathcal{F} \to \mathcal{V} \qquad y \qquad c : \mathcal{F} \to \mathcal{V}$$

*son funciones. Los elementos de $\mathcal{V}$ son los **vértices de la digráfica** G y los elementos de $\mathcal{F}$ son las **flechas de la digráfica** G. Si $f \in \mathcal{F}$, entonces*

$$d\,(f) \qquad y \qquad c\,(f)$$

*se llaman **dominio de** f y **codominio de** f, respectivamente. Para significar que f es una flecha en la que*

$$d\,(f) = A \qquad y \qquad c\,(f) = B$$

se emplean las notaciones

$$f : A \to B \qquad o \qquad A \xrightarrow{f} B$$

Dados $A, B \in \mathcal{V}$, al conjunto de flechas de G que tengan dominio A y codominio B lo denotaremos por $G\,(A, B)$; es decir

$$G\,(A, B) = \big\{ f \in \mathcal{F} \mid d\,(f) = A \qquad y \qquad c\,(f) = B \big\}$$

Definición 1.2 *Un **sistema deductivo** $\mathcal{D}$ es una digráfica*

$$\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{F}, d, c)$$

en la que se verifica el siguiente par de condiciones:

Axioma 1.1 ***Condición de Composición**. Si para $A, B, C \in \mathcal{V}$ se tienen*

$$f \in \mathcal{D}\,(A, B) \qquad y \qquad g \in \mathcal{D}\,(B, C)$$

entonces se puede hablar de la existencia de una flecha

$$h \in \mathcal{D}\,(A, C)$$

Axioma 1.2 ***Condición de Identidad**. Para todo $A \in \mathcal{V}$ se puede hablar de la existencia de una flecha*

$$i \in \mathcal{D}\,(A, A)$$

A la flecha h de (i) se la suele denotar mediante $g \circ f$, y a la flecha i de (ii) mediante 1_A. Cuando la digráfica $\mathcal{D}$ es un sistema deductivo, los vértices de $\mathcal{D}$ se llaman **fórmulas** y las flechas de $\mathcal{D}$ se llaman **deducciones** o **pruebas**; así, si

$$f \in \mathcal{D}(A, B)$$

se dice que f **es una prueba o deducción de la fórmula** B **a partir de la fórmula** A.

Definición 1.3 *Una* ***categoría*** *es un sistema deductivo $\mathcal{C}$ en cuya clase de pruebas se tiene definida una congruencia $\equiv$ (es decir, una relación binaria que es reflexiva, simétrica y transitiva) tal que si A, B, C, D son fórmulas de $\mathcal{C}$, entonces:*

Axioma 1.3 *Para*

$$f \in \mathcal{C}(A, B) \qquad y \qquad g \in \mathcal{C}(B, C)$$

deben ser

$$1_B \circ f \equiv f \qquad y \qquad g \circ 1_B \equiv g$$

Axioma 1.4 *Para*

$$f \in \mathcal{C}(A, B) \qquad g \in \mathcal{C}(B, C) \qquad h \in \mathcal{C}(C, D)$$

deben ser

$$h \circ (g \circ f) \equiv (h \circ g) \circ f$$

El sentido de la congruencia $\equiv$ es el siguiente: Si A y B son fórmulas de $\mathcal{C}$, y f y g son pruebas de B a partir de A, entonces $f \equiv g$ implica:

(a)

$$\gamma \circ f \equiv \gamma \circ g$$

para toda $\gamma \in \mathcal{C}(B, \Gamma)$, siendo Γ cualquier fórmula de $\mathcal{C}$.

(b)

$$f \circ \delta \equiv g \circ \delta$$

para toda $\delta \in \mathcal{C}(\Delta, A)$, siendo Δ cualquier fórmula de $\mathcal{C}$.

Cuando un sistema deductivo $\mathcal{C}$ es una categoría, las fórmulas de $\mathcal{C}$ se llaman **objetos** y las deducciones de $\mathcal{C}$ reciben el nombre de **morfismos**.

Se presentan a continuación ejemplos de estos conceptos.

Ejemplo 1.1 *Se denotará mediante $\mathfrak{Set}$ a la colección formada por dos clases: $|\mathfrak{Set}|$ y $\mathcal{F}$.*

$|\mathfrak{Set}|$, comprende a todos los conjuntos.

En tanto, $\mathcal{F}$ es la clase de todas las funciones entre conjuntos; es decir, los elementos de $\mathcal{F}$ son ternas (A, f, B) en las que A y B son conjuntos tales que $B \neq \varnothing$ si $A \neq \varnothing$. Si $A \neq \varnothing$, entonces f es una relación

$$f \subset A \times B$$

que asocia un elemento de B, y solamente uno, con cada elemento de A. Si $A = \varnothing$ y B es arbitrario, entonces f es la relación vacía

$$\varnothing \subseteq \varnothing \times B$$

1. Sean

$$d : \mathcal{F} \to |\mathfrak{Set}| \qquad \text{y} \qquad c : \mathcal{F} \to |\mathfrak{Set}|$$

definidas, para cualquier $(A, f, B) \in \mathcal{F}$, mediante

$$d((A, f, B)) = A \qquad \text{y} \qquad c((A, f, B)) = B$$

Claramente, la cuarteta

$$(|\mathfrak{Set}|, \mathcal{F}, d, c)$$

es una digráfica.

2.

(i) La composición usual entre funciones permite que para cualesquiera $A, B, C \in |\mathfrak{Set}|$ y para cualesquiera

$$(A, f, B) \in \mathfrak{Set}(A, B) \qquad \text{y} \qquad (B, g, C) \in \mathfrak{Set}(B, C)$$

se pueda hablar de una flecha

$$(A, h, C) \in \mathfrak{Set}(A, C)$$

haciendo

$$(A, h, C) = (A, g \circ f; C)$$

(ii) El que la función identidad pueda definirse para cualquier conjunto, permite poder hablar de la existencia de una flecha

$$(A, i, A) \in \mathfrak{Set}(A, A)$$

haciendo

$$(A, i, A) = (A, 1_A, A)$$

Esto significa que la cuarteta

$$(|\mathfrak{Set}|, \mathcal{F}, d, c)$$

es un sistema deductivo.

3. Sea $\equiv$ la relación en $\mathcal{F}$ definida, para cualesquiera

$$(A, f, B), (A', f', B') \in \mathcal{F}$$

mediante

$$(A, f, B) \equiv (A', f', B')$$

si, y sólo si,

$$d((A, f, B)) = d((A', f', B')), \qquad c((A, f, B)) = c((A', f', B'))$$

y

$$f(a) = f'(a), \forall a \in A$$

Entonces:

(iii) Si

$$(A, f, B) \in \mathfrak{Set}(A, B) \qquad \text{y} \qquad (B, g, C) \in \mathfrak{Set}(B, C)$$

las pruebas

$$(A, f, B) \quad \text{y} \quad (A, 1_B \circ f, B) \qquad \text{y} \qquad (B, g \circ 1_B, C) \quad \text{y} \quad (B, g, C)$$

son tales que

$$\begin{array}{rcl} d((A, f, B)) & = & d((A, 1_B \circ f, B)) \\ c((A, f, B)) & = & c((A, 1_B \circ f, B)) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} d((B, g \circ 1_B, C)) & = & d((B, g, C)) \\ c((B, g \circ 1_B, C)) & = & c((B, g, C)) \end{array}$$

y además

$$f(a) = 1_B \circ f(a), \forall a \in A \qquad \text{y} \qquad g \circ 1_B(b) = g(b), \forall b \in B$$

Como consecuencia se tienen

$$(A, f, B) \equiv (A, 1_B \circ f, B) \qquad \text{y} \qquad (B, g \circ 1_B, C) \equiv (B, g, C)$$

(iv) Si

$$(A, f, B) \in \mathfrak{Set}(A, B), \qquad (B, g, C) \in \mathfrak{Set}(B, C), \qquad (C, h, D) \in \mathfrak{Set}(C, D)$$

entonces

$$\begin{aligned}(C,h,D)\circ[(B,g,C)\circ(A,f,B)] &= (C,h,D)\circ(A,g\circ f,C)\\ &= (A,h\circ(g\circ f),D)\\ &= (A,(h\circ g)\circ f,D)\\ &= (B,h\circ g,D)\circ(A,f,B)\\ &= [(C,h,D)\circ(B,g,C)]\circ(A,f,B)\end{aligned}$$

debido, desde luego, a que la composición usual entre funciones es asociativa.

Por lo tanto

$$\mathfrak{Set}=(|\mathfrak{Set}|,\mathcal{F},d,c)$$

es una categoría. A menudo se hablará de ella como de **la categoría de los conjuntos y de las funciones**. [✓]

Observación 1.1 *Con frecuencia se omitirá el signo $\circ$ al componer dos morfismos, escribiendo juntos sus símbolos representativos; por ejemplo, se escribirá $f_1 f_2$ en vez de escribir $f_1\circ f_2$.*

Ejemplo 1.2 *Mediante $\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}$ se denotará a la colección que consta de dos clases: $\left|\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\right|$ y $\mathcal{F}$.*

Los elementos de $\left|\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\right|$ son ternas

$$(X_0,\varphi,X_1)$$

en las que X_0 y X_1 son conjuntos, y φ es una función de dominio X_0 y codominio X_1.

Los elementos de $\mathcal{F}$ se defininen en términos de pares de elementos de $\left|\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\right|$; para un par dado

$$X,Y\in\left|\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\right|$$

$$X=(X_0,\varphi,X_1)\qquad Y=(Y_0,\psi,Y_1)$$

un elemento de $\mathcal{F}$ es una pareja de funciones (f_0,f_1) que hagan conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \overset{f_0}{\rightarrow} & Y_0\\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi\\ X_1 & \overset{f_1}{\rightarrow} & Y_1\end{array}$$

1. Si con $f=(f_0,f_1)\in\mathcal{F}$ conmuta el diagrama enterior, entonces se definen

$$d:\mathcal{F}\to\left|\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\right|\qquad\text{y}\qquad c:\mathcal{F}\to\left|\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\right|$$

como

$$d(f)=X\qquad\text{y}\qquad c(f)=Y$$

Esto permite afirmar que la cuarteta

$$\left(\left|\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\right|,\mathcal{F},d,c\right)$$

es una digráfica.

2.

(i) Obsérvese que si

$$f\in\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(X,Y)\qquad\text{y}\qquad g\in\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(Y,Z)$$

siendo

$$X=(X_0,\varphi,X_1)\qquad Y=(Y_0,\psi,Y_1)\qquad Z=(Z_0,\zeta,Z_1)$$

$$f=(f_0,f_1)\qquad g=(g_0,g_1)$$

entonces conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
X_0 & \overset{g_0 f_0}{\longrightarrow} & Z_0 \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\
X_1 & \overset{g_1 f_1}{\rightarrow} & Z_1
\end{array}$$

debido a la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{array}{ccccc}
X_0 & \overset{f_0}{\rightarrow} & Y_0 & \overset{g_0}{\rightarrow} & Z_0 \\
\varphi \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \psi & \circlearrowleft & \downarrow \zeta \\
X_1 & \overset{f_1}{\rightarrow} & Y_1 & \overset{g_1}{\rightarrow} & Z_1
\end{array}$$

Esto permite definir la composición de flechas mediante

$$(g_0, g_1) \circ (f_0, f_1) = (g_0 \circ f_0, g_1 \circ f_1)$$

(ii) También hay que observar que

$$(1_{X_0}, 1_{X_1}) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(X, X)$$

qualquiera que sea el vértice $X = (X_0, \varphi, X_1) \in \left|\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\right|$, ya que es conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
X_0 & \overset{1_{X_0}}{\longrightarrow} & X_0 \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
X_1 & \overset{1_{X_1}}{\rightarrow} & X_1
\end{array}$$

De aquí resulta que la cuarteta

$$\left(\left|\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\right|, \mathcal{F}, d, c\right)$$

es un sistema deductivo.

3. Valiéndose de la congruencia (o igualdad) entre funciones definida en 3 del ejemplo anterior se puede definir ahora una relación $\equiv$ en $\mathcal{F}$ como:

$$(f_0, f_1) \equiv (f_0', f_1') \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} f_0 = f_0' \\ \text{y} \\ f_1 = f_1' \end{array}\right.$$

El que $\equiv$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{F}$ es consecuencia de que la igualdad entre funciones es una relación de equivalencia, y se demuestra sin dificultad.

(iii) Siendo $X = (X_0, \varphi, X_1)$ y denotando mediante 1_X a la prueba $(1_{X_0}, 1_{X_1})$, considérense cualesquiera pruebas

$$e = (e_0, e_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(W, X) \qquad \text{y} \qquad f = (f_0, f_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(X, Y)$$

siendo

$$W = (W_0, \omega, W_1) \qquad \text{y} \qquad Y = (Y_0, \psi, Y_1)$$

unas fórmulas arbitrarias. De acuerdo con la definición de composición de pruebas se tiene que

$$1_X \circ e = (1_{X_0}, 1_{X_1}) \circ (e_0, e_1) = (1_{X_0} \circ e_0, 1_{X_1} \circ e_1)$$

pero

$$1_{X_0} \circ e_0 = e_0 \qquad \text{y} \qquad 1_{X_1} \circ e_1 = e_1$$

Por lo tanto

$$1_X \circ e \equiv e$$

De igual manera,

$$f \circ 1_X = (f_0, f_1) \circ (1_{X_0}, 1_{X_1}) = (f_0 \circ 1_{X_0}, f_1 \circ 1_{X_1})$$

y puesto que

$$f_0 \circ 1_{X_0} = f_0 \qquad \text{y} \qquad f_1 \circ 1_{X_1} = f_1$$

entonces

$$f \circ 1_X \equiv f$$

(iv) Finalmente, para

$$e = (e_0, e_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(W, X) \qquad f = (f_0, f_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(X, Y) \qquad g = (g_0, g_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(Y, Z)$$

debido a la definición de la composición entre estas fórmulas se tiene

$$\begin{array}{lcl} g \circ (f \circ e) = (g_0, g_1) \circ [(f_0, f_1) \circ (e_0, e_1)] & & (g \circ f) \circ e = [(g_0, g_1) \circ (f_0, f_1)] \circ (e_0, e_1) \\ = (g_0, g_1) \circ (f_0 \circ e_0, f_1 \circ e_1) & \text{y} & = (g_0 \circ f_0, g_1 \circ f_1) \circ (e_0, e_1) \\ = (g_0 \circ (f_0 \circ e_0), g_1 (f_1 \circ e_1)) & & = ((g_0 \circ f_0) \circ e_0, (g_1 \circ f_1) \circ e_1) \end{array}$$

y puesto que la composición corriente entre funciones es asociativa, son

$$g_0 \circ (f_0 \circ e_0) = (g_0 \circ f_0) \circ e_0 \qquad \text{y} \qquad g_1 (f_1 \circ e_1) = (g_1 \circ f_1) \circ e_1$$

de lo cual resulta que

$$g \circ (f \circ e) \equiv (g \circ f) \circ e$$

Esto demuestra que

$$\mathfrak{Set}^{\{0,1\}} = \left(\left| \mathfrak{Set}^{\{0,1\}} \right|, \mathcal{F}, d, c \right)$$

es una categoría. Es **la categoría de los conjuntos variables y de las funciones variables**. Esta denominación se debe a que tanto sus objetos como sus morfismos pueden pensarse como conjuntos y funciones (respectivamente) que han cambiado con el paso del tiempo. Antes (digamos, al tiempo cero), los conjuntos X y Y fueron, respectivamente, X_0 y Y_0; después (al tiempo uno), devinieron en los conjuntos X_1 y Y_1. Desde esta óptica, un morfismo f entre los conjuntos variables X y Y es una función variable que en el tiempo cero fue f_0 y que en el tiempo uno vino a convertirse en la función f_1. [✓]

Definición 1.4 *Se dice que una categoría es* ***pequeña*** *cuando su clase de objetos es un conjunto.*

Los dos ejemplos que siguen son ejemplos típicos de categorías pequeñas.

Ejemplo 1.3 *Sea $A = (X, \leq)$, donde X es un conjunto y $\leq$ es un* ***preorden*** *definido en X, es decir, $\leq$ es una relación binaria en X que es reflexiva y transitiva.*

$\mathcal{C}$ denotará a la colección que consta de dos clases $|\mathcal{C}|$ y $\mathcal{F}$ definidas por

$$|\mathcal{C}| = X \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F} = (\leq)$$

es decir, $\mathcal{F}$ es la unión de todos los conjuntos del tipo $\mathcal{C}(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2 \in X)$, definidos como

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } x_1 \nleq x_2 \\ \{\langle x_1, x_2 \rangle\}, \text{ si } x_1 \leq x_2 \end{cases}$$

1. Sean

$$d : \mathcal{F} \to X \qquad \text{y} \qquad c : \mathcal{F} \to X$$

tales que

$$d(\langle x_1, x_2 \rangle) = x_1 \qquad \text{y} \qquad c(\langle x_1, x_2 \rangle) = x_2$$

Esto permite configurar una cuarteta

$$(X, \mathcal{F}, d, c)$$

que es una digráfica.

2.

(i) Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ y supongamos que existen las flechas

$$\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathcal{C}(x_1, x_2) \qquad \text{y} \qquad \langle x_2, x_3 \rangle \in \mathcal{C}(x_2, x_3)$$

Entonces, la transitividad del preorden definido en X permite referirse a la flecha

$$\langle x_1, x_3 \rangle \in \mathcal{C}(x_1, x_3)$$

por lo que queda satisfecha la condición de composición definiendo

$$\langle x_2, x_3 \rangle \circ \langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, x_3 \rangle$$

.

(ii) La reflexividad de $\leq$ garantiza que para todo $x \in X$ existe una flecha

$$\langle x, x \rangle \in \mathcal{C}(x, x)$$

por lo que la condición de identidad también queda satisfecha si se define

$$1_x = \langle x, x \rangle$$

.

Esto permite afirmar que la digráfica

$$(X, \mathcal{F}, d, c)$$

es un sistema deductivo.

3. Para cualesquiera $\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \in \mathcal{F}$ se define

$$\langle x, y \rangle \equiv \langle x', y' \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x' \leq x \leq x' \\ \text{y} \\ y' \leq y \leq y' \end{cases}$$

Es fácil ver que $\equiv$ es una congruencia en $\mathcal{F}$. Según se han definido la composición y las identidades, se tiene:

(iii) Si

$$\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in \mathcal{F}$$

entonces,

$$\begin{aligned} 1_y \circ \langle x, y \rangle &= \langle y, y \rangle \circ \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle \\ \langle y, z \rangle \circ 1_y &= \langle y, z \rangle \circ \langle y, y \rangle = \langle y, z \rangle \end{aligned}$$

Debido a la reflexividad de $\equiv$ resultan

$$1_y \circ \langle x, y \rangle \equiv \langle x, y \rangle \qquad \text{y} \qquad \langle y, z \rangle \circ 1_y \equiv \langle y, z \rangle$$

(iv) Si

$$\langle w, x \rangle, \langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in \mathcal{F}$$

entonces,

$$\langle y, z \rangle \circ (\langle x, y \rangle \circ \langle w, x \rangle) = \langle y, z \rangle \circ \langle w, y \rangle = \langle w, z \rangle$$

en tanto que

$$(\langle y, z \rangle \circ \langle x, y \rangle) \circ \langle w, x \rangle = \langle x, z \rangle \circ \langle w, x \rangle = \langle w, z \rangle$$

y por la reflexividad de $\equiv$ resulta

$$\langle y, z \rangle \circ (\langle x, y \rangle \circ \langle w, x \rangle) \equiv (\langle y, z \rangle \circ \langle x, y \rangle) \circ \langle w, x \rangle$$

Esto demuestra que el sistema deductivo

$$\mathcal{C} = (X, \mathcal{F}, d, c)$$

es una categoría. [✓]

Nótese que el ejemplo anterior permite mirar en todo conjunto a una categoría.

En efecto, para cualquier conjunto X podemos definir el preorden

$$\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

Puesto que entre X y $\Delta(X)$ existe una correspondencia biyectiva, en este caso se puede afirmar que tanto los objetos como los morfismos de esta categoría son los elementos de X. Las funciones d y c coinciden con la identidad en X. Para representar a la cuarteta hay que escribir

$$X = (X, X, 1_X, 1_X)$$

Para ver el ejemplo que sigue, hay que recordar la definición de *grupo*.

Definición 1.5 *Un **grupo** es una pareja $(X, (*, e))$ en la que X es un conjunto no vacío, $*$ es una operación binaria en X que es asociativa y e es un elemento de X tal que para cualquier $x \in X$*

$$x * e = x = e * x$$

Además, para todo elemento $x \in X$ existe un elemento inverso $x^{-1} \in X$ tal que

$$x * x^{-1} = e = x^{-1} * x$$

Ejemplo 1.4 *Sea $G = (X, (*, e))$ un grupo arbitrario y sea $\mathcal{C}_G$ la colección que consta de las dos clases $|\mathcal{C}_G|$ y $\mathcal{F}$ definidas como*

$$|\mathcal{C}_G| = \{O\} \qquad y \qquad \mathcal{F} = X$$

donde O denota una entidad abstracta arbitraria.

1. Definiendo como las constantes de valor O a las funciones

$$d, c : \mathcal{F} \to |\mathcal{C}_G|$$

es claro que queda configurada una digráfica

$$(|\mathcal{C}_G|, \mathcal{F}, d, c)$$

2.

(i) Puesto que en este caso la clase de vértices es el conjunto singular $\{O\}$, sólo hay un conjunto de flechas; es

$$\mathcal{C}_G(O, O) = X$$

Por lo tanto, es claro que dados dos elementos cualesquiera

$$x_1 \in \mathcal{C}_G(O, O) \qquad \text{y} \qquad x_2 \in \mathcal{C}_G(O, O)$$

siempre es posible referirse a un elemento

$$x_3 \in \mathcal{C}_G(O, O)$$

(que puede ser x_1, o ser x_2, o ser cualquier otro elemento del grupo).

(ii) Por la definición de grupo, el conjunto X no es vacío. Por consiguiente, siempre es posible la referencia a un elemento

$$x \in \mathcal{C}_G(O, O)$$

Esto significa que la digráfica

$$(|\mathcal{C}_G|, \mathcal{F}, d, c)$$

conforma un sistema deductivo.

3. Como se ha podido ver, para comprobar que la colección $\mathcal{C}_G$ constituye un sistema deductivo pudo prescindirse de las propiedades de grupo; ello fue posible debido a que la clase de fórmulas tiene un solo elemento y a que la clase de pruebas la constituye un conjunto no vacío.

Sin embargo, la operación del grupo trae implícita una ley de composición para las deducciónes. En efecto, siendo

$$x_1 \in \mathcal{C}_G(O,O) \qquad \text{y} \qquad x_2 \in \mathcal{C}_G(O,O)$$

unas deducciones cualesquiera, puede definirse la composición entre ellas mediante

$$x_2 \circ x_1 = x_1 * x_2$$

Y por su parte, la existencia del elemento neutro del grupo trae explícita, mas bien que implícita, la presencia de una deducción distinguida de O a partir de O en la clase de pruebas, y permite definir:

$$1_O = e$$

Así, definiendo para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \equiv x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

resulta:

(iii) Para cualesquiera

$$x_1 \in \mathcal{C}_G(O,O) \qquad \text{y} \qquad x_2 \in \mathcal{C}_G(O,O)$$

se tienen

$$1_O \circ x_1 = x_1 * e = x_1 \qquad \text{y} \qquad x_2 \circ 1_O = e * x_2 = x_2$$

por lo que son

$$1_O \circ x_1 \equiv x_1 \qquad \text{y} \qquad x_2 \circ 1_O \equiv x_2$$

(iv) Si

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{C}_G(O,O)$$

entonces, debido a la asociatividad de la operación en el grupo, se tiene

$$\begin{aligned}(x_3 \circ x_2) \circ x_1 &= x_1 * (x_3 \circ x_2)\\ &= x_1 * (x_2 * x_3)\\ &= (x_1 * x_2) * x_3\\ &= (x_2 \circ x_1) * x_3 = x_3 \circ (x_2 \circ x_1)\end{aligned}$$

por lo que resulta

$$(x_3 \circ x_2) \circ x_1 \equiv x_3 \circ (x_2 \circ x_1)$$

Con esto queda demostrado que el sistema deductivo

$$\mathcal{C}_G = (|\mathcal{C}_G|, \mathcal{F}, d, c)$$

configura una categoría. [✓]

Para considerar el ejemplo que sigue hay que tener en mente el concepto de *homotopía entre funciones continuas.*

Definición 1.6 *Sean, X y Y dos espacios topológicos arbitrarios y $f_1, f_2 \in X \to Y$ dos funciones continuas cualesquiera. Una* ***homotopía*** *de f_1 a f_2 es una función continua*

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

tal que para toda $x \in X$

$$H(x,0) = f_1(x) \qquad y \qquad H(x,1) = f_2(x)$$

En tal caso se dice que f_1 ***es homotópica a*** *f_2 y se escribe*

$$f_1 \simeq f_2 \qquad o \qquad H : f_1 \simeq f_2 \qquad o \qquad f_1 \overset{H}{\simeq} f_2$$

Se sabe que $\simeq$ es una relación de equivalencia en el conjunto de las funciones continuas de X en Y. Dada cualquier $f : X \to Y$ continua, sea

$$[f] = \{h : X \to Y \mid h \text{ es continua y homotópica a } f\}$$

Ejemplo 1.5 $\mathfrak{Top}_H$ *denota a la colección formada por lo siguiente:*

Una clase$|\mathfrak{Top}_H|$ que es la clase de todos los espacios topológicos.
Otra clase

$$\mathcal{F} = \bigcup_{X,Y\in|\mathfrak{Top}_H|} \mathfrak{Top}_H(X,Y)$$

donde, para cualesquiera espacios topológicos X, Y,

$$\mathfrak{Top}_H(X,Y) = \{[f] \mid f : X \to Y \text{ es continua}\}$$

es decir, los elementos de $\mathcal{F}$ son clases de homotopía de funciones continuas entre espacios topológicos.
1. Si se definen

$$d : \mathcal{F} \to |\mathfrak{Top}_H| \qquad \text{y} \qquad c : \mathcal{F} \to |\mathfrak{Top}_H|$$

haciendo, para cualquier $[f] \in \mathcal{F}$

$$d[f] = X \qquad \text{y} \qquad c[f] = Y$$

si es $[f] \in \mathfrak{Top}_H(X,Y)$, entonces la cuarteta

$$(|\mathfrak{Top}_H|, \mathcal{F}, d, c)$$

constituye una digráfica.
2.
(i) Si X, Y, Z son espacios topológicos y si

$$[f] \in \mathfrak{Top}_H(X,Y) \qquad \text{y} \qquad [g] \in \mathfrak{Top}_H(Y,Z)$$

entonces es claro que se puede referir la existencia de al menos un elemento del conjunto $\mathfrak{Top}_H(X,Z)$ pues

$$[gf] \in \mathfrak{Top}_H(X,Z)$$

(ii) Para todo espacio topológico X se puede referir la existencia de un elemento en el conjunto $\mathfrak{Top}_H(X,X)$, pues al ser $1_X : X \to X$ una función continua, se tiene que

$$[1_X] \in \mathfrak{Top}_H(X,X)$$

Esto implica que la digráfica

$$(|\mathfrak{Top}_H|, \mathcal{F}, d, c)$$

también se constituye en un sistema deductivo.
3. Como ya se dijio, la homotopía induce una relación de equivalencia $\simeq$ en el conjunto de las funciones continuas de X en Y. Esto permite definir una congruencia en $\mathcal{F}$, haciendo

$$[f_1] \equiv [f_2] \Leftrightarrow f_1 \simeq f_2$$

para cualesquiera $[f_1], [f_2] \in \mathcal{F}$.
(iii) Supóngase que X, Y, Z son espacios topológicos y que

$$[f] \in \mathfrak{Top}_H(X,Y) \qquad \text{y} \qquad [g] \in \mathfrak{Top}_H(Y,Z)$$

Entonces son continuas las funciones

$$X \xrightarrow{f} Y \quad X \xrightarrow{1_Y f} Y \qquad \text{y} \qquad Y \xrightarrow{g1_Y} Z \quad Y \xrightarrow{g} Z$$

Y definiendo

$$H : X \times [0,1] \to Y \qquad \text{y} \qquad K : Y \times [0,1] \to Z$$

mediante

$$H(x,t) = f(x) \qquad \text{y} \qquad K(y,t) = g(y)$$

se obtienen funciones continuas para las que resulta

$$H(x,0) = f(x) = 1_Y(f(x)) = 1_Y f(x) \qquad \text{y} \qquad H(x,1) = f(x)$$

y

$$K(y,0) = g(y) = g(1_Y(y)) = g1_Y(y) \qquad \text{y} \qquad K(y,1) = g(y)$$

Es decir,

$$1_Y f \overset{H}{\simeq} f \qquad \text{y} \qquad g1_Y \overset{K}{\simeq} g$$

Por lo tanto

$$1_Y f \equiv f \qquad \text{y} \qquad g1_Y \equiv g$$

(iv) Supóngase que W, X, Y, Z son espacios topológicos y que

$$[e] \in \mathfrak{Top}_H(W,X) \qquad [f] \in \mathfrak{Top}_H(X,Y) \qquad [g] \in \mathfrak{Top}_H(Y,Z)$$

Hay que demostrar que

$$([g][f])[e] \equiv [g]([f][e])$$

Si se define la composición de clases como la clase de la composición de los representantes, entonces resultará

$$([g][f])[e] = [gf][e] = [(gf)e] = [g(fe)] = [g]([fe]) = [g]([f][e])$$

y consecuentemente

$$[(gf)e] \equiv [g(fe)]$$

Sólo hay que asegurarse de que la composición de clases queda así bien definida, demostrando que no depende de la elección de los representantes.

Si

$$[f_1] \in \mathfrak{Top}_H(X,Y) \qquad \text{y} \qquad [f_2] \in \mathfrak{Top}_H(Y,Z)$$

tómense

$$h_1 \in [f_1] \qquad \text{y} \qquad h_2 \in [f_2]$$

Hay que probar que $[f_2 f_1] = [h_2 h_1]$; es decir, hay que probar que existe

$$H : X \times [0,1] \to Z$$

continua y tal que $f_2 f_1 \overset{H}{\simeq} h_2 h_1$. Por hipótesis

$$f_1 \simeq h_1 \qquad \text{y} \qquad f_2 \simeq h_2$$

o sea que existen

$$H_1 : X \times [0,1] \to Y \qquad \text{y} \qquad H_2 : Y \times [0,1] \to Z$$

continuas y tales que para cualesquiera $x \in X$ y $y \in Y$

$$H_1(x,0) = f_1(x), H_1(x,1) = h_1(x) \qquad \text{y} \qquad H_2(y,0) = f_2(y), H_2(y,1) = h_2(y)$$

Sea

$$H' : X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$$

dada por

$$H'(x,t) = (H_1(x,t), t)$$

H' es continua porque son continuas sus funciones componentes. Por lo tanto, es continua la función

$$H : X \times [0,1] \to Z$$

definida como $H = H_2 H'$; y tenemos:

$$\begin{array}{rcl} H(x,0) & = & H_2 H'(x,0) = H_2(H_1(x,0),0) = H_2(f_1(x),0) = f_2(f_1(x)) = f_2 f_1(x) \\ H(x,1) & = & H_2 H'(x,1) = H_2(H_1(x,1),1) = H_2(h_1(x),1) = h_2(h_1(x)) = h_2 h_1(x) \end{array}$$

de manera que $f_2 f_1 \overset{H}{\simeq} h_2 h_1$, por lo que es $[f_2 f_1] = [h_2 h_1]$ como se quería probar.

Con esto queda terminada la demostración de que el sistema deductivo

$$\mathfrak{Top}_H = (|\mathfrak{Top}_H|, \mathcal{F}, d, c)$$

es una categoría. $\mathfrak{Top}_H$ es la **categoría de los espacios topológicos y de las clases de homotopía**.

Nótese que en cada uno de los cuatro últimos ejemplos hubo que definir una ley para la composición de los morfismos. En el primer ejemplo esto ha sido innecesario debido, desde luego, a que ahí los morfismos son las funciones corrientes que se componen mediante la composición ordinaria entre ellas. En general, cuando los morfismos en una categoría son funciones corrientes, se omite la referencia a la ley de composición si se trata de la composición ordinaria entre ellas. Tal es el caso de las *categorías concretas*.

En una *categoría concreta* $\underline{K}$ la clase de objetos consta de *conjuntos dotados de alguna estructura*; por ello hay que referirse primero a *un tipo de estructura* (determinado en cada caso específico) que a su vez permita referirnos a una clase $\underline{K}[X]$ de $\underline{K}$-*estructuras*, para todo conjunto X. Los morfismos son funciones entre conjuntos (*estructurados*) que preservan la estructura; su ley de composición, como ya se dijo, es la composición ordinaria entre funciones.

En limpio: Para hablar de *una categoría concreta* $\underline{K}$ deben tenerse en contexto tres tipos de datos:

(i) El de una *estructura* que permita la referencia a una clase $\underline{K}[X]$ de $\underline{K}$-*estructuras*, para todo conjunto X.

(ii) Una colección de *conjuntos estructurados* que es la clase $|\underline{K}|$ de objetos de $\underline{K}$.

(iii) La noción de un un tipo de *función que preserva la estructura*, que permita definir al conjunto de los $\underline{K}$-morfismos entre dos $\underline{K}$-objetos cualesquiera.

Un par de ejemplos aclararán esta idea.

Ejemplo 1.6 *Sea* $\mathfrak{Top}$ *la clase de* los espacios topológicos y de las funciones continuas.

(i) En $\mathfrak{Top}$ la noción de *estructura topológica* permite referir a cada conjunto X una clase $\mathfrak{Top}[X]$ de $\mathfrak{Top}$-estructuras que son precisamente las topologías de X.

(ii) Los $\mathfrak{Top}$-objetos, en consecuencia, son parejas (X,τ) en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $\tau \in \mathfrak{Top}[X]$, es decir, son los espacios topológicos.

(iii) La funciones que preservan la estructura topológica son las funciones continuas; por lo tanto, para cualesquiera $\mathfrak{Top}$-objetos

$$A = (X,\tau) \qquad \text{y} \qquad B = (Y,\sigma)$$

se tiene que

$$\mathfrak{Top}(A,B) = \{f \in \mathfrak{Set}(X,Y) : f \text{ es continua}\}$$

Los $\mathfrak{Top}$-morfismos, además, satisfacen el siguiente par de propiedades:

(m_1) Para cualesquiera $\mathfrak{Top}$-objetos A, B, C, si

$$f \in \mathfrak{Top}(A,B) \qquad \text{y} \qquad g \in \mathfrak{Top}(B,C)$$

entonces

$$gf \in \mathfrak{Top}(A,C)$$

pues se sabe que en tal caso gf es una función continua de A en C.

(m_2) Para todo $\mathfrak{Top}$-objeto $A = (X,\tau)$, la función

$$1_X : (X,\tau) \to (X,\tau)$$

es un $\mathfrak{Top}$-morfismo y coincide con 1_A. [✓]

Ejemplo 1.7 *Sea* $\mathfrak{Vec}_C$ *la clase de* los espacios vectoriales definidos sobre un campo C y de las transformaciones lineales.

(i) Para $X \in \mathfrak{Set}$ la *estructura vectorial sobre* C permite la referencia a una clase $\mathfrak{Vec}_C[X]$ cuyos miembros son parejas del tipo $(+,\cdot)$, donde

$$+ : X \times X \to X \qquad \text{y} \qquad \cdot : C \times X \to X$$

son operaciones sujetas a los consabidos axiomas para espacios vectoriales.

(ii) Por consiguiente, los $\mathfrak{Vec}_C$-objetos son parejas $(X,(+,\cdot))$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $(+,\cdot) \in \mathfrak{Vec}_C[X]$, es decir, son los espacios vectoriales definidos sobre el campo C o C-espacios vectoriales.

(iii) Entre dos C-espacios vectoriales

$$A = (X,(+_X,\cdot_X)) \qquad \text{y} \qquad B = (Y,(+_Y,\cdot_Y))$$

una función $f : X \to Y$ que preserve la estructura debe ser tal que

$$\begin{aligned} f(x_1 +_X x_2) &= f(x_1) +_Y f(x_2),\ \forall x_1,x_2 \in X \\ f(c \cdot_X x) &= c \cdot_Y x,\ \forall c \in C, x \in X \end{aligned}$$

Como se sabe por los cursos de Álgebra Lineal, tales funciones son las trnsformaciones lineales entre C-espacios vectoriales. Por lo tanto

$$\mathfrak{Vec}_C(A,B) = \{f \in \mathfrak{Set}(X,Y) : f \text{ es una transformación lineal}\}$$

Obsérvese que también en este ejemplo se verifican las propiedades (m_1) y (m_2) anteriores:

(m_1) Para cualesquiera C-espacios vectoriales A, B, C, si

$$f \in \mathfrak{Vec}_C(A,B) \qquad \text{y} \qquad g \in \mathfrak{Vec}_C(B,C)$$

entonces

$$gf \in \mathfrak{Vec}_C(A,C)$$

pues se sabe que en tal caso gf es una trnsformación lineal de A en C.

(m_2) Para todo C-espacio vectorial $A = (X,(+,\cdot))$, la función

$$1_X : (X,(+,\cdot)) \to (X,(+,\cdot))$$

es una trnsformación lineal y coincide con 1_A. [✓]

Observación 1.2 *Para indicar que en una categoría concreta* $\underline{K}$ *la función* $f : X \to Y$ *es un* $\underline{K}$*-morfismo de* (X,ξ) *en* (Y,η) *se escribe* $(f,(\xi,\eta))$*. Cuando la situación lo amerita se recurre a esta notación para dar presición al lenguaje. Cuando no hay lugar a equívocos en cuanto al saber de qué* $\underline{K}$*-estructuras están revestidos* X *y* Y *para que* f *sea un* $\underline{K}$*-morfismo, se omite el empleo de la notación* $(f,(\xi,\eta))$ *y el* $\underline{K}$*-morfismo se denota simplemente por* f*.*

El par de ejemplos anteriores aclara suficientemente la definición formal del concepto de *categoría concreta* que es como sigue:

Definición 1.7 *Una* ***categoría concreta*** $\underline{K}$ *es una colección que consta de:*

(i) Clases $\underline{K}[X]$, para todo $X \in \mathfrak{Set}$, cuyos miembros se denominan **$\underline{K}$-estructuras del conjunto** X.

(ii) Objetos que son parejas $A = (X,\xi)$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ es el **conjunto subyacente de** A y $\xi \in \underline{K}[X]$ es una **$\underline{K}$-estructura subyacente de** A.

(iii) Conjuntos de morfismos del tipo

$$\underline{K}(A,B) \subseteq \mathfrak{Set}(X,Y) \times \{(\xi,\eta)\}$$

que para cualesquiera $\underline{K}$-objetos $A = (X,\xi)$, $B = (Y,\eta)$, $C = (Z,\zeta)$ satisfacen las condiciones:

(m_1) $(f,(\xi,\eta)) \in \underline{K}(A,B)$ y $(g,(\eta,\zeta)) \in \underline{K}(B,C) \Rightarrow (gf,(\xi,\zeta)) \in \underline{K}(A,C)$

(m_2) $(1_X,(\xi,\xi)) \in \underline{K}(A,A)$ y coincide con 1_A.

Si $(f,(\xi,\eta)) \in \underline{K}(A,B)$, entonces $f \in \mathfrak{Set}(X,Y)$ es la **función subyacente del $\underline{K}$-morfismo** $(f,(\xi,\eta))$.

Observación 1.3 *Es fácil ver que la definición anterior implica que una categoría concreta es, ante todo, una categoría.*

Observación 1.4 *La clase de* $\underline{K}$*-estructuras de* X *puede ser vacía. V. gr.: Si en el ejemplo anterior tomamos* $C = \mathbb{R}$*, entonces a un conjunto* X *tal que*

$$1 < \#(X) < \infty$$

"le queda grande" la estructura de $\mathbb{R}$*-espacio vectorial y no puede revestirse con ella; o sea que es*

$$\mathfrak{Vec}_C[X] = \varnothing$$

Capítulo 2

Funtores y Concreciones

La idea de morfismo entre objetos de una categoría puede hacerse extensiva a "morfismos entre categorías" mediante la introducción del concepto de *funtor*, cuyo rol en el desarrollo de la teoría de las categorías ha sido fundamental.

La idea de un *funtor* $F : \Im \to \Re$ de una categoría $\Im$ en una categoría $\Re$ permite la doble asociación de $\Im$-objetos con $\Re$-objetos, por una parte, y de $\Im$-morfismos con $\Re$-morfismos, por otra parte, a condición de que tales correspondencias preserven, por así decirlo, la estructura categórica; como ésta viene dada en la definición misma de categoría, mediante la exigencia de una ley de composición para los morfismos y la existencia de morfismos idénticos, entonces un *funtor* debe preservar ambas nociones. En adelante será frecuente recurrir a esta idea; por ello conviene contar con su definición precisa que es la siguiente.

Definición 2.1 *Sean $\Im$ y $\Re$ unas categorías cualesquiera. Un **funtor***

$$F : \Im \to \Re$$

es una regla de correspondencia que asocia

(i) a cada $\Im$-objeto A un $\Re$-objeto FA
(ii) a cada $\Im$-morfismo $f \in \Im(A, B)$ un $\Re$-morfismo $Ff \in \Re(FA, FB)$
Esta regla:
$[a]$ *preserva composiciones*, es decir

$$(Fg)(Ff) = F(gf) : FA \to FC$$

para cualesquiera morfismos $f \in \Im(A, B), g \in \Im(B, C)$;
$[b]$ *preserva morfismos idénticos*, es decir

$$F1_A = 1_{FA}, \forall A \in \Im$$

Definición 2.2 *De acuerdo con (ii), el funtor F induce funciones*

$$\begin{array}{llll} F_{(A,B)}: & \Im(A, B) & \to & \Re(FA, FB) \\ & f & \mapsto & Ff \end{array}$$

dados cualesquiera $\Im$-objetos A y B. Se dice que:

1. F es un **funtor fiel** cuando toda función $F_{(A,B)}$ es inyectiva.
2. F es un **funtor pleno** si toda función $F_{(A,B)}$ es suprayectiva.

Observación 2.1 *Nótese que, debido a (i), cualquier funtor F trae aparejada una función entre clases:*

$$F_* : |\Im| \to |\Re|$$

Su regla de correspondencia viene dada por

$$F_*(A) = FA, \forall A \in |\Im|$$

Se dice que F es un **funtor repleto** cuando la función F_* es suprayectiva.

Con frecuencia se abusa de la notación designando a esta función simplemente con F. Sin embargo, no debe perderse de vista que, aunque F_* y F tienen la misma regla de correspondencia, sus dominios y sus codominios difieren radicalmente pues mintras los de F son categorías, los de F_* solamente son clases. Cuando se tenga que ser muy preciso en el lenguaje se recurrirá a la notación F_*.

Algo similar hay que decir de las funciones $F_{(A,B)}$, las cuales por abuso de escritura son designadas simplemente por F. Este abuso es dispensable cuando no induce confusíon alguna, pero cuando se requiere presición es preferible cargar la notación escribiendo $F_{(A,B)}$.

Ejemplo 2.1 *Si $\underline{K}$ es una categoría concreta, se define*

$$U : \underline{K} \to \mathfrak{Set}$$

por

$$U(X,\xi) = X, \text{ para todo } \underline{K}\text{-objeto } (X,\xi)$$

y

$$U(f,(\xi,\eta)) = f, \text{ para todo } \underline{K}\text{-morfismo } (f,(\xi,\eta))$$

Entonces:

[*a*] Si $(f,(\xi,\eta))$ y $(g,(\eta,\zeta))$ son $\underline{K}$-morfismos,

$$[U(g,(\eta,\zeta))][U(f,(\xi,\eta))] = gf = U(gf,(\xi,\zeta))$$

es decir, U preserva composiciones.

[*b*]

$$U(1_X,(\xi,\xi)) = 1_X = 1_{U(X,\xi)}$$

es decir, U preserva morfismos idénticos.

U es fiel, porque las funciones

$$U_{(A,B)} : \underline{K}(A,B) \to \mathfrak{Set}(X,Y)$$

es inyectiva para cualesquiera $\underline{K}$-objetos $A = (X,\xi)$, $B = (Y,\eta)$, porque si

$$U(f,(\xi,\eta)) = U(g,(\xi,\eta))$$

entonces $f = g$, de modo que además de tener el mismo dominio A y el mismo codominio B, los morfismos $(f,(\xi,\eta))$ y $(g,(\xi,\eta))$ también tienen la misma regla de correspondencia; es decir, son iguales. Se hablará de U como del **funtor que olvida**.

Ejemplo 2.2 *Sean $(X,\leq)$ y $(Y,\preceq)$ dos conjuntos preordenados (*copros*) y sean $\mathcal{C}_\leq$ y $\mathcal{C}_\preceq$ las categorías pequeñas inducidas por ellos. Si*

$$F_* : (X,\leq) \to (Y,\preceq)$$

es cualquier función monótona, entonces tiene sentido definir una doble regla de asociación, que para todo $\mathcal{C}_\leq$-objeto x venga dada por

$$Fx = F_*(x)$$

y (aprovechando la monotonía de F_*) para cualquier $\mathcal{C}_\leq$-morfismo $\langle x_1, x_2\rangle$, mediante

$$F\langle x_1, x_2\rangle = \langle Fx_1, Fx_2\rangle$$

Haciéndolo así y teniendo presente la ley de composición para los morfismos de estas categorías, resulta que:

[a] Si $\langle x_1, x_2\rangle \in \mathcal{C}_{\leq}(x_1, x_2)$ y $\langle x_2, x_3\rangle \in \mathcal{C}_{\leq}(x_2, x_3)$, entonces

$$F\left(\langle x_2, x_3\rangle \langle x_1, x_2\rangle\right) = F\langle x_1, x_3\rangle = \langle Fx_1, Fx_3\rangle \langle Fx_1, Fx_2\rangle = F\langle x_2, x_3\rangle \circ F\langle x_1, x_2\rangle$$

lo cual significa que F preserva composiciones.

[b] Para todo $x \in X$ $(= |\mathcal{C}_{\leq}|)$, se tiene

$$F1_x = F\langle x, x\rangle = \langle Fx, Fx\rangle = 1_{Fx}$$

esto es que F preserva identidades.

sto demuestra que cualquier función monótona entre los copros $(X, \leq)$ y $(Y, \preceq)$ induce un funtor entre las categorías $\mathcal{C}_{\leq}$ y $\mathcal{C}_{\preceq}$.

Recíprocamente, si

$$F : \mathcal{C}_{\leq} \to \mathcal{C}_{\preceq}$$

es un funtor y $x_1 \leq x_2$, entonces

$$\langle x_1, x_2\rangle \in \mathcal{C}_{\leq}(x_1, x_2)$$

por lo que debe ser

$$F\langle x_1, x_2\rangle \in \mathcal{C}_{\preceq}(Fx_1, Fx_2) = \{\langle Fx_1, Fx_2\rangle\}$$

Consecuentemente, este conjunto no puede ser vacío, por lo que su único elemento $\langle Fx_1, Fx_2\rangle$ debe existir, lo cual sucede si, y sólo si, es

$$Fx_1 \preceq Fx_2$$

es decir si, y sólo si, es monótona la función

$$F_* : (X, \leq) \to (Y, \preceq)$$

inducida por F.

Quiere decir que con las funciones monótonas entre los copros $(X, \leq)$ y $(Y, \preceq)$ quedan agotados los funtores entre las categorías $\mathcal{C}_{\leq}$ y $\mathcal{C}_{\preceq}$. [✓]

Ejemplo 2.3 *Sean $G = (X, (*_X, e_X))$ y $H = (Y, (*_Y, e_Y))$ unos grupos arbitrarios, y sean $\mathcal{C}_G$ y $\mathcal{C}_H$ las categorías pequeñas inducida por ellos. Si*

$$F : (X, (*_X, e_X)) \to (Y, (*_Y, e_Y))$$

es un homomorfismo de grupos, entonces puede considerarse definida una regla de correspondencia

$$F_{(O_G, O_G)} : \mathcal{C}_G(O_G, O_G) \to \mathcal{C}_H(O_H, O_H), \forall O_G \in |\mathcal{C}_G| (= \{O_G\})$$

Para compatibilizar esto con la noción de funtor, hay que definir

$$F_* : |\mathcal{C}_G| \to |\mathcal{C}_H|$$

del único modo posible, es decir, haciendo

$$F_*(O_G) = O_H$$

de manera que queda definida una doble asociación

$$F : \mathcal{C}_G \to \mathcal{C}_H$$

que es

$$FO_G = O_H, \forall O_G \in \{O_G\}$$

y

$$Fx = F(x), \forall x \in \mathcal{C}_G(O_G, O_G)$$

Entonces:

[a] Puesto que las composiciones entre los morfismos de estas categorías están definidas mediante las operaciones de los grupos, y teniendo en cuenta que entre ellos F es un homomorfismo, para cualesquiera

$$x_1, x_2 \in \mathcal{C}_G\left(O_G, O_G\right)$$

se tiene

$$F\left(x_2 \circ x_1\right) = F\left(x_1 *_X x_2\right) = F\left(x_1\right) *_Y F\left(x_2\right) = F\left(x_2\right) \circ F\left(x_1\right)$$

lo cual significa que F preserva composiciones.

[b] Se sabe que bajo homomorfismos de grupos, elementos neutros van en elementos neutros; en consecuencia

$$F 1_{O_G} = F\left(e_X\right) = e_Y = 1_{O_H} = 1_{F O_G}$$

esto es, F preserva identidades.

Esto demuestra que cualquier función monótona entre los grupos G y H induce un funtor entre las categorías $\mathcal{C}_G$ y $\mathcal{C}_H$.

Recíprocamente, si

$$F : \mathcal{C}_G \to \mathcal{C}_H$$

es un funtor y x_1, x_2 son elementos cualesquiera de G, entonces

$$F\left(x_1 *_X x_2\right) = F\left(x_2 \circ x_1\right) = F\left(x_2\right) \circ F\left(x_1\right) = F\left(x_1\right) *_Y F\left(x_2\right)$$

pues F preserva composiciones. Como tabién preserva identidades, entonces

$$F\left(e_X\right) = F 1_{O_G} = 1_{F O_G} = 1_{O_H} = e_Y$$

Esto significa que F es un homomorfismo.

Quiere decir que con los homomorfismos entre los grupos G y H quedan agotados los funtores entre las categorías $\mathcal{C}_G$ y $\mathcal{C}_H$. [✓]

Ya se dijo que los funtores son esencialmente los morfismos entre las categorías. Entonces, resulta natural preguntarse cómo son sus identidades y cuál es su ley de composición.

Definición 2.3 *Si $\Re$ es una categoría, entonces el **funtor identidad** en $\Re$*

$$1_{\Re} : \Re \to \Re$$

se define como

$$1_{\Re} A = A, \forall A \in \Re \qquad y \qquad 1_{\Re} f = f, \forall f \in \Re(A, B)$$

Hay que asegurarse de que este "funtor" lo sea realmente y que se comporte como una auténtica identidad, todo lo cual se comprueba fácilmente.

Definición 2.4 *Si*

$$F : \Im \to \Re \qquad y \qquad G : \Re \to \wp$$

*son unos funtores cualesquiera, entonces el **funtor composición***

$$GF : \Im \to \wp$$

se define como

$$(GF) A = G(FA), \forall A \in \Im \qquad y \qquad (GF) f = G(Ff), \forall f \in \Im(A, B)$$

Hay que ver que GF es efectivamente un funtor.

[a] Sean

$$f \in \Im(A, B) \qquad \text{y} \qquad g \in \Im(B, C)$$

entonces, puesto que tanto F como G preservan composiciones, se tiene

$$(GF) gf = G(Fgf) = G(Fg \circ Ff) = G(Fg) \circ G(Ff) = (GF) g \circ (GF) f$$

Por lo tanto, también GF preserva composiciones.

[b] Puesto que tanto F como G preservan identidades, para cualquier $A \in \Im$ se tiene:

$$(GF)\,1_A = G\,(F1_A) = G1_{FA} = 1_{G(FA)} = 1_{(GF)A}$$

Por lo tanto, también GF preserva identidades.

Esto es la comprobación de que el funtor GF es, efectivamente, un funtor.

Observación 2.2 *Sean*

$$F : \Im \to \Re \qquad y \qquad G : \Re \to \wp$$

unos funtores cualesquiera; para dos $\Im$-objetos A, B considérese la composición

$$(GF)_{(A,B)} : \Im\,(A, B) \overset{F_{(A,B)}}{\longrightarrow} \Re\,(FA, FB) \overset{G_{(FA,FB)}}{\longrightarrow} \wp\,(GFA, GFB)$$

Puesto que $(GF)_{(A,B)}$:

(i) es inyectiva al serlo tanto $F_{(A,B)}$ como $G_{(FA,FB)}$, y

(ii) es suprayectiva al serlo tanto $F_{(A,B)}$ como $G_{(FA,FB)}$,

resulta que GF será fiel si F y G son fieles, y GF será pleno, si son plenos F y G.

Ejercicio 2.1 *Probar que la composición entre funtores es asociativa.*

Definición 2.5 *Sean $\Im$ y $\Re$ unas categorías arbitrarias y $F : \Im \to \Re$ un funtor entre ellas. Se dice que F es* ***un isomorfismo*** *si existe un funtor*

$$F^{-1} : \Re \to \Im$$

tal que

$$F^{-1}F = 1_{\Im} \qquad y \qquad FF^{-1} = 1_{\Re}$$

En tal caso se hablará de F^{-1} como de un ***funtor inverso*** *de F.*

Se empleará la el signo $\cong$ al referirse a la isomorfía entre las categorías; así, para indicar que $\Im$ y $\Re$ son categorías isomorfas se escribirá

$$\Im \cong \Re$$

y para indicar que F es un isomorfismo entre ellas se escribirá

$$F : \Im \cong \Re \qquad \text{o} \qquad \Im \overset{F}{\cong} \Re$$

Ejercicio 2.2 *Probar que $\cong$ es una relación de equivalencia.*

Proposición 2.1 *Sean $\Im$ y $\Re$ unas categorías arbitrarias y $F : \Im \to \Re$ un funtor entre ellas. Son equivalentes:*

(a) F es un isomorfismo.

(b) F es fiel, es pleno, y la función

$$F_* : |\Im| \to |\Re|$$

es biyectiva.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sean A y B dos $\Im$-objetos cualesquiera y supóngase que para dos $\Im$-morfismos

$$f_1, f_2 \in \Im\,(A, B)$$

es

$$F_{(A,B)}\,(f_1) = F_{(A,B)}\,(f_2)$$

Puesto que las reglas de correspondencia de la función $F_{(A,B)}$ y del funtor F coinciden, la igualdad anterior implica que

$$Ff_1 = Ff_2$$

Por (a) existe un funtor F^{-1} inverso de F; aplicándolo a la igualdad anterior, resulta

$$f_1 = F^{-1}Ff_1 = F^{-1}Ff_2 = f_2$$

Esto significa que la función $F_{(A,B)}$ es inyectiva; o sea que F es un funtor fiel.

Por otra parte, si se escoge cualquier $\Re$-morfismo

$$g \in \Re(FA, FB)$$

entonces el $\Im$-morfismo

$$F^{-1}g \in \Im\left(F^{-1}FA, F^{-1}FB\right) = \Im(A, B)$$

es tal que

$$F_{(A,B)}\left(F^{-1}g\right) = FF^{-1}g = g$$

lo cual significa que la función $F_{(A,B)}$ es suprayectiva; por lo tanto F es un funtor pleno.

En cuanto a la función F_* tenemos que:

($\cdot$) Si para $A_1, A_2 \in |\Im|$ se tiene

$$F_*(A_1) = F_*(A_2)$$

entonces, al coincidir entre sí las reglas de correspondencia de la función F_* y del funtor F, resulta

$$FA_1 = FA_2$$

y por lo tanto

$$A_1 = F^{-1}FA_1 = F^{-1}FA_2 = A_2$$

Esto significa que la función F_* es inyectiva.

($\cdot\cdot$) Si $B \in |\Re|$, entonces el $\Im$-morfismo $F^{-1}B$ es tal que

$$F_*\left(F^{-1}B\right) = FF^{-1}B = B$$

es decir, la función F_* es suprayectiva.

Por lo tanto, F_* es una biyección entre las clases $|\Im|$ y $|\Re|$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Al ser biyectiva la función $F_* : |\Im| \to |\Re|$, se puede definir una función

$$G_* : |\Re| \to |\Im|$$

como

$$G_* = (F_*)^{-1}$$

Empleando esta regla de correspondencia en la construcción de un funtor

$$G : \Re \to \Im$$

resulta

$$GFA = A, \forall A \in \Im \qquad \text{y} \qquad FGB = B, \forall B \in \Re$$

En cuanto a los morfismos, si

$$g \in \Re(U, V)$$

entonces, debido a la biyectividad de F_*, existen dos $\Im$-objetos A y B tales que

$$F_*(A) = U \qquad \text{y} \qquad F_*(B) = V$$

de manera que

$$g \in \Re(FA, FB)$$

Por la plenitud de F,existe un morfismo $f \in \Im(A, B)$ tal que

$$F_{(A,B)}(f) = g$$

Debido a la fidelidad de F, este $\Im$-morfismo f es único. En vista de lo anterior, y recordando que la regla de correspondencia de F para f coincide con la de la función $F_{(A,B)}$, cabe pensar a f como al único $\Im$-morfismo tal que

$$Ff = g$$

Consecuentemente, escogiendo este $\Im$-morfismo, resulta bien definida una función

$$G_{(U,V)} : \Re(U, V) \to \Im(GU, GV)$$

si es

$$G_{(U,V)}(g) = f$$

Empleando estas funciones defínase la regla que permite a G asociaciar a cada $\Re$-morfismo g un $\Im$-morfismo Gg, haciendo

$$Gg = f$$

Entonces

$$FGg = F(Gg) = Ff = g$$

Análogamente

$$GFf = G(Ff) = Gg = f$$

Claramente, en G ha quedado construído un funtor que es inverso del funtor F; debido a esto, F es un isomorfismo.

[✓]

Definición 2.6 *Sea $\mathcal{H}$ una categoría arbitraria. Se dice que $\mathcal{H}$* ***es concretable*** *si existen, una categoría concreta $\underline{K}$ y un isomorfismo*

$$\mathcal{H} \overset{F}{\cong} \underline{K}$$

Ejemplo 2.4 *Toda categoría concreta $\underline{K}$ es concretable, pues*

$$\underline{K} \overset{1_{\underline{K}}}{\cong} \underline{K}$$

Proposición 2.2 *Sea $\mathcal{H}$ una categoría arbitraria. Son equivalentes:*

(a) $\mathcal{H}$ es concretable.
(b) Existe un funtor fiel

$$\Gamma : \mathcal{H} \to \mathfrak{Set}$$

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Por hipótesis existe un isomorfismo $\mathcal{H} \overset{F}{\cong} \underline{K}$; según la proposición anterior, F es un funtor fiel.

Otro funtor fiel es el funtor que olvida

$$U : \underline{K} \to \mathfrak{Set}$$

Entonces también es fiel el funtor compuesto

$$\Gamma : \mathcal{H} \xrightarrow{F} \underline{K} \xrightarrow{U} \mathfrak{Set}$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponiendo que existe un funtor fiel

$$\Gamma : \mathcal{H} \to \mathfrak{Set}$$

constrúyase la colección $\underline{K}$ del modo que sigue:

(i) Para todo conjunto X, defínase la clase

$$\underline{K}[X] = \{A \in \mathcal{H} : \Gamma A = X\}$$

(ii) Defínase la clase $|\underline{K}|$ como

$$|\underline{K}| = \{(\Gamma A, A) : A \in \mathcal{H}\}$$

(iii) Para cualesquiera dos elementos $(\Gamma A, A), (\Gamma B, B)$ de la clase $|\underline{K}|$, defínase un conjunto $\underline{K}((\Gamma A, A), (\Gamma B, B))$ como

$$\underline{K}((\Gamma A, A), (\Gamma B, B)) = \{(\Gamma f, (A, B)) : f \in \mathcal{H}(A, B)\}$$

Entonces:

(m_1) Para cualesquiera dos elementos

$$(\Gamma f, (A, B)) \in \underline{K}((\Gamma A, A), (\Gamma B, B)) \qquad \text{y} \qquad (\Gamma g, (B, C)) \in \underline{K}((\Gamma B, B), (\Gamma C, C))$$

la composición

$$(\Gamma g, (B, C))(\Gamma f, (A, B)) = (\Gamma g \Gamma f, (A, C))$$

arroja un elemento del conjunto $\underline{K}((\Gamma A, A), (\Gamma C, C))$, pues por ser Γ un funtor, es $\Gamma g \Gamma f = \Gamma gf$, y $gf \in \mathcal{H}(A, C)$.

(m_2) Para cualquier elemento $(\Gamma A, A)$ de la clase $|\underline{K}|$, la pareja

$$(1_{\Gamma A}, (A, A))$$

resulta un elemento del conjunto $\underline{K}((\Gamma A, A), (\Gamma A, A))$, pues por ser Γ un funtor, es $1_{\Gamma A} = \Gamma 1_A$, y $1_A \in \mathcal{H}(A, A)$. Además

$$(1_{\Gamma A}, (A, A))(\Gamma h, (B, A)) = (\Gamma 1_A \Gamma h, (B, A)) = (\Gamma(1_A h), (B, A)) = (\Gamma h, (B, A))$$

$$(\Gamma f, (A, B))(1_{\Gamma A}, (A, A)) = (\Gamma f \Gamma 1_A, (A, B)) = (\Gamma(f 1_A), (A, B)) = (\Gamma f, (A, B))$$

o sea que

$$(1_{\Gamma A}, (A, A)) = 1_{(\Gamma A, A)}$$

Esto demuestra que $\underline{K}$ es una categoría concreta.

Ahora defínase

$$F : \mathcal{H} \to \underline{K}$$

mediante

$$FA = (\Gamma A, A), \forall A \in \mathcal{H}$$

$$Ff = (\Gamma f, (A, B)), \forall f \in \mathcal{H}(A, B)$$

Se puede tener la seguridad de que estas reglas están bien definidas, porque vienen dadas en términos de Γ, que tiene reglas bien definidas. Además:

$[a]$ Cualesquiera que sean los $\mathcal{H}$-morfismos $f \in \mathcal{H}(A, B)$ y $g \in \mathcal{H}(B, C)$, se tiene que

$$F(gf) = (\Gamma(gf), (A, C)) = (\Gamma g, (B, C))(\Gamma f, (A, B)) = (Fg)(Ff)$$

esto es: F preserva composiciones.

$[b]$ Para cualquier $\mathcal{H}$-objeto A es

$$F 1_A = (\Gamma 1_A, (A, A)) = 1_{(\Gamma A, A)} = 1_{FA}$$

y esto significa que F preserva identidades.

Esto es prueba de que F es un funtor.

Por otra parte, si para dos $\mathcal{H}$-objeto A_1, A_2 sucede que

$$FA_1 = FA_2$$

entonces serán

$$(\Gamma A_1, A_1) = (\Gamma A_2, A_2)$$

y, puesto que esta igualdad se da componente a componente, resulta

$$A_1 = A_2$$

Esto significa que la función

$$F_* : |\mathcal{H}| \to |\underline{K}|$$

es inyectiva.

F_* también es suprayectiva, porque si se escoge cualquier $\underline{K}$-objeto

$$(\Gamma A, A) \in |\underline{K}|$$

entonces, es obvio que el $\mathcal{H}$-objeto A es tal que

$$FA = (\Gamma A, A)$$

Consecuentemente, F es un funtor repleto.

Por otro lado, obsérvese que la función

$$F_{(A,B)} : \mathcal{H}(A, B) \to \underline{K}(FA, FB)$$

es suprayectiva, cualesquiera que sean los $\mathcal{H}$-objetos A y B. En efecto, puesto que

$$\underline{K}(FA, FB) = \underline{K}((\Gamma A, A), (\Gamma B, B)) = \{(\Gamma f, (A, B)) : f \in \mathcal{H}(A, B)\}$$

entonces, para

$$(\Gamma f, (A, B)) \in \underline{K}(FA, FB)$$

(escogido arbitrariamente) el $\mathcal{H}$-morfismo f es tal que

$$F_{(A,B)}(f) = Ff = (\Gamma f, (A, B))$$

en conformidad con la definición que se ha dado de F. Luego, F es un funtor pleno.

Finalmente, si

$$f_1, f_2 \in \mathcal{H}(A, B)$$

son tales que

$$F_{(A,B)}(f_1) = F_{(A,B)}(f_2)$$

entonces

$$(\Gamma f_1, (A, B)) = (\Gamma f_2, (A, B))$$

y

$$\Gamma f_1 = \Gamma f_2$$

Por la fidelidad de Γ, esto implica que

$$f_1 = f_2$$

Luego, también F es un funtor fiel.

Por lo tanto, F es un isomorfismo y $\mathcal{H}$ ha resultado concretable, como se quería demostrar.

[✓]

Definición 2.7 *Sea $\mathcal{H}$ una categoría arbitraria. Si*

$$\Gamma : \mathcal{H} \to \mathfrak{Set}$$

es un funtor fiel, entonces la categoría concreta $\underline{K}$ construída a lo largo de la demostración anterior recibe el nombre de ***concreción de $\mathcal{H}$ inducida por*** *Γ.*

Observación 2.3 ***Corolario 2.1*** *Nótese que durante la demostración de la concretabilidad de $\mathcal{H}$, la hipótesis de la fidelidad de Γ sólo se requirió para asegurar la fidelidad del funtor F que se fue construyendo. Por lo tanto, si $\mathfrak{R}$ es cualquier categoría y se puede definir un funtor*

$$\Gamma : \mathfrak{R} \to \mathfrak{Set}$$

entonces existen, una categoría concreta $\underline{K}$ y un funtor

$$F : \mathfrak{R} \to \underline{K}$$

pleno y repleto.

[✓]

Ejemplo 2.5 *Considérese el funtor*

$$1_{\mathfrak{Set}} : \mathfrak{Set} \to \mathfrak{Set}$$

Evidentemente, $1_{\mathfrak{Set}}$ es un funtor fiel. Aplicando el resultado de la proposición anterior resulta que la categoría $\mathfrak{Set}$ es concretable.

Denotando mediante $\overline{\mathfrak{Set}}$ a la concreción de $\mathfrak{Set}$ inducida por $1_{\mathfrak{Set}}$, resulta que $\overline{\mathfrak{Set}}$ es la categoría concreta tal que:

(i) Para todo conjunto X,

$$\overline{\mathfrak{Set}}\,[X] = \{A \in \mathfrak{Set} : 1_{\mathfrak{Set}} A = X\} = \{X\}$$

(ii)

$$\left|\overline{\mathfrak{Set}}\right| = \{(1_{\mathfrak{Set}} X, X) : X \in \mathfrak{Set}\} = \{(X, X) : X \in \mathfrak{Set}\}$$

(iii) Para cualesquiera dos elementos $(X, X), (Y, Y)$ de la clase $\left|\overline{\mathfrak{Set}}\right|$,

$$\overline{\mathfrak{Set}}\,((X, X), (Y, Y)) = \{(1_{\mathfrak{Set}} f, (X, Y)) : f \in \mathfrak{Set}\,(X, Y)\} = \{(f, (X, Y)) : f \in \mathfrak{Set}\,(X, Y)\}$$

[✓]

Ejemplo 2.6 *Consíderese la categoría $\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}$ de los conjuntos variables y de las funciones variables.*

Puesto que para todo conjunto variable $X = (X_0, \varphi, X_1)$ es φ un subconjunto del producto cartesiano $X_0 \times X_1$, se puede definir

$$\Gamma : \mathfrak{Set}^{\{0,1\}} \to \mathfrak{Set}$$

para todo (X_0, φ, X_1), como

$$\Gamma\,(X_0, \varphi, X_1) = \varphi \cup [X_1 - \varphi\,(X_0)]$$

y para toda función variable

$$f = (f_0, f_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\,((X_0, \varphi, X_1), (Y_0, \psi, Y_1))$$

sea

$$\Gamma f : \varphi \cup [X_1 - \varphi\,(X_0)] \to \psi \cup [Y_1 - \psi\,(Y_0)]$$

la función definida por

$$\Gamma f\,(x_0, \varphi\,(x_0)) = (f_0\,(x_0), f_1\,(\varphi\,(x_0))),\ \text{si}\ \ (x_0, \varphi\,(x_0)) \in \varphi$$

y

$$\Gamma f\,(x_1) = f_1\,(x_1),\ \text{si}\ x_1 \in X_1 - \varphi\,(X_0)$$

Entonces:

$[a]$ Para cualesquiera

$$(f_0, f_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\,((X_0, \varphi, X_1), (Y_0, \psi, Y_1)) \qquad \text{y} \qquad (g_0, g_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\,((Y_0, \psi, Y_1), (Z_0, \zeta, Z_1))$$

y para cualesquier $(x_0, \varphi(x_0)) \in \varphi$ y $x_1 \in X_1 - \varphi(X_0)$, se tiene:

$$\begin{aligned}\Gamma[(g_0, g_1)(f_0, f_1)](x_0, \varphi(x_0)) &= \Gamma(g_0 f_0, g_1 f_1)(x_0, \varphi(x_0)) \\ &= (g_0 f_0(x_0), g_1 f_1(\varphi(x_0))) \\ &= \Gamma(g_0, g_1)(f_0(x_0), f_1(\varphi(x_0))) \\ &= \Gamma(g_0, g_1)[\Gamma(f_0, f_1)(x_0, \varphi(x_0))] \\ &= [\Gamma(g_0, g_1)][\Gamma(f_0, f_1)](x_0, \varphi(x_0))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma[(g_0, g_1)(f_0, f_1)](x_1) &= \Gamma(g_0 f_0, g_1 f_1)(x_1) \\ &= g_1 f_1(x_1) \\ &= \Gamma(g_0, g_1)(f_1(x_1)) \\ &= \Gamma(g_0, g_1)[\Gamma(f_0, f_1)(x_1)] \\ &= [\Gamma(g_0, g_1)][\Gamma(f_0, f_1)](x_1)\end{aligned}$$

lo que significa que Γ preserva composiciones.

[*b*] Para cualquier conjunto variable $X = (X_0, \varphi, X_1)$ y para cualesquier $(x_0, \varphi(x_0)) \in \varphi$ y $x_1 \in X_1 - \varphi(X_0)$, se tiene:

$$\begin{aligned}\Gamma 1_{(X_0, \varphi, X_1)}(x_0, \varphi(x_0)) &= \Gamma(1_{X_0}, 1_{X_1})(x_0, \varphi(x_0)) \\ &= (1_{X_0}(x_0), 1_{X_1}(\varphi(x_0))) \\ &= (x_0, \varphi(x_0)) \\ &= 1_{\varphi \cup [X_1 - \varphi(X_0)]}(x_0, \varphi(x_0)) \\ &= 1_{\Gamma(X_0, \varphi, X_1)}(x_0, \varphi(x_0))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma 1_{(X_0, \varphi, X_1)}(x_1) &= \Gamma(1_{X_0}, 1_{X_1})(x_1) \\ &= 1_{X_1}(x_1) = x_1 \\ &= 1_{\varphi \cup [X_1 - \varphi(X_0)]}(x_1) \\ &= 1_{\Gamma(X_0, \varphi, X_1)}(x_1)\end{aligned}$$

o sea que Γ también preserva identidades.

Por otra parte, si

$$(f_0, f_1), (f_0', f_1') \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}((X_0, \varphi, X_1), (Y_0, \psi, Y_1))$$

son tales que

$$\Gamma(f_0, f_1) = \Gamma(f_0', f_1') \qquad \cdots (\bigstar)$$

entonces

$$(f_0(x_0), f_1(\varphi(x_0))) = (f_0'(x_0), f_1'(\varphi(x_0))) \qquad \forall (x_0, \varphi(x_0)) \in \varphi$$

$$\therefore \quad f_0(x_0) = f_0'(x_0) \qquad \forall x_0 \in X_0$$

Esto significa que son iguales las funciones f_0 y f_0'. En cuanto a f_1 y a f_1', la igualdad de las parejas también implica que son iguales sus segundas componentes, de manera que

$$f_1 |_{\varphi(X_0)} = f_1' |_{\varphi(X_0)}$$

Finalmente, si $x_1 \in X_1 - \varphi(X_0)$, entonces la igualdad $(\bigstar)$ implica que

$$f_1(x_1) = f_1'(x_1)$$

Esto junto con la igualdad anterior hacen la prueba de que también son iguales las funciones f_1 y f_1'. Es decir, además de tener iguales sus dominios e iguales sus codominios, las funciones f_0, f_0' y f_1, f_1' tienen respectivamente iguales sus reglas de correspondencia. Luego, $(f_0, f_1) = (f_0', f_1')$. Esto demuestra que la función

$$\Gamma_{(X,Y)} : \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\left(\left(X_0, \varphi, X_1\right), \left(Y_0, \psi, Y_1\right)\right) \to \mathfrak{Set}\left(\varphi \cup \left[X_1 - \varphi\left(X_0\right)\right], \psi \cup \left[Y_1 - \psi\left(Y_0\right)\right]\right)$$

es inyectiva. Por lo tanto, Γ es un funtor fiel y $\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}$ es concretable.

Denotando por $\overline{\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}}$ a la concreción correspondiente, tenemos:

(i) Para todo conjunto X,

$$\overline{\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}}[X] = \left\{A \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}} : \Gamma A = X\right\}$$

(ii)

$$\left|\overline{\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}}\right| = \left\{(\Gamma A, A) : A \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\right\}$$

(iii)

$$\overline{\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}}\left(\left(\Gamma A, A\right), \left(\Gamma B, B\right)\right) = \left\{\left(\Gamma f, (A, B)\right) : f \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(A, B)\right\}$$

[✓]

Obsérvese que para ningún conjunto X es vacía la clase $\overline{\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}}[X]$, pues al menos contiene a $(\emptyset, \phi, X)$

[✓]

Ejemplo 2.7 *Sea $A = (X, \leq)$ cualquier conjunto preordenado y sea $\mathcal{C}$ la categoría inducida por A. Según se ha visto en el capítulo anterior, la clase de objetos de $\mathcal{C}$ es X. Defínase*

$$\Gamma : \mathcal{C} \to \mathfrak{Set}$$

como

$$\Gamma a = \{a\}, \ \forall a \in X$$

$$\Gamma \langle a, b\rangle = f \in \mathfrak{Set}\left(\{a\}, \{b\}\right)$$

Entonces:

$[a]$ Cualesquiera que sean los $\mathcal{C}$-morfismos $\langle a, b\rangle$ y $\langle b, c\rangle$, se tiene que

$$\Gamma\left(\langle b, c\rangle \circ \langle a, b\rangle\right) = \langle a, c\rangle = h \in \mathfrak{Set}\left(\{a\}, \{c\}\right)$$

Por otra parte, si

$$\Gamma \langle a, b\rangle = f \in \mathfrak{Set}\left(\{a\}, \{b\}\right) \qquad \text{y} \qquad \Gamma \langle b, c\rangle = g \in \mathfrak{Set}\left(\{b\}, \{c\}\right)$$

entonces

$$\left[\Gamma \langle b, c\rangle\right]\left[\Gamma \langle a, b\rangle\right] = gf \in \mathfrak{Set}\left(\{a\}, \{c\}\right)$$

Como sólo hay una función de $\{a\}$ en $\{c\}$, entonces $gf = h$, por lo que

$$\Gamma\left(\langle b, c\rangle \circ \langle a, b\rangle\right) = \left[\Gamma \langle b, c\rangle\right]\left[\Gamma \langle a, b\rangle\right]$$

es decir, Γ preserva composiciones.

$[b]$ Cualquiera que sea $a \in X$,

$$\Gamma \langle a, a\rangle = 1_{\{a\}} = 1_{\Gamma a}$$

lo que significa que Γ también preserva identidades. Por lo tanto, Γ es un funtor de $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{Set}$.

Sean $a, b \in X$ cualesquiera y considérese la función

$$\Gamma_{(a,b)} : \mathcal{C}(a, b) \to \mathfrak{Set}\left(\{a\}, \{b\}\right)$$

Hay que analizar dos posibles casos:

1º $a \nleq b$; entonces $\mathcal{C}(a,b)$ es vacío, por lo que es válida la implicación

$$u, v \in \mathcal{C}(a,b), u \neq v \Rightarrow \Gamma_{(a,b)}(u) \neq \Gamma_{(a,b)}(v)$$

2º $a \leq b$; entonces $\mathcal{C}(a,b) = \{\langle a,b\rangle\}$ y $\Gamma_{(a,b)}$ es inyectiva.
Esto demuestra que Γ es un funtor fiel. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es concretable.
Denotando por $\overline{\mathcal{C}}$ a la concreción de $\mathcal{C}$, se tiene:
(i) Para cualquier conjunto Y

$$\overline{\mathcal{C}}[Y] = \{a \in X : \Gamma a = Y\} = \{a \in X : \{a\} = Y\}$$

(ii)

$$\left|\overline{\mathcal{C}}\right| = \{(\Gamma a, a) : a \in X\} = \{(\{a\}, a) : a \in X\}$$

(iii)

$$\overline{\mathcal{C}}((\{a\}, a), (\{b\}, b)) = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } \mathcal{C}(a,b) = \varnothing \\ \left\{\left(\{a\} \xrightarrow{f} \{b\}, (a,b)\right)\right\}, \text{ si } \mathcal{C}(a,b) \neq \varnothing \end{cases}$$

[✓]

Ejemplo 2.8 *Sean, $G = (X, (*, e))$ un grupo arbitrario y $\mathcal{C}_G$ la categoría inducida por G. Sea*

$$\Gamma : \mathcal{C}_G \to \mathfrak{Set}$$

dado por

$$\Gamma O = X$$

y para cualquier $g \in \mathcal{C}_G(O,O)$

$$\Gamma g = h_g \in \mathfrak{Set}(X,X)$$

donde

$$h_g(x) = x * g, \qquad \forall x \in X$$

Entonces:

[a] Para cualesquiera

$$g_1 \in \mathcal{C}_G(O,O) \qquad \text{y} \qquad g_2 \in \mathcal{C}_G(O,O)$$

y para cualquier $x \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma(g_2 \circ g_1)(x) &= \Gamma(g_1 * g_2)(x) = h_{g_1 * g_2}(x) = x * (g_1 * g_2) \\ &= (x * g_1) * g_2 = h_{g_2}(x * g_1) = h_{g_2}(h_{g_1}(x)) \\ &= \Gamma g_2(h_{g_1}(x)) = \Gamma g_2(\Gamma g_1(x)) = [\Gamma g_2 \Gamma g_1](x) \end{aligned}$$

Esto significa la preservación de composiciones por parte de Γ.
[b] Para cualquier $x \in X$ se tiene

$$\Gamma 1_O(x) = \Gamma e(x) = h_e(x) = x * e = x = 1_X(x) = 1_{\Gamma O}(x)$$

lo cual significa la preservación de identidades por parte de Γ.
Por otro lado, considerando la función

$$\Gamma_{(O,O)} : \mathcal{C}_G(O,O) \to \mathfrak{Set}(X,X)$$

y escogiendo

$$g_1, g_2 \in \mathcal{C}_G(O,O), \qquad g_1 \neq g_2$$

entonces

$$h_{g_1}(e) = e * g_1 = g_1 \neq g_2 = e * g_2 = h_{g_2}(e)$$

Por lo tanto, también

$$\Gamma g_1 \neq \Gamma g_2$$

Esto demuestra que Γ es un funtor fiel; consecuentemente, $\mathcal{C}_G$ es concretable.

Denotando por $\overline{\mathcal{C}_G}$ a la concreción de $\mathcal{C}_G$, se tiene que:

(i) Para cualquier conjunto Y

$$\overline{\mathcal{C}_G}[Y] = \{A \in \mathcal{C}_G : \Gamma A = Y\} = \begin{cases} \{O\}, \text{ si } Y = X \\ \emptyset, \text{ si } Y \neq X \end{cases}$$

(ii)

$$\left|\overline{\mathcal{C}_G}\right| = \{(\Gamma A, A) : A \in \mathcal{C}_G\} = \{(X, O)\}$$

(iii)

$$\overline{\mathcal{C}_G}((X,O),(X,O)) = \{(\Gamma g, (O,O)) : g \in \mathcal{C}_G(O,O)\} = \{h_g : g \in X\}$$

[✓]

Ejemplo 2.9 *Sea*

$$\mathtt{Pot} : \mathfrak{Set} \to \mathfrak{Set}$$

tal que, para todo $X \in \mathfrak{Set}$*,*

$$\mathtt{Pot}X = 2^X$$

donde 2^X *denota al conjunto de subconjuntos de* X*. En tanto, para toda* $f \in \mathfrak{Set}(X,Y)$*,*

$$\mathtt{Pot}f = 2^f \in \mathfrak{Set}\left(2^X, 2^Y\right)$$

se define, para todo $A \in 2^X$ *por*

$$2^f(A) = f(A)$$

donde $f(A)$ *denota a la imagen de* A *bajo* f*; es decir:*

$$f(A) = \{f(a) \in Y : a \in A\}$$

$[a]$ Si

$$f \in \mathfrak{Set}(X,Y) \qquad \text{y} \qquad g \in \mathfrak{Set}(Y,Z)$$

entonces

$$\mathtt{Pot}gf = 2^{gf}$$

es tal que para cualquier $A \in 2^X$

$$2^{gf}(A) = gf(A) = g(f(A)) = 2^g(f(A)) = 2^g\left(2^f(A)\right) = 2^g 2^f(A)$$

Por lo tanto, Pot preserva composiciones.

$[b]$ Para cualquier conjunto X se tiene que

$$2^{1_X}(A) = 1_X(A) = A, \forall A \in 2^X$$

es decir

$$2^{1_X} = 1_{2^X}$$

Por lo tanto, Pot preserva identidades.

Por otra parte, fijando dos conjuntos cualesquiera X y Y, considérese la función

$$\mathtt{Pot}_{(X,Y)} : \mathfrak{Set}(X,Y) \to \mathfrak{Set}\left(2^X, 2^Y\right)$$

Si se toman $f, f' \in \mathfrak{Set}(X,Y)$, $f \neq f'$, entonces existe $x \in X$ tal $f(x) \neq f'(x)$; consecuentemente:

$$2^f(\{x\}) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \neq \{f'(x)\} = f'(\{x\}) = 2^{f'}(\{x\})$$

Esto significa que $\mathtt{Pot}_{(X,Y)}$ es inyectiva; por lo tanto, Pot es un funtor fiel e induce una concreción $\overline{\overline{\mathfrak{Set}}}$ de $\mathfrak{Set}$. Se tiene:

(i) Para todo conjunto X

$$\overline{\overline{\mathfrak{Set}}}[X] = \left\{A \in \mathfrak{Set} : 2^A = X\right\}$$

(ii)

$$\left|\overline{\overline{\mathfrak{Set}}}\right| = \left\{\left(2^A, A\right) : A \in \mathfrak{Set}\right\}$$

(iii)

$$\overline{\overline{\mathfrak{Set}}}\left(\left(2^A, A\right), \left(2^B, B\right)\right) = \left\{\left(2^f, (A, B)\right) : f \in \mathfrak{Set}\,(A, B)\right\}$$

[✓]

Observación 2.4 *Aunque las concreciones $\overline{\mathfrak{Set}}$ y $\overline{\overline{\mathfrak{Set}}}$ son categorías isomorfas (pues ambas son isomorfas a $\mathfrak{Set}$ y; de acuerdo al segundo ejercicio, $\cong$ es una relación de equivalencia), existen sin embargo diferencias notables entre una y otra: En $\overline{\mathfrak{Set}}$, la clase de estructuras de cualquier conjunto X nunca es vacía (porque consta de X), en tanto que en $\overline{\overline{\mathfrak{Set}}}$ son vacías las clases de estructuras de los conjuntos que no son potencia de ningún conjunto. Esto es desconcertante; uno esperaría que, sin importar cuál sea el funtor fiel al que se recurra, las concreciones obtenenidas deberían de ser esencialmente "idénticas". Al no estar ocurriendo así, conviene extremar cuidados con el lenguaje. Los nombres que se están empleando sugieren tomar por concreta a una categoría de la que se haya probado su concretabilidad; pero esta observación advierte lo riesgoso que puede ser proceder de ese modo. Sólo cabe tomar por concreta a una categoría concretable cuando se esté seguro de que todas sus concreciones conducen esencialmente a una misma categoría concreta.*

Ejercicio 2.3 *En conformidad con la observación anterior, ¿cabe tomar por concretas a las categorías pequeñas inducidas por copros o por grupos?*

2.1. Una categoría que no es concretable

La parte que ahora inicia exhibe un ejemplo de una categoría que no es concretable. Su construcción requiere los conceptos y resultados que siguen.

Definición 2.8 *Una **subcategoría** de una categoría $\mathfrak{R}$ es una categoría $\wp$ tal que:*

($\cdot$) Todo $\wp$-objeto es un $\mathfrak{R}$-objeto.
($\cdot\cdot$) Todo $\wp$-morfismo es un $\mathfrak{R}$-morfismo.
($\because$) Para $\wp$-morfismos cualesquiera, f, g, h, la igualdad

$$h = gf$$

ocurre en $\wp$ si, y sólo si, ocurre en $\mathfrak{R}$.

Lema 2.1 *Sean, $\mathfrak{R}$ una categoría y*

$$F : \mathfrak{R} \to \mathfrak{Set}$$

un funtor, arbitrarios. Si F es fiel, entonces existe una subcategoría de $\mathfrak{Set}$ que es isomorfa a $\mathfrak{R}$.

Demostración. Considérese la colección $\underline{S}$ que consta de dos clases: $|\underline{S}|$ y $\mathcal{F}$.
La clase

$$|\underline{S}| = \{FA : A \in \mathfrak{R}\}$$

Los miembros de la clase $\mathcal{F}$ son funciones del tipo

$$Ff : FA \to FB \quad \text{,donde} \quad f \in \mathfrak{R}\,(A, B)$$

1. Si ahora se definen

$$d : \mathcal{F} \to |\underline{S}| \qquad \text{y} \qquad c : \mathcal{F} \to |\underline{S}|$$

mediante
$$d\,(Ff) = FA \qquad \text{y} \qquad c\,(Ff) = FB$$
si es
$$f \in \Re\,(A, B)$$
entonces la cuarteta
$$(|\underline{S}|\,, \mathcal{F}, d, c)$$
es una digráfica.

2.

(i) Sean
$$Ff \in |\underline{S}|\,(FA, FB) \qquad \text{y} \qquad Fg \in |\underline{S}|\,(FB, FC)$$
Entonces, la composición entre funciones permite la referencia a un elemento
$$Fg \circ Ff \in |\underline{S}|\,(FA, FB)$$

(ii) La existencia del $\Re$-morfismo identidad 1_A, para todo $A \in \Re$, permite la referencia a un elemento
$$F1_A \in |\underline{S}|\,(FA, FA)$$
dado cualquier $FA \in |\underline{S}|$.

Esto significa que la digráfica $(|\underline{S}|\,, \mathcal{F}, d, c)$ constituye un sistema deductivo.

3. Sea $\equiv$ la relación en $\mathcal{F}$ definida, para cualesquiera
$$Ff, Ff' \in \mathcal{F}$$
mediante
$$Ff \equiv Ff'$$
si, y sólo si,
$$d\,(Ff) = d\,(Ff')\,, \qquad c\,(Ff) = c\,(Ff')$$
y
$$Ff\,(a) = Ff'\,(a)\,, \forall a \in d\,(Ff)$$
Entonces:

(iii) Dados
$$Ff \in \underline{S}\,(FA, FB) \qquad \text{y} \qquad Fg \in \underline{S}\,(FB, FC)$$
debido a las propiedades funtoriales de F se tiene:
$$F1_B \circ Ff = F\,(1_B f) = Ff$$
y
$$Fg \circ F1_B = F\,(g1_B) = Fg$$
Puesto que éstas son igualdades entre funciones, implican que
$$d\,(F1_B \circ Ff) = d\,(Ff) \quad , \; c\,(F1_B \circ Ff) = c\,(Ff)$$
y
$$d\,(Fg \circ F1_B) = d\,(Fg) \quad , \; c\,(Fg \circ F1_B) = c\,(Fg)$$
y además que
$$(F1_B \circ Ff)\,(a) = Ff\,(a)\,, \forall a \in FA \qquad \text{y} \qquad (Fg \circ F1_B)\,(b) = Fg\,(b)\,, \forall b \in FB$$
Por lo tanto
$$F1_B \circ Ff \equiv Ff \qquad \text{y} \qquad Fg \circ F1_B \equiv Fg$$

(iv) Puesto que la composición entre funciones es asociativa, para

$$Ff \in \underline{S}(FA, FB) \qquad Fg \in \underline{S}(FB, FC) \qquad Fh \in \underline{S}(FC, FD)$$

se tiene

$$Fh \circ (Fg \circ Ff) = (Fh \circ Fg) \circ Ff$$

Como ésta es una igualdad entre funciones, implica:

$$Fh \circ (Fg \circ Ff) \equiv (Fh \circ Fg) \circ Ff$$

Esto demuestra que la cuarteta

$$\underline{S} = (|\underline{S}|, \mathcal{F}, d, c)$$

es una categoría.

Puesto que la ley de composición que rige en $\underline{S}$ es la composición ordinaria entre funciones, es claro que si para $\underline{S}$-morfismos Ff, Fg, Fh sucede en $\mathfrak{Set}$ la igualdad

$$Fh = Fg \circ Ff$$

entonces esta igualdad también sucede en $\underline{S}$. Por lo tanto, se satisfacen $(\cdot), (\cdot\cdot), (\because)$ de la definición anterior; es decir, $\underline{S}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Set}$.

Ahora defínase

$$G : \Re \to \underline{S}$$

mediante

$$GA = FA, \forall A \in \Re \qquad \text{y} \qquad Gf = Ff, \forall f \in \Re$$

Puesto que se está definiendo en términos de F, G hereda las propiedades que lo convierten en funtor. En efecto:

$[a]$ G preserva composiciones, porque para

$$f \in \Re(A, B) \qquad \text{y} \qquad g \in \Re(B, C)$$

se tiene

$$G(gf) = F(gf) = FgFf = GgGf$$

$[b]$ G preserva identidades, porque para cualquier $A \in \Re$ se tiene

$$G1_A = F1_A = 1_{FA} = 1_{GA}$$

Además se pueden definir,

$$G^{-1} : \underline{S} \to \Re$$

haciendo

$$G^{-1}FA = A, \forall FA \in |\underline{S}|$$

y

$$G^{-1}Ff = f, \forall Ff \in \mathcal{F}$$

que, debido a la fidelidad de F, es una regla bien definida. Es fácil comprobar que G^{-1} preserva composiciones e identidades, con lo que el lema queda demostrado.

[✓]

Corolario 2.2 *Toda categoría concreta es isomorfa a una subcategoría de* $\mathfrak{Set}$.

Demostración. En efecto: Se ha visto que si $\underline{K}$ es concreta, es fiel el funtor que olvida

$$U : \underline{K} \to \mathfrak{Set}$$

por lo que aplica el lema anterior.

[✓]

Definición 2.9 *(a) Sean, $\mathfrak{R}$ una categoría y A_1, A_2 dos $\mathfrak{R}$-objetos, arbitrarios. Un (A_1, A_2)-**abanico** es cualquier par de $\mathfrak{R}$-morfismos (f_1, f_2) cuyos codominios sean A_1 y A_2, respectivamente, y que comparten a algún $\mathfrak{R}$-objeto A como dominio común; es decir, un (A_1, A_2)-**abanico** es cualquier diagrama del tipo*

$$\begin{tikzcd} A_1 & & A_2 \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

*(b) Dos (A_1, A_2)-abanicos (f_1, f_2) y (f_1', f_2') son **equivalentes** si cualesquiera que sean*

$$g_i \in \mathfrak{R}(A_i, B), i \in \{1, 2\}$$

los diagramas

$$\begin{tikzcd} & B & \\ A_1 \arrow[ur, "g_1"] & & A_2 \arrow[ul, "g_2"'] \\ & A \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} & B & \\ A_1 \arrow[ur, "g_1"] & & A_2 \arrow[ul, "g_2"'] \\ & A' \arrow[ul, "f_1'"] \arrow[ur, "f_2'"'] & \end{tikzcd}$$

son simultaneamente conmutativos ó son simultaneamente no conmutativos.

Definición 2.10 *Sea $\mathfrak{R}$ cualquier categoría. Se dice que $\mathfrak{R}$ **satisface la condición de Isbell** si para cualquier par de $\mathfrak{R}$-objetos A_1, A_2 existe un conjunto $M_{(A_1,A_2)}$ de (A_1, A_2)-abanicos tal que todo (A_1, A_2)-abanico es equivalente a exactamente un elemento de $M_{(A_1,A_2)}$.*

En adelante, los símbolos $\mathbb{N}$ y $\widetilde{\mathbb{N}}$ denotarán a los conjuntos

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} \qquad \text{y} \qquad \widetilde{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, ...\}$$

Ejercicio 2.4 *Para el conjunto $\widetilde{\mathbb{N}}$ considérese el preorden usual $\leq$ y para el conjunto $\mathbb{N}$ considérese el preorden $\preceq$ definido mediante la divisibilidad*

$$m \preceq n \Leftrightarrow m \mid n$$

Demuestre que las categorías pequeñas inducidas por los copros

$$\left(\widetilde{\mathbb{N}}, \leq\right) \qquad y \qquad (\mathbb{N}, \preceq)$$

satisfacen la condición de Isbell.

Ejercicio 2.5 *Un **monoide** es una pareja $(X, (*, e))$ en la que X es un conjunto, $*$ es una operación binaria asociativa en X y $e \in X$ es un elemento neutro bajo la operación $*$.*

(a) Demuestre que, del mismo modo en que un grupo G induce una categoría $\mathcal{C}_G$, también un monoide M induce una categoría $\mathcal{C}_M$.

(b) Demuestre que las categorías pequeñas inducidas por los monoides

$$\left(\widetilde{\mathbb{N}}, (+, 0)\right) \qquad \text{y} \qquad (\mathbb{N}, (\times, 1))$$

satisfacen la condición de Isbell.

Proposición 2.3 $\mathfrak{Set}$ *satisface la condición de Isbell.*

Demostración. Sean $A_1, A_2 \in \mathfrak{Set}$, arbitrarios. Para cada relación $\rho \in \mathtt{Pot}\,(A_1 \times A_2)$ sean p_ρ y q_ρ las proyecciones

$$\begin{array}{rccc} p_\rho : & \rho & \to & A_1 \\ & (a_1, a_2) & \mapsto & a_1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} q_\rho : & \rho & \to & A_2 \\ & (a_1, a_2) & \mapsto & a_2 \end{array}$$

Entonces (p_ρ, q_ρ) es un (A_1, A_2)-abanico. Considérese el conjunto

$$\widetilde{M}_{(A_1,A_2)} = \{(p_\rho, q_\rho) : \rho \in \mathtt{Pot}\,(A_1 \times A_2)\}$$

y supóngase que (f_1, f_2) es un (A_1, A_2)-abanico. Siendo A el dominio común de f_1 y f_2, obsérvese que a (f_1, f_2) puede asociársele el conjunto

$$\varrho_{(f_1,f_2)} = \{(f_1(a), f_2(a)) : a \in A\} \in \mathtt{Pot}\,(A_1 \times A_2)$$

Entonces

$$(f_1, f_2) \sim \left(p_{\varrho_{(f_1,f_2)}}, q_{\varrho_{(f_1,f_2)}}\right) \in \widetilde{M}_{(A_1,A_2)}$$

En efecto, dado cualquier par $g_i \in \mathfrak{Set}(A_i, B)$, $i \in \{1, 2\}$, tenemos

$$g_1 f_1(a) = g_2 f_2(a) \Leftrightarrow g_1 p_{\rho_{(f_1,f_2)}}(f_1(a), f_2(a)) = g_2 q_{\rho_{(f_1,f_2)}}(f_1(a), f_2(a))$$

Esto prueba que $\widetilde{M}_{(A_1,A_2)}$ contiene al menos un elemento equivalente a cualquier (A_1, A_2)-abanico dado. Por el Axioma de Elección existe un subconjunto $M_{(A_1,A_2)}$ de $\widetilde{M}_{(A_1,A_2)}$ con la propiedad que exige la condición de Isbell. $[\checkmark]$

Corolario 2.3 *Toda subcategoría $\underline{S}$ de $\mathfrak{Set}$ satisface la condición de Isbell.*

Demostración. En efecto, cualquier par de (A_1, A_2)-abanicos en $\underline{S}$ que sean no equivalentes son (A_1, A_2)-abanicos en $\mathfrak{Set}$ no equivalentes. Debido a la proposición anterior, tales abanicos no pueden constituir una clase propia. Por lo tanto, $\underline{S}$ también satisface la condición de Isbell. $[\checkmark]$

Proposición 2.4 *Sean $\Re$ y $\wp$ categorías arbitrarias. Si $\Re \cong \wp$ y $\wp$ satisface la condición de Isbell, entonces $\Re$ también la satisface.*

Demostración. Sea $F : \wp \cong \Re$ y sean $A_1, A_2 \in \Re$; entonces existen $P_1, P_2 \in \wp$ tales que $FP_1 = A_1$ y $FP_2 = A_2$. Por hipótesis, en $\wp$ existe un conjunto $M_{(P_1,P_2)}$ de (P_1, P_2)-abanicos que contiene un único (P_1, P_2)-abanico equivalente a cualquier (P_1, P_2)-abanico dado. Sea

$$M_{(FP_1,FP_2)} = \left\{(F\varphi_1, F\varphi_2) : (\varphi_1, \varphi_2) \in M_{(P_1,P_2)}\right\} \;;$$

entonces $M_{(FP_1,FP_2)}$ es un conjunto de (A_1, A_2)-abanicos, y si (f_1, f_2) es un (A_1, A_2)-abanico arbitrario, existe un (P_1, P_2)-abanico (g_1, g_2) tal que $Fg_i = f_i$, $i \in \{1, 2\}$, debido a que F es un isomorfismo. Pero $(g_1, g_2) \sim (\varphi_1, \varphi_2)$, para algún abanico $(\varphi_1, \varphi_2) \in M_{(P_1,P_2)}$, de modo que

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ h_1 \nearrow & & \nwarrow h_2 \\ P_1 & \circlearrowleft & P_2 \\ g_1 \nwarrow & & \nearrow g_2 \\ & Q & \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} & R & \\ h_1 \nearrow & & \nwarrow h_2 \\ P_1 & \circlearrowleft & P_2 \\ \varphi_1 \nwarrow & & \nearrow \varphi_2 \\ & Q' & \end{array}$$

Pero debido a la fidelidad de F y a que F preserva composiciones, se tiene que

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ h_1 \nearrow & & \nwarrow h_2 \\ P_1 & \circlearrowleft & P_2 \\ g_1 \nwarrow & & \nearrow g_2 \\ & Q & \\ & \Updownarrow & \\ & FR & \\ Fh_1 \nearrow & & \nwarrow Fh_2 \\ FP_1 & \circlearrowleft & FP_2 \\ Fg_1 \nwarrow & & \nearrow Fg_2 \\ & FQ & \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} & R & \\ h_1 \nearrow & & \nwarrow h_2 \\ P_1 & \circlearrowleft & P_2 \\ \varphi_1 \nwarrow & & \nearrow \varphi_2 \\ & Q' & \\ & \Updownarrow & \\ & FR & \\ Fh_1 \nearrow & & \nwarrow Fh_2 \\ FP_1 & \circlearrowleft & FP_2 \\ F\varphi_1 \nwarrow & & \nearrow F\varphi_2 \\ & FQ' & \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{ccccccccc} & FR & & & & & FR & \\ Fh_1 \nearrow & & \nwarrow Fh_2 & & Fh_1 \nearrow & & \nwarrow Fh_2 \\ A_1 & \circlearrowleft & A_2 & \Leftrightarrow & A_1 & \circlearrowleft & A_2 \\ f_1 \nwarrow & & \nearrow f_2 & & F\varphi_1 \nwarrow & & \nearrow F\varphi_2 \\ & FQ & & & & FQ' & \end{array}$$

De aquí que $(f_1, f_2) \sim (F\varphi_1, F\varphi_2)$. Esto prueba que también $\Re$ satisface la condición de Isbell. $[\checkmark]$

Corolario 2.4 *Toda categoría concreta satisface la condición de Isbell.*

Demostración. Si $\underline{K}$ es una categoría concreta, entonces existe una subcategoría de $\mathfrak{Set}$, $\underline{S}$, con la cual $\underline{K}$ es isomorfa. Debido al corolario anterior, $\underline{S}$ satisface la condición de Isbell; y debido a la proposición precedente, $\underline{K}$ también la satisface. $[\checkmark]$

Ejercicio 2.6 *Sean:* C *una clase propia,* a, b, c *tres elementos que no pertenezcan a* C*,* $\Re$ *la colección que consta de dos clases, una de las cuales es*

$$|\Re| = \mathsf{C} \times \{b\} \cup \{a\} \cup \mathsf{C} \times \{c\}$$

en tanto que la otra clase es la unión de los conjuntos que se construyen a continuación:

$\Re(X, X) = 1_X, \forall X \in \Re;$
$\Re(a, (\alpha, b)) = \varnothing = \Re((\alpha, c), a);$
$\Re((\alpha, b), (\beta, b)) = \varnothing = \Re((\alpha, c), (\beta, c)), \forall \alpha, \beta \in \mathsf{C}, \alpha \neq \beta;$
$\Re((\alpha, b), a) = \{f_\alpha\}, \forall \alpha \in \mathsf{C};$
$\Re(a, (\alpha, c)) = \{g_\alpha, h_\alpha\}, (g_\alpha \neq h_\alpha), \forall \alpha \in \mathsf{C};$
$\Re((\alpha, c), (\beta, b)) = \varnothing, \forall \alpha, \beta \in \mathsf{C};$
$\Re((\alpha, b), (\alpha, c)) = \{g_\alpha f_\alpha, h_\alpha f_\alpha\}, (g_\alpha f_\alpha \neq h_\alpha f_\alpha), \forall \alpha \in \mathsf{C};$
$\Re((\alpha, b), (\beta, c)) = \{g_\beta f_\alpha = h_\beta f_\alpha\}, \forall \alpha, \beta \in \mathsf{C}, \alpha \neq \beta.$
Probar que $\Re$ es una categoría.

Obsérvese que la construcción de la categoría $\Re$ del ejercicio precedente impide que se satisfaga la condición de Isbell.

En efecto, esta construcción no permite la existencia de un conjunto $M_{(a,a)}$ que cumpla la condición, ya que para cada $\alpha \in \mathsf{C}$ existe un (a, a)-abanico que no es equivalente a ningún otro, pues de acuerdo con la definición de $\Re$, todo (a, a)-abanico es una pareja de la forma (f_α, f_α), con $\alpha \in \mathsf{C}$; pero si $\alpha \neq \alpha'$, entonces, de acuerdo con la construcción de los morfimos, se tienen dos cuadrados

$$\begin{array}{ccccccc} & (\alpha, b) & & \qquad & & (\alpha', b) & \\ f_\alpha \swarrow & & \searrow f_\alpha & & f_{\alpha'} \swarrow & & \searrow f_{\alpha'} \\ a & & a & & a & & a \\ g_\alpha \searrow & & \swarrow h_\alpha & & g_\alpha \searrow & & \swarrow h_\alpha \\ & (\alpha, c) & & & & (\alpha, c) & \end{array}$$

el primero de los cuales no es conmutativo en tanto que el segundo sí lo es. Esto significa que $(f_\alpha, f_\alpha) \nsim (f_{\alpha'}, f_{\alpha'})$. En consecuencia, la familia $M_{(a,a)}$ de (a, a)-abanicos es exactamente tan numerosa como C, que es una clase propia, y por lo tanto no constituye un conjunto.

Aplicando el resultado del corolario anterior, $\Re$ es ejemplo de una categoría que no es concretable. $[\checkmark]$

Observación 2.5 *Además de necesaria, la condición de Isbell también es suficiente para garantizar la concretabilidad de una categoría. Este es un problema que permaneció abierto cerca de diez años y fue resuelto por Peter Freyd en 1973.*[1]

Observación 2.6 *Otro ejemplo de categoría que no es concretable es* $\mathfrak{Top}_H$. *También se debe a Freyd la prueba de su no concretabilidad.*[2]

[1] P.J.Freyd: *Concreteness.* J.Pure Appl. Algebra 3 (1973) 171-191.
[2] *Symposia Mathematica IV* (INDAM Rome 1968-9), Academic Press, London, New York 1970, pp. 431-456.

Capítulo 3

Estructuras Iniciales

En lo que sigue, I denotará una familia de índices arbitraria.

Definición 3.1 *Sea $\mathfrak{K}$ una categoría arbitraria. Una* ***fuente en*** $\mathfrak{K}$ *o* $\mathfrak{K}$***-fuente*** *es una pareja $(A, (f_i)_I)$ en la que A es un $\mathfrak{K}$-objeto arbitrario y $(f_i)_I$ es una clase arbitraria de $\mathfrak{K}$-morfismos $f_i \in \mathfrak{K}(A, A_i)$, $i \in I$. En tal caso, A recibe el nombre de* ***dominio de la fuente****, la clase $(A_i)_I$ de $\mathfrak{K}$-objetos es el* ***codominio de la fuente*** *y cada morfismo f_i es* ***una flecha de la fuente****. Notaciones alternativas que también se emplearán al referirse a las fuentes son:*

$$\left(A \xrightarrow{f_i} A_i\right)_I \quad y \quad (f_i : A \to A_i)_I$$

Con frecuencia se considerarán fuentes en $\mathfrak{Set}$

$$(f_i : X \to X_i)_I$$

y se supondrá que cada miembro X_i de su codominio puede $\underline{K}$-estructurarse según una categoría concreta arbitraria $\underline{K}$. Ahora bien, con su codominio ya $\underline{K}$-estructurado la fuente deja de ser propiamente una $\mathfrak{Set}$-fuente; tampoco podrá considerársela una $\underline{K}$-fuente a menos que se muestre una $\underline{K}$-estructura para X que haga de cada una de las flechas un $\underline{K}$-morfismo. Esta es precisamente la finalidad al considerar esta situación: dar lugar al hallazgo y escrutinio de $\underline{K}$-estructuras para X que hagan de cada flecha de la fuente un $\underline{K}$-morfismo. Un abuso en la notación permite extender el vocablo *fuente* para abarcar con él a estas “fuentes híbridas”, indicando en cada caso de qué categoría concreta son objetos los miembros de su codominio.

Ejemplo 3.1 *Si $(X, (f_i)_I)$ es una fuente cuyo codominio es una familia $(X_i, \tau_i)_I$ de espacios topológicos, entonces la topología para X generada por*

$$\gamma = \left\{f_i^{-1}(U_i) : U_i \in \tau_i, \forall i \in I\right\}$$

es una $\mathfrak{Top}$-estructura para X que hace de cada f_i una función continua.

En efecto, sea $i \in I$ y sea τ la topología generada por γ; entonces

$$U \in \tau_i \Rightarrow f_i^{-1}(U) \in \gamma \subseteq \tau$$

Por lo tanto, $f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i)$ es continua.

La topología anterior es la **topología débil**[1] **para** X **correspondiente a** $(f_i)_I$ **y a** $(\tau_i)_I$.

Definición 3.2 *Sea X un conjunto arbitrario. Si $\digamma = (X, (f_i)_I)$ es una fuente cuyo codominio es una familia $(B_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos $B_i = (X_i, \xi_i)$ de una categoría concreta $\underline{K}$, entonces* ***una*** $\underline{\mathbf{K}}$***-estructura inicial para*** X ***con respecto a la fuente*** $\digamma$ *es una estructura $\xi \in \underline{K}[X]$ tal que si $B = (X, \xi)$ entonces:*

[1] También llamada **inicial**

(i) $f_i \in \underline{K}(B, B_i)$, $\forall i \in I$.
(ii) Si $A = (W, \omega)$ es un $\underline{K}$-objeto y $f : W \to X$ es una función tal que

$$f_i f \in \underline{K}(A, B_i), \forall i \in I$$

entonces $f \in \underline{K}(A, B)$.
Cuando ξ es una $\underline{K}$-estructura inicial para X con respecto a $\mathcal{F}$, se habla de $\mathcal{F}$ como de una **$\underline{\mathbf{K}}$-fuente inicial**.

Ejercicio 3.1 *Demuestre que las condiciones (i) y (ii) de la definición anterior pueden sintetizarse en una sola:*

Para cada $\underline{K}$-objeto $A = (W, \omega)$ y cada función $f : W \to X$

$$f \in \underline{K}(A, B) \Leftrightarrow f_i f \in \underline{K}(A, B_i), \forall i \in I$$

Ejercicio 3.2 *Sea $\mathcal{F} = (X, (f_i)_I)$ una fuente cuyo codominio es una familia $(X_i, \tau_i)_I$ de espacios topológicos. Probar que la topología débil para X correspondiente a $(f_i)_I$ y a $(\tau_i)_I$ es una $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para X con respecto a la fuente $\mathcal{F}$.*

Ejemplo 3.2 *Debido al ejercicio anterior, la topología débil para X correspondiente a $(f_i)_I$ y a $(\tau_i)_I$ es una $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para X con respecto a la fuente*

$$\mathcal{F} = (f_i : X \to (X_i, \tau_i))_I$$

Ejemplo 3.3 *Si $\overline{\mathfrak{Set}}$ es la concreción de $\mathfrak{Set}$ inducida por el funtor $1_{\mathfrak{Set}}$ y*

$$\mathcal{F} = (f_i : X \to (X_i, X_i))_I$$

es una fuente de codominio en $\overline{\mathfrak{Set}}$, entonces X es una $\overline{\mathfrak{Set}}$-estructura inicial para X con respecto a $\mathcal{F}$.

En efecto, $X \in \overline{\mathfrak{Set}}[X]$ y si $B = (X, X)$ y $B_i = (X_i, X_i)$, $\forall i \in I$, entonces:
(i) Como para cada $i \in I$, $f_i \in \mathfrak{Set}(X, X_i)$, entonces

$$1_{\mathfrak{Set}} f_i \in \overline{\mathfrak{Set}}((1_{\mathfrak{Set}} X, X), (1_{\mathfrak{Set}} X_i, X_i)), \forall i \in I$$

es decir

$$f_i \in \overline{\mathfrak{Set}}(B, B_i), \forall i \in I$$

(ii) Si $A = (W, W)$ y $f : W \to X$ es tal que para cada $i \in I$, $f_i f \in \overline{\mathfrak{Set}}(A, B_i)$, entonces [por el solo hecho de ser $f \in \mathfrak{Set}(W, X)$], $f \in \overline{\mathfrak{Set}}(A, B)$.

Definición 3.3 *(a) Sea $\mathfrak{R}$ una categoría arbitraria. Una $\mathfrak{R}$-fuente $\mathcal{F} = (B, (f_i)_I)$ es una **$\mathfrak{R}$-monofuente** si toda vez que para un $\mathfrak{R}$-objeto A cualquiera se tengan morfismos*

$$h, k \in \mathfrak{R}(A, B)$$

tales que $f_i h = f_i k$, $\forall i \in I$, resulta que $h = k$.

(b) Si $\mathcal{F} = (B, f)$ es una $\mathfrak{R}$-monofuente con una sola flecha f, entonces f recibe el nombre de **$\mathfrak{R}$-monomorfismo**.
(c) Si $\underline{K}$ es concreta y $\mathcal{F} = ((X, \xi), (f_i)_I)$ es una $\underline{K}$-fuente, se dice que $\mathcal{F}$ **separa puntos** si para cualesquiera puntos distintos del dominio de $\mathcal{F}$ existe al menos un $\underline{K}$-morfismo en la clase $(f_i)_I$ que los aplica en puntos distintos del miembro correspondiente del codominio de $\mathcal{F}$; en símbolos:

$$x \neq x' \Rightarrow f_i(x) \neq f_i(x'), \text{ p.a. } i \in I$$

Como se verá a continuación, en una categoría concreta las fuentes que separan puntos constituyen una parte (algunas veces propia) de las monofuentes.

Proposición 3.1 *Si $\underline{K}$ es concreta y $\mathcal{F} = ((X,\xi), (f_i)_I)$ es una $\underline{K}$-fuente que separa puntos, entonces $\mathcal{F}$ es monofuente.*

Demostración. Hay que probar que para

$$h, k \in \underline{K}((W,\omega), (X,\xi))$$

se tiene

$$h \neq k \Rightarrow f_i h \neq f_i k, \text{ p.a. } i \in I$$

Pero si $h \neq k$, entonces $h(w) \neq k(w)$, p.a. $w \in W$; como $\mathcal{F}$ separa puntos, existe $i \in I$ tal que

$$f_i h(w) \neq f_i k(w)$$

que es a lo que se quería llegar.$_{[\checkmark]}$

Ejemplo 3.4 *Como se sabe, los espacios topológicos pueden clasificarse según la posibilidad que haya en ellos de separar puntos y conjuntos de acuerdo con los llamados* axiomas de separación*. En ellos se establecen propiedades que dan lugar a categorías concretas cuyos objetos son espacios topológicos con tales propiedades y cuyos morfismos son funciones continuas. Como ejemplo considérese la* ***categoría de los espacios de Hausdorff y de las funciones continuas*** *que se denota por* $\mathbf{T_2}$.

Se sabe que $\tau \in \mathbf{T_2}[X]$ si, y sólo si, para cualesquiera puntos distintos $x, x' \in X$ existen $U, U' \in \tau$ tales que $x \in U$, $x' \in U'$ y $U \cap U' = \varnothing$.

Proposición 3.2 *Si*

$$\mathcal{F} = \left((X,\tau) \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i)\right)_I$$

es una monofuente de funciones continuas y $\tau_i \in \mathbf{T_2}[X_i]$, $\forall i \in I$, entonces $\tau \in \mathbf{T_2}[X]$.

Demostración. Por hipótesis, para

$$h, k : (W,\omega) \to (X,\tau)$$

continuas vale la implicación siguiente:

$$h \neq k \Rightarrow f_i h \neq f_i k, \text{ p.a. } i \in I$$

Sean $x, x' \in X$, $x \neq x'$, y para $W = \{w\}$ y $\omega = \{\{w\}, \varnothing\}$ defínanse

$$h, k : (W,\omega) \to (X,\tau)$$

como

$$h(w) = x \quad \text{ y } \quad k(w) = x'$$

Por ser constantes ambas funciones son continuas y son distintas porque $x \neq x'$; en consecuencia existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(x')$. Para esa i escójanse $U, U' \in \tau_i$ ajenos y tales que

$$f_i(x) \in U \quad \text{ y } \quad f_i(x') \in U'$$

Entonces $f_i^{-1}(U)$ y $f_i^{-1}(U')$ son abiertos ajenos en τ y

$$x \in f_i^{-1}(U) \quad \text{ y } \quad x' \in f_i^{-1}(U').$$

Esto prueba que también $\tau \in \mathbf{T_2}[X]$.$_{[\checkmark]}$

Como corolario de este resultado se pueden extraer condiciones suficientes para la existencia de $\mathbf{T_2}$-estructuras iniciales.

Corolario 3.1 *Sean, X un conjunto y $\mathcal{F} = (X, (f_i)_I)$ una fuente cuyo codominio es una familia $(X_i, \tau_i)_I$ de espacios de Hausdorff. Si $\mathcal{F}$ es una fuente que separa puntos, entonces a X se lo puede revestir con una $\mathbf{T_2}$-estructura inicial respecto de la fuente $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sea τ la topología débil para X correspondiente a $(f_i)_I$ y a $(\tau_i)_I$. Entonces $\mathcal{F}$ se convierte en una fuente de funciones continuas que es monofuente porque separa puntos. Como además $\tau_i \in \mathbf{T_2}[X]$, $\forall i \in I$, entonces, debido a la proposición anterior, τ es una $\mathbf{T_2}$-estructura para X. Además, si $(W, \omega) \in \mathbf{T_2}$ y $f : W \to X$ es una funcion tal que $f_i f$ es continua, $\forall i \in I$, entonces también $f : (W, \omega) \to (X, \tau)$ es continua porque $(W, \omega) \in \mathfrak{Top}$ y τ, por el ejercicio anterior, es una $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para X correspondiente a $\mathcal{F}$. Por lo tanto, τ es una $\mathbf{T_2}$-estructura inicial para X.$_{[\checkmark]}$

Proposición 3.3 *Sea $\mathcal{F} = ((X, \tau), (f_i)_I)$ una fuente de funciones continuas y supóngase que τ es una $\mathbf{T_2}$-estructura inicial para X con respecto a $\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ es monofuente.*

Demostración. Sean

$$h, k : (W, \omega) \to (X, \tau)$$

funciones continuas tales que

$$f_i h = f_i k, \forall i \in I$$

Considérese el espacio de Sierpinski (S, σ), donde $S = \{s_1, s_2\}$ y $\sigma = \{S, \{s_1\}, \varnothing\}$ y para $w \in W$ arbitraria pero fija, defínase

$$f_w : (S, \sigma) \to (X, \tau)$$

por

$$f_w(s_1) = h(w)$$
$$f_w(s_2) = k(w)$$

Entonces cada composición $f_i f_w$ es continua porque es constante para toda $i \in I$. Debido a la inicialidad de $\mathcal{F}$, también f_w es continua. Pero entonces $h(w)$ y $k(w)$ no pueden ser distintos ya que, como (X, τ) es de Hausdorff, si fuesen distintos existirían abiertos ajenos U y V en X tales que $h(w) \in U$ y $k(w) \in V$; pero entonces, debido a la continuidad de f_w,

$$\{s_1\} = f_w^{-1}(U) \quad \text{y} \quad \{s_2\} = f_w^{-1}(V)$$

serían abiertos en (S, σ), lo que es falso. Este argumento vale para toda $w \in W$; en consecuencia, $h = k$ y, por lo tanto, $\mathcal{F}$ es monofuente.$_{[\checkmark]}$

Corolario 3.2 *Toda $\mathbf{T_2}$-fuente inicial es monofuente.*$_{[\checkmark]}$

Definición 3.4 *Sea $\mathfrak{K}$ cualquier categoría; un morfismo $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ es un $\mathfrak{K}$-**isomorfismo** si existe $g \in \mathfrak{K}(B, A)$ tal que*

$$gf = 1_A \quad y \quad fg = 1_B$$

Proposición 3.4 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sean (X, ξ) y (Y, η) $\underline{K}$-objetos arbitrarios. Entonces son equivalentes:*

(a) $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo
(b) $f : X \to Y$ es una función biyectiva tal que

$$f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta)) \quad \text{y} \quad f^{-1} \in \underline{K}((Y, \eta), (X, \xi))$$

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) De acuerdo con la definición existe $g \in \underline{K}((Y, \eta), (X, \xi))$ tal que $gf = 1_{(X,\xi)}$ y $fg = 1_{(Y,\eta)}$; en consecuencia, $gf = 1_X$ y $fg = 1_Y$, lo cual significa que $f : X \to Y$ es una función invertible y por lo tanto biyectiva. Además, f es un $\underline{K}$-morfismo porque es $\underline{K}$-isomorfismo, y como, por su parte, $g = f^{-1}$ entonces tenemos que

$$f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta)) \quad \text{y} \quad f^{-1} \in \underline{K}((Y, \eta), (X, \xi))$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Es claro que f y f^{-1} son $\underline{K}$-morfismos tales que

$$f^{-1} f = 1_{(X,\xi)} \quad \text{y} \quad f f^{-1} = 1_{(Y,\eta)}$$

Por lo tanto, $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo como se quería demostrar.$_{[\checkmark]}$

Ejemplo 3.5 *Si $f : X \to Y$ es una función biyectiva, entonces*

$$f : (X, X) \to (Y, Y)$$

es un $\overline{\mathfrak{Set}}$-isomorfismo.

Ejemplo 3.6 *Los $\mathfrak{Top}$-isomorfismos son los homeomorfismos.*

Proposición 3.5 *Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta y $\mathcal{F} = \left(X \xrightarrow{f} (Y, \eta)\right)$ una $\underline{K}$-fuente con una sola flecha f que es biyectiva. Entonces, son equivalentes:*

(a) $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo.
(b) ξ es inicial para X con respecto a $\mathcal{F}$.
Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Por (a)

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo porque es un $\underline{K}$-isomorfismo. Por otra parte, si (W, ω) es un $\underline{K}$-objeto y $h : W \to X$ es una función tal que

$$fh \in \underline{K}\left((W, \omega), (Y, \eta)\right)$$

entonces, también resulta un $\underline{K}$-morfismo la composición

$$f^{-1}(fh) = \left(f^{-1}f\right)h = h : (W, \omega) \to (X, \xi)$$

con lo cual queda probado que ξ es inicial para X con respecto a $\mathcal{F}$.
(b) $\Rightarrow$ (a) Por hipótesis, $f : X \to Y$ es una función biyectiva; por (b)

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Finalmente, puesto que la función $f^{-1} : Y \to X$ es tal que

$$ff^{-1} = 1_Y \in \underline{K}\left((Y, \eta), (Y, \eta)\right)$$

resulta, debido a la inicialidad de ξ, que también

$$f^{-1} \in \underline{K}\left((Y, \eta), (X, \xi)\right)$$

Esto prueba que f es un $\underline{K}$-isomorfismo, como se quería demostrar. [✓]

La proposición que sigue permitirá un giro en el lenguaje al refirirse a las estructuras iniciales; ya no se dirá, por ejemplo, que ξ es *una* estructura inicial con respecto a la fuente $\mathcal{F}$ sino *la* estructura inicial con respecto a esa fuente, pues lo que establecerá es precisamente la unicidad de la inicialidad de ξ.

Proposición 3.6 *a) Si $\mathcal{F} = \left((X, \xi), (f_i)_I\right)$ es una $\underline{K}$-fuente inicial y $h : \left(X, \xi'\right) \to (X, \xi)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces la fuente $\mathcal{F}' = \left(\left(X, \xi'\right), (f_i h)_I\right)$ también es una $\underline{K}$-fuente inicial.*

b) Si

$$\mathcal{F} = \left((X, \xi) \xrightarrow{f_i} (X_i, \xi_i)\right)_I \quad \text{y} \quad \mathcal{F}' = \left(\left(X, \xi'\right) \xrightarrow{f_i} (X_i, \xi_i)\right)_I$$

son $\underline{K}$-fuentes iniciales, entonces existe un $\underline{K}$-isomorfismo $h : \left(X, \xi'\right) \to (X, \xi)$ tal que $f_i h = f_i$, $\forall i \in I$.

Demostración. a) Sea (W, ω) un $\underline{K}$-objeto arbitrario y supóngase que $f : W \to X$ es una función tal que $(f_i h) f$ es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$. Entonces hf es una función tal que $f_i(hf)$ es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$, de modo que, debido a la inicialidad de $\mathcal{F}$, hf resulta $\underline{K}$-morfismo. Como además h es un $\underline{K}$-isomorfismo entonces, debido al resultado establecido en la proposición anterior, también ξ' es inicial para X con respecto a la fuente cuya única flecha es h y, por lo tanto, también f es un $\underline{K}$-morfismo, que es a lo que se quería llegar.
b) Si

$$h = 1_X : \left(X, \xi'\right) \to (X, \xi)$$

entonces, como $\mathcal{F}'$ es una $\underline{K}$-fuente, resulta que

$$f_i 1_X = f_i : (X, \xi') \to (X_i, \xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$, de modo que, por la inicialidad de $\mathcal{F}$,

$$1_X \in \underline{K}\left((X, \xi'), (X, \xi)\right)$$

Análogamente, como $\mathcal{F}$ es una $\underline{K}$-fuente, resulta que

$$f_i 1_X^{-1} = f_i : (X, \xi) \to (X_i, \xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$, de modo que, por la inicialidad de $\mathcal{F}'$,

$$1_X^{-1} \in \underline{K}\left((X, \xi), (X, \xi')\right)$$

$$\begin{array}{ccc} (X, \xi') & \overset{1_X}{\rightleftarrows} & (X, \xi) \\ f_i \searrow & \circlearrowleft & \swarrow f_i \\ & (X_i, \xi_i) & \end{array}$$

Por lo tanto, 1_X es un $\underline{K}$-isomorfismo. [✓]

Se sabe que en $\mathfrak{Top}$ la topología débil para X es una (y, por el resultado anterior, es *la*) $\mathfrak{Top}$-estructura inicial con relación a cierta fuente $\mathcal{F}$. El nombre de *débil* le viene a consecuencia de ser la *menos fina* de las topologías para X que hace de cada flecha de $\mathcal{F}$ una función continua. El nombre de *inicial* en una $\underline{K}$-estructura obedece a razones análogas: es la "más chica" de las $\underline{K}$-estructuras para X que hace de cada flecha de $\mathcal{F}$ un $\underline{K}$-morfismo. Desde luego, se requiere establecer una jerarquía entre las $\underline{K}$-estructuras de X que dé sentido a tal afirmación. En $\mathfrak{Top}$, τ es menos fina que τ' si $\tau \subseteq \tau'$, lo cual es equivalente a pedir que

$$1_X : (X, \tau') \to (X, \tau)$$

sea continua. Esta condición es susceptible de generalización a cualquier categoría concreta.

Definición 3.5 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta arbitraria y sean $\theta, \xi \in \underline{K}[X]$ cualesquiera. Se dice que θ* ***es menos fina que*** *ξ o que ξ* ***es más fina que*** *θ si*

$$1_X : (X, \xi) \to (X, \theta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Para indicar que ξ es más fina que θ se escribe $\xi \leq_{\underline{K}} \theta$.

Ejemplo 3.7 *De acuerdo con lo anterior, si $\tau, \tau' \in \mathfrak{Top}[X]$ entonces*

$$\tau' \leq_{\mathfrak{Top}} \tau \Leftrightarrow \tau \subseteq \tau'$$

Ejemplo 3.8 *Para el ejemplo que sigue se introduce una nueva categoría concreta; es la* ***categoría de las gráficas dirigidas y de las funciones compatibles:*** *$\mathfrak{Gra}$.*

(i) La clase de $\mathfrak{Gra}$-estructuras para cada conjunto X es la familia de relaciones binarias en X:

$$\mathfrak{Gra}[X] = \{\alpha \mid \alpha \subseteq X \times X\}$$

(ii) Los $\mathfrak{Gra}$-objetos, llamados **gráficas dirigidas** son, por supuesto, las parejas del tipo (X, α), con $\alpha \in \mathfrak{Gra}[X]$. En tal caso, los elementos de X se llaman **vértices de la gráfica** y los de α **flechas** de la misma.

(iii) Dados $A = (X, \alpha)$ y $B = (Y, \beta)$ en $\mathfrak{Gra}$, los morfismos de A en B son las **funciones que son compatibles con** α **y** β, i.e.

$$\mathfrak{Gra}(A, B) = \{f \in \mathfrak{Set}(X, Y) \mid (x_1, x_2) \in \alpha \Rightarrow (f(x_1), f(x_2)) \in \beta\}$$

Es fácil ver que se satisfacen las condiciones (m_1) y (m_2) que definen a una categoría concreta.

En cuanto a la jerarquía entre $\mathfrak{Gra}$-estructuras de X tenemos que

$$\alpha \leq_{\mathfrak{Gra}} \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$$

En efecto, $1_X : (X, \alpha) \to (X, \beta)$ es un $\mathfrak{Gra}$-morfismo si, y sólo si,

$$(x_1, x_2) \in \alpha \Rightarrow (1_X(x_1), 1_X(x_2)) = (x_1, x_2) \in \beta$$

Proposición 3.7 *Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta y $\digamma = ((X, \xi), (f_i)_I)$ una $\underline{K}$-fuente inicial, cualesquiera. Entonces ξ es la menos fina de las $\underline{K}$-estructuras para X que hacen de cada f_i un $\underline{K}$-morfismo.*

Demostración. Supongamos que θ es otra $\underline{K}$-estructura para X que hace de cada f_i un $\underline{K}$-morfismo.

$$\begin{array}{ccc} (X, \theta) & \overset{1_X}{\rightarrow} & (X, \xi) \\ f_i \searrow & \circlearrowleft & \swarrow f_i \\ & (X_i, \xi_i) & \end{array}$$

Entonces, la composición $f_i 1_X$ es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$, lo cual, debido a la inicialidad de $\digamma$, implica que 1_X es un $\underline{K}$-morfismo, y esto significa precisamente que ξ es menos fina que θ. [✓]

El resultado anterior es útil cuando se da uno a la tarea de averiguar si existe una estructura inicial para X con respecto a una fuente cuyo codominio es una familia de objetos de alguna categoría concreta ya que entonces basta considerar todas aquellas estructuras para X que hacen de cada flecha de la fuente un morfismo. Un ejemplo aclarará lo dicho; para ello se presentará otra categoría concreta: $\mathfrak{Pos}$ es la **categoría de los conjuntos parcialmente ordenados** (*copos*) **y de las funciones monótonas**.

(i) $\mathfrak{Pos}[X]$ es la familia de órdenes parciales en el conjunto X, es decir, de relaciones binarias en X que son reflexivas, transitivas y antisimétricas.

(ii) En consecuencia, los $\mathfrak{Pos}$-objetos, que llamaremos copos, son parejas $(X, \leq)$ en las que X es un conjunto y $\leq$ es un orden parcial en X.

(iii) Los $\mathfrak{Pos}$-morfismos entre dos copos cualesquiera $A = (X, \leq_X)$ y $B = (Y, \leq_Y)$ son las funciones monótonas, es decir,

$$\mathfrak{Pos}(A, B) = \{f \in \mathfrak{Set}(X, Y) : x \leq_X x' \Rightarrow f(x) \leq_Y f(x')\}$$

Los axiomas (m_1) y (m_2) que definen a una categoría concreta se comprueban fácilmente.

Ahora considérese una fuente

$$\digamma = \left(X \overset{f_i}{\rightarrow} (Y_i, \leq_i)\right)_I$$

y pregúntese acerca de la existencia de un orden parcial para X que sea inicial con relación a $\digamma$.

De acuerdo con la proposición anterior, si tal orden existe debe ser el menos fino de los órdenes parciales para X que hacen de cada f_i una función monótona. Esta condición sugiere cómo definir tal orden parcial: Dados cualesquiera $x, x' \in X$,

$$x \preceq x' \Leftrightarrow f_i(x) \leq_i f_i(x'), \forall i \in I$$

Entonces, $\preceq$ resulta reflexivo y transitivo, como se verifica fácilmente, y la antisimetría viene a ser el parteaguas en la solución del problema porque:

1. Si $\preceq$ es antisimétrico, entonces es el orden parcial buscado.

2. Si $\preceq$ no es antisimétrico, entonces el orden parcial buscado no existe.

Demostración: 1. Por la definición de $\preceq$ está claro que

$$f_i : (X, \preceq) \to (Y_i, \leq_i)$$

es monótona, para toda $i \in I$. Por otra parte, sean $(T, \leq)$ un copo y $h : T \to X$ una función tales que toda composición

$$f_i h : (T, \leq) \to (Y_i, \leq_i)$$

es monótona. Entonces $t \leq t'$ implica

$$f_i\left(h\left(t\right)\right) \leq_i f_i\left(h\left(t'\right)\right), \forall i \in I$$

lo cual, de acuerdo con la definición de $\preceq$, es equivalente a escribir $h\left(t\right) \preceq h\left(t'\right)$. Luego,

$$h : \left(T, \leq\right) \rightarrow \left(X, \preceq\right)$$

es monótona, que es lo que había que demostrar para sostener que $\preceq$ es una $\mathfrak{Pos}$-estructura inicial para X con relación a $\mathcal{F}$.

2. Supongamos que pese a no ser antisimétrico $\preceq$ existiese, sin embargo, una $\mathfrak{Pos}$-estructura inicial $\leq$ para X con relación a $\mathcal{F}$. Siendo así, se probará que $\leq$ es menos fina que $\preceq$.

Sean $x_0, x_0' \in X$ tales que $x_0 \preceq x_0'$ y definamos un orden $\leqq$ en X como sigue:

$$x \leqq x' \Leftrightarrow x = x' \text{ o } \begin{cases} x = x_0 \\ \text{y} \\ x' = x_0' \end{cases}$$

Obsérvese que $x_0 \leqq x_0'$. Entonces, la composición

$$\left(X, \leqq\right) \xrightarrow{1_X} \left(X, \leq\right) \xrightarrow{f_i} \left(Y_i, \leq_i\right)$$

es monótona para toda $i \in I$, ya que si $x \leqq x'$ y:

i) $x = x'$, entonces $f_i\left(x\right) = f_i 1_X\left(x\right) = f_i 1_X\left(x'\right) = f_i\left(x'\right)$; $\therefore f_i\left(x\right) \leq_i f_i\left(x'\right), \forall i \in I$.

ii) $x = x_0$ y $x' = x_0'$, entonces $x \preceq x'$ lo cual, de acuerdo con la definición de $\preceq$, implica que también $f_i\left(x\right) \leq_i f_i\left(x'\right), \forall i \in I$.

Pero $\leq$ es inicial para X con relación a $\mathcal{F}$; luego,

$$1_X : \left(X, \leqq\right) \rightarrow \left(X, \leq\right)$$

es monótona, de modo que, como $x_0 \leqq x_0'$, entonces $x_0 \leq x_0'$. Si además de $x_0 \preceq x_0'$ se tuviera que también $x_0' \preceq x_0$, un razonamiento análogo llevaría a que también $x_0' \leq x_0$ y, por la antisimetría de $\leq$, sería $x_0 = x_0'$; es decir, $\preceq$ resultaría antisimétrica$\underset{\circ}{\nabla}$. Esto contradiría el supuesto de que $\preceq$ no es antisimétrica. Luego, falso suponer la existencia de un orden parcial para X que sea inicial con relación a $\mathcal{F}$.$_{[\checkmark]}$

Capítulo 4

Dualidad

En adelante, la notación $\Re^{\text{mor}}$ designará a la clase de los morfismos de la categoría $\Re$.

1. Sea $\Re$ cualquier categoría; entonces, la cuarteta

$$\left(|\Re|, \Re^{\text{mor}}, d, c\right)$$

constituye una digráfica. Sea $\wp$ la colección que consta de lo siguiente:

Una clase

$$|\wp| = |\Re|$$

Otra clase

$$\wp^{\text{mor}} = \Re^{\text{mor}}$$

Dos funciones d', c' entre estas clases definidas como

$$\begin{array}{rccc} d': & \wp^{\text{mor}} & \to & |\wp| \\ & f & \mapsto & c(f) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} c': & \wp^{\text{mor}} & \to & |\wp| \\ & f & \mapsto & d(f) \end{array}$$

Entonces, es claro que la cuarteta

$$\left(|\wp|, \wp^{\text{mor}}, d', c'\right)$$

constituye una digráfica.

2.

(i) Sean

$$f \in \wp(A, B) \qquad \text{y} \qquad g \in \wp(B, C)$$

Entonces

$$A = d'(f) = c(f), B = c'(f) = d(f) \qquad \text{y} \qquad B = d'(g) = c(g), C = c'(g) = d(g)$$

Puesto que

$$f \in \Re(d(f), c(f)) \qquad \text{y} \qquad g \in \Re(d(g), c(g))$$

entonces

$$f \in \Re(B, A) \qquad \text{y} \qquad g \in \Re(C, B)$$

por lo que se puede hacer referencia a la $\Re$-flecha

$$f \circ_{\Re} g \in \Re(C, A)$$

Consecuentemente, si se define

$$g \circ_{\wp} f = f \circ_{\Re} g$$

entonces se tendrá la referencia de una $\wp$-flecha

$$g \circ_{\wp} f \in \wp(A, C)$$

(ii) Sea $A \in |\wp|$; entonces,

$$\wp(A,A) = \Re(A,A)$$

por lo que se puede hacer referencia a la $\Re$-flecha 1_A.

Este par de hechos bastan para afirmar que la cuarteta

$$(|\wp|, \wp^{\text{mor}}, d', c')$$

constituye un sistema deductivo.

3. Por tratarse de una categoría, en $\Re^{\text{mor}}$ está definida una congruencia $\equiv_\Re$; puesto que toda $\wp$-prueba es una $\Re$-prueba, puede mirarse a $\equiv_\Re$ como una congruencia entre $\wp$-pruebas, definiendo

$$\equiv_\wp \quad = \quad \equiv_\Re$$

(iii) Sean

$$f \in \wp(A,B), g \in \wp(B,C), h \in \wp(C,D)$$

Entonces

$$h \circ_\wp (g \circ_\wp f) = (f \circ_\Re g) \circ_\Re h \equiv_\Re f \circ_\Re (g \circ_\Re h) = (h \circ_\wp g) \circ_\wp f$$

Por lo tanto

$$h \circ_\wp (g \circ_\wp f) \equiv_\wp (h \circ_\wp g) \circ_\wp f$$

(iv) Si

$$f \in \wp(A,B) \qquad \text{y} \qquad g \in \wp(B,C)$$

entonces

$$f \in \Re(B,A) \qquad \text{y} \qquad g \in \Re(C,B)$$

y se sabe que

$$(f \circ_\Re 1_B) \equiv_\Re f \qquad \text{y} \qquad g \equiv_\Re (1_B \circ_\Re g)$$

Por lo tanto

$$(1_B \circ_\wp f) \equiv_\wp f \qquad \text{y} \qquad g \equiv_\wp (g \circ_\wp 1_B)$$

Esto demuestra que la cuarteta

$$(|\wp|, \wp^{\text{mor}}, d', c')$$

constituye una categoría, para la cual se empleará la notación $\Re^{\text{op}}$.

$\Re^{\text{op}}$ es la **categoría dual** de la categoría $\Re$.

[✓]

Ejemplo 4.1 *La categoría dual, $\mathfrak{Set}^{op}$, a la categoría de los conjuntos tiene como objetos a todos los conjuntos y como conjunto de morfismos entre dos conjuntos X y Y arbitrarios a*

$$\mathfrak{Set}^{op}(X,Y) = \mathfrak{Set}(Y,X)$$

Es decir, un $\mathfrak{Set}^{op}$-morfismo de X en Y es una función de Y en X.

Ejercicio 4.1 *Sea $\mathcal{C}$ la categoría pequeña cuya clase de objetos es el conjunto subyacente X del conjunto preordenado $(X, \leq)$. Probar que $\mathcal{C}^{op}$ también es una categoría pequeña inducida por un conjunto preordenado.*

Ejercicio 4.2 *Sea $G = (X, \cdot, e)$ un grupo cualquiera y sea $\mathcal{C}_G$ la categoría con un sólo objeto O y cuyo conjunto de morfismos es X. Probar que también $\mathcal{C}_G^{op}$ es una categoría pequeña inducida por un grupo $G' = (X, *, e)$.*

Observación 4.1 *El hecho de que tanto los objetos como los morfismos de una categoría son objetos y morfismos en la categoría dual*[1]*, y que la composición de cualesquiera dos de sus morfismos se traduce en otra composición (la composición dual) en la categoría dual conlleva repercusiones teóricas de caracter profundo porque hace factible duplicar el contenido teórico de la teoría tanto a nivel proposicional como a nivel conceptual. Para entender cómo es esto posible, supóngase que* A *es una afirmación que tiene sentido en cualquier categoría; si con* $A(\Re)$ *denotamos la afirmación* A *en* $\Re$*, entonces* $A(\Re^{op})$ *es una afirmación con sentido en* $\Re^{op}$ *que puede interpretarse como otra afirmación en* $\Re$ *(la afirmación dual) que se denotará como* ${}^{co}A(\Re)$ *para distinguirla de* $A(\Re)$*.*

Así, si A define un concepto en cualquier categoría, entonces $A(\Re^{\mathrm{op}})$, que es la definición de tal concepto en $\Re^{\mathrm{op}}$, define *otro* concepto (el concepto dual o "co-concepto") en $\Re$. Más aún, si A fuese una proposición cuya validez ha sido demostrada *en cualquier categoría*, entonces $A(\Re^{\mathrm{op}})$ es una proposición verdadera que conserva su caracter de verdad aún leída como "co-proposición" en $\Re$.

Se ilustrará lo dicho con unos ejemplos:

Ejemplo 4.2 *La definición de monomorfismo dada en puede reescribirse de la manera siguiente:*

A : Un **monomorfismo** es un morfismo $f : A \to B$ tal que para todo par de morfismos $h, k : A' \to A$ se tiene que

$$fh = fk \Rightarrow h = k$$

Entonces, $A(\Re)$ es la definición de $\Re$-monomorfismo. $\Re$-escribámosla:

$A(\Re)$: Un $\Re$-monomorfismo es un $\Re$-morfismo $f \in \Re(A, B)$ tal que para todo par de $\Re$-morfismos $h, k \in \Re(A', A)$ se tiene que

$$f \circ h = f \circ k \Rightarrow h = k$$

Análogamente, $A(\Re^{\mathrm{op}})$ define monomorfismo en $\Re^{\mathrm{op}}$; si se quiere $\Re^{\mathrm{op}}$-escribirla sólo hay que "elevar a la op" algunas "letras" del párrafo anterior:

$A(\Re^{\mathrm{op}})$: Un $\Re^{\mathrm{op}}$-monomorfismo es un $\Re^{\mathrm{op}}$-morfismo $f \in \Re^{\mathrm{op}}(A, B)$ tal que para todo par de $\Re^{\mathrm{op}}$-morfismos $h, k \in \Re^{\mathrm{op}}(A', A)$ se tiene que

$$f \circ^{\mathrm{op}} h = f \circ^{\mathrm{op}} k \Rightarrow h = k$$

Llega el toque final: Leer a $A(\Re^{\mathrm{op}})$ como codefinición del coconcepto de monomorfismo en $\Re$; co-escribámosla:

${}^{\mathrm{co}}A(\Re)$: Un $\Re$-*comonomorfismo* es un $\Re$-morfismo $f \in \Re(B, A)$ tal que para todo par de $\Re$-morfismos $h, k \in \Re(A, A')$ se tiene que

$$h \circ f = k \circ f \Rightarrow h = k$$

Por razones técnicas y lingüísticas se ha creído idóneo elegir el prefijo *epi* para sustituirlo por los prefijos *co* y *mono* al referirse a este tipo de morfismos. El procedimiento anterior ha conducido a ellos y ahora se puede dar su definición precisa:

B : Un **epimorfismo** es un morfismo $f : A \to B$ tal que para todo par de morfismos $h, k : B \to B'$ se tiene que

$$hf = kf \Rightarrow h = k$$

Es fácil comprobar que la aplicación del proceso anterior a la afirmación B llevaría de regreso a A.

Ahora se demostrará que la siguiente proposición P es verdadera en toda categoría.

P : Si $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ son monomorfismos, entonces $g \circ f$ es monomorfismo.

<u>*Dem.*</u> Sean $A' \xrightarrow{h,k} A$ morfismos tales que

$$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$$

Entonces

$$g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k),$$

[1] Y viceversa: $(\Re^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \Re$.

de donde $f \circ h = f \circ k$ por ser g un monomorfismo. Como f también lo es, de la última igualdad se sigue que $h = k$. Por lo tanto, $g \circ f$ es monomorfismo. [✓]

La proposición P referida a una categoría $\Re$ arbitraria dice:

$P(\Re)$: Si $f \in \Re(A,B)$ y $g \in \Re(B,C)$ son $\Re$-monomorfismos, entonces $g \circ f$ es $\Re$-monomorfismo.

Referida a la categoría dual dice:

$P(\Re^{\text{op}})$: Si $f \in \Re^{\text{op}}(A,B)$ y $g \in \Re^{\text{op}}(B,C)$ son $\Re^{\text{op}}$-monomorfismos, entonces $g \circ^{\text{op}} f$ es $\Re^{\text{op}}$-monomorfismo.

$P(\Re^{\text{op}})$ es particularmente verdadera en $\Re^{\text{op}}$ porque la verdad de P está demostrada en general; vale para cualquier categoría. Sólo que ahora, por la relación entre $\Re^{\text{op}}$ y $\Re$, se la puede releer como una afirmación (verdadera) referente a $\Re$-morfismos que dice *otra* cosa:

${}^{\text{co}}P(\Re)$: Si $f \in \Re(B,A)$ y $g \in \Re(C,B)$ son $\Re$-comonomorfismos, entonces $f \circ g$ es $\Re$-comonomorfismo.

Bien traducida, esta "nueva" proposición puede quedar así:

Q : Si $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ son epimorfismos, entonces $g \circ f$ es epimorfismo. [✓]

Para quedar en punto de formular un Principio de Dualidad sólo resta hacer la advertencia de que no será formulado con todo el rigor de que es susceptible; aunque sugerente, la formulación que aquí se ofrezca será informal e imprecisa. Mayor precisión exige una aplicación metódica de la lógica formal que, quien se interese, podrá hallarla en el libro de Mac Lane "Categories for the Working Mathematician" (Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg-New York 1971).

Principio de Dualidad

I. Para todo concepto I *concerniente a cualquier categoría $\Re$, el* concepto dual *o* coconcepto *(${}^{\text{co}}$I) se obtiene "aplicando"* I *a la categoría dual $\Re^{\text{op}}$ y leyendo lo enunciado con referencia a $\Re$.*

II. Para toda proposición verdadera P *sobre categorías, la proposición dual o coproposición (${}^{\text{co}}$P), que se obtiene sustituyendo en* P *todo concepto por el coconcepto correspondiente, también es verdadera.*

Los ejemplos anteriores ya han dado idea del uso que se hará de este principio. Desde luego, en adelante se omitirán los detalles del proceso de dualizar limitándose a dar nombres (cuando haya que darlos) a los coconceptos obtenidos y a dejar enunciadas las coproposiciones anteponiéndoles siempre el prefijo ${}^{\text{co}}$. Para ilustrar este breve modo de proceder, a continuación se presenta otra proposición referente también a monomorfismos.

Proposición 4.1 *Sea $\Re$ una categoría arbitraria y sean $f \in \Re(A,B)$ y $g \in \Re(B,C)$. Si gf es un $\Re$-monomorfismo, entonces también lo es f.*

Demostración. Sean $h,k \in \Re(A',A)$ tales que $fh = fk$. Entonces

$$(gf)h = g(fh) = g(fk) = (gf)k$$

y como gf es monomorfismo, entonces $h = k$. Por lo tanto, f también es monomorfismo. [✓]

${}^{\text{co}}$Proposición. Sea $\Re$ una categoría arbitraria y sean $f \in \Re(A,B)$ y $g \in \Re(B,C)$. Si gf es un $\Re$-epimorfismo, entonces también lo es g. [✓]

Definición 4.1 *En una categoría arbitraria un morfismo que sea simultáneamente monomorfismo y epimorfismo se llama* ***bimorfismo****.*

Obsérvese que el someter esta definición al proceso de dualización en busca del coconcepto correspondiente conduce de regreso al mismo concepto de bimorfismo. Se trata pues de un concepto **autodual**.

Tomando en cuenta que los morfismos identidad de $\Re^{\text{op}}$ son los mismos que los de $\Re$, se tiene que también el concepto de isomorfismo es ejemplo de un concepto autodual. Esta situación deja puestas las condiciones de poder mostrar un ejemplo de una proposición que sea autodual.

Proposición 4.2 *En cualquier categoría todo isomorfismo es un bimorfismo.*

Demostración. Sea $f \in \Re(A,B)$ un isomorfismo; entonces existe $g \in \Re(B,A)$ tal que

$$gf = 1_A \quad \text{y} \quad fg = 1_B$$

Sean
$$A' \overset{h_1}{\underset{k_1}{\rightrightarrows}} A \quad \text{y} \quad B \overset{h_2}{\underset{k_2}{\rightrightarrows}} B'$$
morfismos tales que
$$fh_1 = fk_1 \quad \text{y} \quad h_2 f = k_2 f$$
entonces
$$(gf)\, h_1 = (gf)\, k_1 \quad \text{y} \quad h_2\, (fg) = k_2\, (fg)$$
de modo que
$$h_1 = k_1 \quad \text{y} \quad h_2 = k_2$$
Esto significa que f es monomorfismo y es epimorfismo. Por lo tanto, f es un bimorfismo. [✓]

Ejercicio 4.3 *Demuestre que en* $\mathfrak{Set}$*:*

a) f es inyectiva si, y sólo si, f es un monomorfismo.
b) f es suprayectiva si, y sólo si, f es un epimorfismo.

De acuerdo al ejercicio anterior, en $\mathfrak{Set}$ los conceptos categóricos de monomorfismo y epimorfismo coinciden con los de función inyectiva y función suprayectiva, respectivamente. Como entre aquéllos se da una dualidad mutua, hay quienes presentan a éstos últimos como recíprocamente duales, cosa que ya no es del todo cierta.

En $\mathfrak{Set}$ las ideas de inyectividad y suprayectividad tienen una conotación muy precisa; pensemos en la primera: aplicar elementos distintos de un conjunto en otro conjunto de modo que se consiga la inmersión del primero en el segundo. ¿Y qué noción se antojaría proponer como dual de esta idea? ...¡Pues, quién sabe! Intuyendo lo que ha de ser *dualidad*, acaso pudiera ocurrirse algo, menos proponer la suprayectividad como noción dual. Y lo propio acontece si pensamos en ésta última.

Y es que a la idea de dualidad le ocurre lo que ya presumía Platón que acaecía a toda idea: mientras se mantiene inscrita al orbe al que pertenece, goza de una perfección impecable, pero a medida que tiende a concretarse su perfección se diluye, sus componentes mutan y la idea de dualidad asume deformaciones teóricamente muy interesantes dentro de cada categoría específica.

Pese a esto, no deja de dar la gana de pensar a lo inyectivo como “dual deformado” de lo suprayectivo, no sólo en $\mathfrak{Set}$, sino incluso hacer extensivo este pensamiento y concebir a los morfismos inyectivos y suprayectivos como nociones recíprocamente duales dentro de toda categoría concreta. Sostenerse en este tenor puede parecer necio pero da la pauta para que pueda hacer un uso un tanto diferente del Principio de Dualidad, pues a partir de una afirmación que, sin tener sentido en toda categoría sí lo tenga para una clase especial de éstas como son las categorías concretas, se puede, aplicando el Principio, conjeturar una afirmación que sea *“casi dual”* de la inicial.

Después se comprobará que la categoría dual de una categoría concreta también es concreta; por ahora se supondrá cierto tal resultado. Ya se demostró que en toda categoría concreta una fuente que separa puntos es monofuente. Un caso particular de este resultado se tiene cuando la fuente consta de una sola flecha; si la fuente separa puntos, tal flecha es un **morfismo inyectivo**. Por lo tanto, el corolario que se está desprendiendo aquí puede enunciarse así:

C : Todo morfismo inyectivo es un monomorfismo.

Como C sólo tiene sentido (y es verdadera) en cualquier categoría concreta, aplicada a una categoría concreta $\underline{K}$ es:

$C\,(\underline{K})$: Todo $\underline{K}$-morfismo inyectivo es un $\underline{K}$-monomorfismo.

Como (según se ha supuesto) también $\underline{K}^{\mathrm{op}}$ es concreta, entonces también es verdadera la afirmación:

$C\,(\underline{K}^{\mathrm{op}})$: Todo $\underline{K}^{\mathrm{op}}$-morfismo inyectivo es un $\underline{K}^{\mathrm{op}}$-monomorfismo.

De lo cual puede sospecharse la verdad de la afirmación siguiente:

D : Todo morfismo suprayectivo es un epimorfismo.[2]

[2] Desde luego, $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un **morfismo suprayectivo** si $f \in \underline{K}\,((X, \xi), (Y, \eta))$ y la función $f : X \to Y$ es suprayectiva.

Tratemos de probarla: Sea $f \in \underline{K}(A,B)$ suprayectivo y sean $h,k \in \underline{K}(B,B')$ tales que $hf = kf$. Entonces, dada la suprayectividad de f, para cada elemento y del conjunto subyacente a B existe x en el conjunto subyacente a A tal que $f(x) = y$. En consecuencia

$$h(y) = h(f(x)) = k(f(x)) = k(y)$$

Por lo tanto, $h = k$. $_{[\checkmark]}$

De la verdad de una proposición "casi dual" siempre hay que cerciorarse pues aunque en los más de los casos es legitimable, no siempre resulta cierta.

Pero insístase más sobre lo poco conveniente que resulta mirar como duales conceptos cuya significación sólo tiene sentido en el ámbito de las categorías concretas; para tal efecto se redundará un poco respecto de lo ya comentado arriba y, como ahí, se hablará figuradamente.

Según se ha visto, los monomorfismos y los epimorfismos son perfectamente duales en una alta esfera del pensamiento abstracto y cuando son proyectados sobre la "categoría base" de las categorías concretas ($\mathfrak{Set}$) coinciden con sus morfismos inyectivos y suprayectivos, respectivamente. Cuando, con base en $\mathfrak{Set}$, se forma una categoría concreta $\underline{K}$, posiblemente sólo una parte de las funciones inyectivas y suprayectivas entre los conjuntos subyacentes de los $\underline{K}$-objetos sean $\underline{K}$-morfismos porque quizá no todas ellas preserven la $\underline{K}$-estructura. Ya se vió que todas aquellas que sí la preservan pasan a formar parte de los $\underline{K}$-monomorfismos, si son inyectivas, y de los $\underline{K}$-epimorfismos, si son suprayectivas. Denotando por $\underline{K}_{in}^{\mathrm{mor}}$ y $\underline{K}_{spa}^{\mathrm{mor}}$ a las clases de $\underline{K}$-morfismos inyectivos y suprayectivos, y por $M_{\underline{K}}$ y $E_{\underline{K}}$ a las clases de $\underline{K}$-monomorfismos y $\underline{K}$-epimorfismos, respectivamente, se pueden simbolizar esos resultados escribiendo

$$\underline{K}_{in}^{\mathrm{mor}} \subseteq M_{\underline{K}} \quad \text{y} \quad \underline{K}_{spa}^{\mathrm{mor}} \subseteq E_{\underline{K}}$$

Ahora bien, pueden mostrarse ejemplos de categorías concretas para las cuales al menos una de las contenciones anteriores resulte una contención propia (se verán ejemplos). Tomando esto en consideración, se ve con algo más de claridad lo complicado que resultaría insistir sobre la dualidad entre las subclases $\underline{K}_{in}^{\mathrm{mor}}$ y $\underline{K}_{spa}^{\mathrm{mor}}$ (o entre sus miembros) siendo que en ellas la dualidad efectiva que hay entre $M_{\underline{K}}$ y $E_{\underline{K}}$ se encuentra menguada, quizá estrictamente y, peor aún, quizá en "proporciones" diferentes.

Pero no vaya a pensarse que ya por eso haya que desentenderse de estas subclases de $\underline{K}$-morfismos ni que las haya que hacer a un lado. No; pese a la "casi dualidad" que guardan (o tal vez debido a ella), los $\underline{K}$-morfismos inyectivos y suprayectivos (acompañados de $\underline{K}$-estructuras iniciales y coiniciales) constituyen parte esencial de este estudio.

Una categoría concreta en la que existen epimorfismos que no son morfismos suprayectivos es $\mathfrak{Rng}_u$, la categoría de **los anillos con elemento unitario y de los homomorfismos anulares que conservan la unidad**.

(i) Para todo $X \in \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Rng}_u[X]$ consta de ternas $(+,\cdot,u)$ en las que

$$+,\cdot : X \times X \to X \quad \text{y} \quad u \in X$$

están sujetos a los consabidos axiomas para anillos con uno.

(ii) En consecuencia, parejas del tipo $(X,(+,\cdot,u))$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $(+,\cdot,u) \in \mathfrak{Rng}_u[X]$ son los $\mathfrak{Rng}_u$-objetos o **anillos con elemento unitario**.[3]

(iii) Dados dos anillos con uno, $A = (X,(+_X,\cdot_X,u_X))$ y $B = (Y,(+_Y,\cdot_Y,u_Y))$, una función $f : X \to Y$ tal que

$$f(x_1 +_X x_2) = f(x_1) +_Y f(x_2)$$

$$\begin{array}{rcl} f(x_1 \cdot_X x_2) & = & f(x_1) \cdot_Y f(x_2) \\ \text{y} \quad f(u_X) & = & u_Y \end{array}$$

es un $\mathfrak{Rng}_u$-morfismo u **homomorfismo anular que conserva la unidad**.

Los axiomas (m_1) y (m_2) que definen a una categoría concreta se verifican fácilmente.

[3]Por brevedad se hablará de "anilos con uno".

Considérense ahora los anillos $(\mathbb{Z},(+,\cdot,1))$ y $(\mathbb{Q},(+,\cdot,1))$ con sus sumas, productos y unos usuales, y piénsese en la inclusión $\iota:\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Q}$. Es claro que

$$\iota \in \mathfrak{Rng}_u\left((\mathbb{Z},(+,\cdot,1)),(\mathbb{Q},(+,\cdot,1))\right)$$

y que no es un morfismo suprayectivo. Es un epimorfismo sin embargo.

En efecto, dados

$$h,k \in \mathfrak{Rng}_u\left((\mathbb{Q},(+,\cdot,1)),(X,(+,\cdot,1))\right)$$

tales que $h\iota = k\iota$ se tiene que, para cualquier $n\in\mathbb{Z}$,

$$h(n) = h(\iota(n)) = h\iota(n) = k\iota(n) = k(\iota(n)) = k(n)$$

y si $n\neq 0$

$$h(n)\cdot h\left(\frac{1}{n}\right) = h\left(n\cdot\frac{1}{n}\right) = h(1) = 1 = k(1) = k\left(\frac{1}{n}\cdot n\right) = k\left(\frac{1}{n}\right)\cdot k(n)$$

de modo que

$$h\left(\frac{1}{n}\right) = h\left(\frac{1}{n}\right)\left[k(n)\cdot k\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \left[h\left(\frac{1}{n}\right)\cdot k(n)\right]k\left(\frac{1}{n}\right) = \left[h\left(\frac{1}{n}\right)\cdot h(n)\right]k\left(\frac{1}{n}\right) = k\left(\frac{1}{n}\right)$$

Así, si $m,n\in\mathbb{Z}$ y $n\neq 0$

$$h\left(\frac{m}{n}\right) = h(m)\cdot h\left(\frac{1}{n}\right) = k(m)\cdot k\left(\frac{1}{n}\right) = k\left(\frac{m}{n}\right)$$

i.e. $h=k$ [✓]

Otra categoría concreta en la que hay epimorfismos que no son suprayectivos es la categoría $\mathbf{T_2}$ de los espacios de Hausdorff y de las funciones continuas.

Para mostrar un ejemplo se requiere de un par de resultados básicos de topología general que son los siguientes.

Proposición 4.3 *Sean, $h,k:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ dos funciones continuas cualesquiera y*

$$A = \{x\in X : h(x) = k(x)\}$$

Si (Y,σ) es $\mathbf{T_2}$ entonces A es cerrado en (X,τ).

Demostración: Sea $x\in X-A$; entonces $h(x)\neq k(x)$, y como (Y,σ) es $\mathbf{T_2}$, existen $V_1,V_2\in\sigma$ tales que $h(x)\in V_1$, $k(x)\in V_2$ y $V_1\cap V_2=\varnothing$. Además h y k son continuas, de modo que, siendo $\mathcal{N}_x^\circ$ la familia de vecindades abiertas de x, se tiene $h^{-1}(V_1), k^{-1}(V_2)\in\mathcal{N}_x^\circ$; $\therefore h^{-1}(V_1)\cap k^{-1}(V_2)\in\mathcal{N}_x^\circ$, y como

$$h\left(h^{-1}(V_1)\cap k^{-1}(V_2)\right)\subseteq V_1 \text{ y } k\left(h^{-1}(V_1)\cap k^{-1}(V_2)\right)\subseteq V_2$$

entonces $h^{-1}(V_1)\cap k^{-1}(V_2)\subseteq X-A$; $\therefore X-A\in\tau$; por lo tanto, A es cerrado. [✓]

Corolario 4.1 *Sean $h,k:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ dos funciones continuas tales que $h\mid D = k\mid D$, donde D es denso en (X,τ); si (Y,σ) es $\mathbf{T_2}$ entonces $h=k$.*

Demostración: Como $h\mid D = k\mid D$, entonces $D\subseteq A$ (de la proposición anterior) que es cerrado. Luego,

$$X = \overline{D}\subseteq\overline{A} = A \quad [4]$$

Por lo tanto, $A=X$; por lo tanto, $h=k$. [✓]

[4] Las barras denotan cerradura.

Ahora el ejemplo: Considérense los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ que con sus topologías usuales son espacios de Hausdorff; tómese la inclusión $\iota : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ y un par de $\mathbf{T_2}$-morfismos

$$h, k : \mathbb{R} \to (Y, \sigma)$$

tales que $h\iota = k\iota$. Entonces

$$h(q) = h(\iota(q)) = h\iota(q) = k\iota(q) = k(\iota(q)) = k(q)$$

para todo $q \in \mathbb{Q}$; o sea que $\mathbb{Q} \subseteq A$. Como consecuencia del corolario anterior se tiene $h = k$. Por lo tanto, ι es un epimorfismo que, por supuesto, no es suprayectivo. [✓]

Observación 4.2 *En cada uno de los ejemplos anteriores el ejemplo expuesto ha sido un morfismo inyectivo, por lo tanto, un monomorfismo. Como ambos son epimorfismos y ninguno suprayectivo, ambos son ejemplos de bimorfismos que no son isomorfismos.*

Para el caso de $\mathbf{T_2}$ se puede decir más todavía.

Definición 4.2 *En $\mathfrak{Top}$ y en cualquiera de sus subcategorías, un morfismo es* ***denso*** *si es densa su imagen en el codominio.*

Proposición 4.4 *En $\mathbf{T_2}$ todo morfismo denso es un epimorfismo.*

Demostración. Sea

$$f \in \mathbf{T_2}((X, \tau), (Y, \sigma))$$

denso y sean

$$h, k \in \mathbf{T_2}((Y, \sigma), (Y', \sigma'))$$

tales que $hf = kf$; entonces, $h \mid f(X) = k \mid f(X)$. Debido al corolario anterior, $h = k$; por lo tanto, f es un epimorfismo. [✓]

La caracterización de los epimorfismos en una categoría concreta abre un interesante campo de dificultades en esta teoría. En el caso de $\mathbf{T_2}$, el recíproco de la proposición anterior termina de dar la caracterización completa.

Proposición 4.5 *Todo epimorfismo en $\mathbf{T_2}$ es un morfismo denso.*

Demostración. Se probará la proposición contrapuesta, demostrando que si $f \in \mathbf{T_2}((X, \tau), (Y, \sigma))$ no es denso entonces f no puede ser epimorfismo. Para ello se construirá un espacio de Hausdorff (Z, ρ) hacia el cual puedan definirse desde (Y, σ) dos funciones continuas distintas pero cuyas composiciones con f sean iguales.

Para la constucción de Z hay que empezar fabricando dos copias de Y: Para cada $i \in \{1, 2\}$ sean

$$Y_i = \{(y, i) : y \in Y\}$$

y considérense las biyecciones

$$\begin{array}{rccc} g_i : & Y & \to & Y_i \\ & y & \mapsto & (y, i) \end{array}$$

Entonces

$$\sigma_i = \{g_i(V) : V \in \sigma\}$$

es una topología para Y_i que hace de cada

$$g_i : (Y, \sigma) \to (Y_i, \sigma_i)$$

un homeomorfismo. Para la construcción de Z habrá identificar estas copias de Y pegándolas sobre la cerradura de $\overline{f(X)}$; antes hay que unirlas, considerar las inclusiones

$$\iota_i : Y_i \hookrightarrow Y_1 \cup Y_2$$

y la topología ϑ para $Y_1 \cup Y_2$ definida por

$$\vartheta = \left\{U \subseteq Y_1 \cup Y_2 : \iota_i^{-1}(U) \in \sigma_i, \forall i \in \{1,2\}\right\}$$

que hace de cada inclusión una función continua. No es difícil comprobar que $(Y_1 \cup Y_2, \vartheta)$ es de Hausdorff.

Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $Y_1 \cup Y_2$ definida por
(1) $(y,i) \sim (y,i), \forall y \in Y, i \in \{1,2\}$;
(2) $(y,i) \sim (y,j)$, si $y \in \overline{f(X)}$ e $i,j \in \{1,2\}$.

Sea Z la familia de clases de equivalencia $(Y_1 \cup Y_2) / \sim$ y considérese la aplicación canónica

$$\begin{array}{rccc} p: & Y_1 \cup Y_2 & \to & Z \\ & (y,i) & \mapsto & [(y,i)] \end{array}$$

Entonces

$$\rho = \left\{\widetilde{U} \subseteq Z : p^{-1}\left(\widetilde{U}\right) \in \vartheta\right\}$$

es una topología para Z que hace de p una función continua. Se verá que $\rho \in \mathbf{T_2}[Z]$ analizando dos posibles casos.

Sean $[(u,i)], [(v,j)] \in Z, [(u,i)] \neq [(v,j)]$; sea $W = Y - \overline{f(X)}$.

(1º) $u = v$; entonces $u, v \in W$ y $j \neq i$;

$$\therefore \ [(u,i)] = \{(u,i)\} \ \ , \ \ [(v,j)] = \{(v,j)\}$$

Además

$$(u,i) \in g_i(W) \in \sigma_i \ \ , \ \ [(v,j)] \in g_j(W) \in \sigma_j$$

porque $W \in \sigma$; y como

$$g_i(W) = \iota_i^{-1}(g_i(W)), \iota_j^{-1}(g_i(W)) = \varnothing \quad \text{y} \quad g_j(W) = \iota_j^{-1}(g_j(W)), \iota_i^{-1}(g_j(W)) = \varnothing$$

entonces $g_i(W), g_j(W) \in \vartheta$ (en conformidad con la definición de ϑ). Sean

$$\widetilde{U} = \{[(y,i)] : y \in W\} \quad \text{y} \quad \widetilde{V} = \{[(y,j)] : y \in W\}$$

entonces

$$[(u,i)] \in \widetilde{U} \quad \text{y} \quad [(v,j)] \in \widetilde{V}$$

Además

$$p^{-1}\left(\widetilde{U}\right) = g_i(W) \quad \text{y} \quad p^{-1}\left(\widetilde{V}\right) = g_j(W)$$

por lo tanto, $\widetilde{U}, \widetilde{V} \in \rho$ y es claro que $\widetilde{U} \cap \widetilde{V} = \varnothing$.

(2º) $u \neq v$; entonces para (u,i) y (v,i) existen $U_i, V_i \in \sigma_i$ tales que

$$(u,i) \in U_i \ \ , \ \ (v,i) \in V_i \ \text{ y } \ U_i \cap V_i = \varnothing$$

Sea $k \in \{1,2\}, k \neq i$; entonces

$$\iota_i^{-1}(U_i) = U_i, \iota_k^{-1}(U_i) = \varnothing \quad \text{y} \quad \iota_i^{-1}(V_i) = V_i, \iota_k^{-1}(V_i) = \varnothing$$

En consecuencia, se tiene que $U_i, V_i \in \vartheta$. Para esta k hágase

$$U_k = \{(y,k) : (y,i) \in U_i\} \quad \text{y} \quad V_k = \{(y,k) : (y,i) \in V_i\}$$

También U_k y V_k son abiertos ajenos en ϑ porque

$$\begin{array}{rccc} g: & (Y_i, \sigma_i) & \to & (Y_k, \sigma_k) \\ & (y,i) & \mapsto & (y,k) \end{array}$$

es un homeomorfismo y $g(U_i) = U_k$ y $g(V_i) = V_k$. Luego

$$U = U_i \cup U_k \in \vartheta \quad \text{y} \quad V = V_i \cup V_k \in \vartheta$$

Entonces
$$(u,i)\in U \ , \ (v,j)\in V \text{ y } U\cap V=\varnothing$$
cualquiera que sea el caso (i.e. $j=i$ ó $i\neq j$). Sean
$$\widetilde{U}=\{[z]:z\in U\} \quad \text{y} \quad \widetilde{V}=\{[z]:z\in V\}$$
entonces $\widetilde{U},\widetilde{V}\in\rho$ y
$$[(u,i)]\in\widetilde{U} \ , \ [(v,j)]\in\widetilde{V} \text{ y } \widetilde{U}\cap\widetilde{V}=\varnothing$$
porque $p^{-1}\left(\widetilde{U}\right)=U$ y $p^{-1}\left(\widetilde{V}\right)=V$, como fácilmente se comprueba.

Hasta aquí la prueba de que (Z,ρ) es de Hausdorff.

Finalmente, defínanse para cualesquiera $y\in Y$ e $i\in\{1,2\}$
$$\begin{array}{cccc} h_i: & (Y,\sigma) & \to & (Z,\rho) \\ & y & \mapsto & [(y,i)] \end{array}$$
Entonces
$$h_i:(Y,\sigma)\xrightarrow{g_i}(Y_i,\sigma_i)\xhookrightarrow{\iota_i}(Y_1\cup Y_2,\vartheta)\xrightarrow{p}(Z,\rho)\,,\ \forall i\in\{1,2\}$$
Por lo tanto, h_1 y h_2 son funciones continuas. El suponer que f no es denso permite asegurar que $h_1\neq h_2$ ya que entonces existe $y\in Y-\overline{f(X)}$ para la que
$$h_1(y)=[(y,1)]=\{(y,1)\}\neq\{(y,2)\}=[(y,2)]=h_2(y)$$
Sin embargo
$$h_1f(x)=h_1(f(x))=[(f(x),1)]=\{(f(x),1),(f(x),2)\}=[(f(x),2)]=h_2(f(x))=h_2f(x)$$
Por consiguiente, f no es un epimorfismo, como se quería demostrar. [✓]

En cuanto a los monomorfismos, más adelante se verá que es posible dar hipótesis adecuadas a fin de garantizar su coincidencia con los morfismos inyectivos en una amplia familia de categorías concretas.

El carácter general que poseen las nociones de monomorfismo y epimorfismo en categorías se consigue abstrayendo las propiedades algebraicas de composición correspondientes (leyes laterales de cancelación) elevándolas al rango abstracto de los morfismos. Siguiendo la misma vía es posible dar cabida a otras nociones de carácter igualmente abstracto y general y cuya resonancia con las que ya se tienen son de gran interés teórico.

Ejercicio 4.4 *Demuestre que en* $\mathfrak{Set}$*:*

a) $f:X\to Y$ es inyectiva si, y sólo si, existe $g:Y\to X$ tal que $gf=1_X$.
b) $f:X\to Y$ es suprayectiva si, y sólo si, existe $g:Y\to X$ tal que $fg=1_Y$.

Definición 4.3 *Sea* $\mathfrak{K}$ *una categoría arbitraria; entonces, cualquiera de sus morfismos* $f\in\mathfrak{K}(A,B)$ *es una* $\mathfrak{K}$-***retracción*** *si existe otro morfismo* $g\in\mathfrak{K}(B,A)$ *tal que* $fg=1_B$.

$^{\text{co}}$**Definición**. En una categoría $\mathfrak{K}$ un morfismo $f\in\mathfrak{K}(A,B)$ es una $\mathfrak{K}$-**corretracción** si existe otro morfismo $g\in\mathfrak{K}(B,A)$ tal que $gf=1_A$.

Nota: Las corretracciones se llaman **secciones**.

Proposición 4.6 *Si* $\underline{K}$ *es una categoría concreta, entonces toda* $\underline{K}$*-retracción es un morfismo suprayectivo.*

Demostración. Sea $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ una $\underline{K}$-retracción. Entonces, f es un $\underline{K}$-morfismo y existe otro, $g : (Y, \eta) \to (X, \xi)$ tal que $fg = 1_{(Y,\eta)}$. En consecuencia, $f : X \to Y$ es una función para la cual existe otra, $g : Y \to X$, tal que $fg = 1_Y$. Por (b) del ejercicio anterior, f es suprayectiva como había que demostrar. [✓]

La proposición casi dual

$^{\mathrm{co}}$**Proposición**. En una categoría concreta $\underline{K}$, toda $\underline{K}$-sección es un morfismo inyectivo

también es verdadera y se prueba similarmente.

Estos resultados, sumados a la información reunida con respecto a las relaciones entre inyectividad y monomorfía, suprayectividad y epimorfía, ya hablan sobre la no coincidencia entre retracciones y epimorfismos ni entre secciones y monomorfismos. De hecho, retomando una notación anteriormente introducida y denotando como $S_{\underline{K}}$ y $R_{\underline{K}}$ a las clases de secciones y retracciones de una categoría concreta $\underline{K}$, se tiene

$$S_{\underline{K}} \subset \underline{K}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{mor}} \subset M_{\underline{K}} \quad \text{y} \quad R_{\underline{K}} \subset \underline{K}_{\mathrm{spa}}^{\mathrm{mor}} \subset E_{\underline{K}}$$

Esto trae a colación que en una categoría concreta toda sección es un monomorfismo y toda retracción un epimorfismo, lo cual sugiere proponer un resultado más general:

Proposición 4.7 *En cualquier categoría $\Re$ toda sección es un monomorfismo.*

Demostración. Sea $f \in \Re(A, B)$ una sección arbitraria y sean $h, k \in \Re(A', A)$ tales que $fh = fk$. Por definición de sección, existe otro morfismo $g \in \Re(B, A)$ tal que $gf = 1_A$; en consecuencia

$$h = 1_A h = (gf)\, h = g\,(fh) = g\,(fk) = (gf)\, k = 1_A k = k$$

Por lo tanto, f es un monomorfismo. [✓]

$^{\mathrm{co}}$**Proposición**. En cualquier categoría $\Re$ toda retracción es un epimorfismo. [✓]

Ejercicio 4.5 *Sean, $\Re$ una categoría y $f : A \to B$ un $\Re$-morfismo, arbitrarios. Probar que son equivalentes:*

(a) f es un isomorfismo.
(b) f es sección y retracción.

Ejemplo 4.3 *He aquí un morfismo inyectivo que no es sección.*

Sean

$$X = \{a, b, c\} \quad \text{y} \quad X' = \{a', b', c'\}$$

y sean

$$\alpha \in \mathfrak{Pos}\,[X] \quad \text{y} \quad \alpha' \in \mathfrak{Pos}\,[X']$$

definidas como

$$\alpha = \{(x, x), (a, x) \mid x \in X\} \quad \text{y} \quad \alpha' = \{(x', x'), (a', x'), (b', c') \mid x' \in X'\}$$

Entonces

$$\begin{array}{rccc} f: & (X, \alpha) & \to & (X', \alpha') \\ & x & \mapsto & x' \end{array}$$

es una función monótona e inyectiva y suprayectiva; por lo tanto, existe su función inversa

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & X' & \to & X \\ & x' & \mapsto & x \end{array}$$

Sin embargo

$$f^{-1} \notin \mathfrak{Pos}\,((X', \alpha'), (X, \alpha))$$

ya que

$$(b', c') \in \alpha' \nRightarrow \left(f^{-1}b', f^{-1}c'\right) \in \alpha$$

porque $(b, c) \notin \alpha$. [✓]

4.1. Funtores y Dualidad

A continuación se aplicará el Principio de Dualidad al concepto de funtor, a fin de conocer el coconcepto correspondiente.

Recuérdese que, siendo $\Im$ y $\Re$ unas categorías cualesquiera, un funtor

$$F : \Im \to \Re$$

es una regla de correspondencia que asocia

(i) a cada $\Im$-objeto A un $\Re$-objeto FA

(ii) a cada $\Im$-morfismo $f \in \Im(A, B)$ un $\Re$-morfismo $Ff \in \Re(FA, FB)$

Esta regla:

[a] *preserva composiciones*, es decir

$$(Fg)(Ff) = F(gf) : FA \to FC$$

para cualesquiera morfismos $f \in \Im(A, B), g \in \Im(B, C)$;

[b] *preserva morfismos idénticos*, es decir

$$F1_A = 1_{FA}, \forall A \in \Im$$

En consecuencia, *un cofuntor*

$$F^{\mathrm{op}} : \Im^{\mathrm{op}} \to \Re^{\mathrm{op}}$$

es una regla de correspondencia que asocia

(i) a cada $\Im^{\mathrm{op}}$-objeto A un $\Re^{\mathrm{op}}$-objeto $F^{\mathrm{op}}A$

(ii) a cada $\Im^{\mathrm{op}}$-morfismo $f \in \Im^{\mathrm{op}}(A, B)$ un $\Re^{\mathrm{op}}$-morfismo $F^{\mathrm{op}}f \in \Re^{\mathrm{op}}(F^{\mathrm{op}}A, F^{\mathrm{op}}B)$

i.e. a cada $\Im$-morfismo $f \in \Im(B, A)$ un $\Re$-morfismo $F^{\mathrm{op}}f \in \Re(F^{\mathrm{op}}B, F^{\mathrm{op}}A)$

Esta regla:

[a] *preserva composiciones*, es decir, para cualesquiera morfismos $f \in \Im^{\mathrm{op}}(A, B), g \in \Im^{\mathrm{op}}(B, C)$

$$(F^{\mathrm{op}}g) \circ^{\mathrm{op}} (F^{\mathrm{op}}f) = F^{\mathrm{op}}(g \circ^{\mathrm{op}} f) \in \Re^{\mathrm{op}}(F^{\mathrm{op}}A, F^{\mathrm{op}}C)$$

o, lo que es lo mismo, para cualesquiera morfismos $g \in \Im(C, B), f \in \Im(B, A)$

$$(F^{\mathrm{op}}f)(F^{\mathrm{op}}g) = F^{\mathrm{op}}(fg) \in \Re(F^{\mathrm{op}}C, F^{\mathrm{op}}A)$$

[b] *preserva morfismos idénticos*, es decir

$$F^{\mathrm{op}}1_A = 1_{F^{\mathrm{op}}A}, \forall A \in |\Im^{\mathrm{op}}| \, (= |\Im|)$$

[✓]

Ejercicio 4.6 *Sea $F : \Im \to \Re$ un funtor arbitrario y sea $F^{op} : \Im^{op} \to \Re^{op}$ el* ***funtor dual a*** *F que se define con la misma regla que se define F, i.e.*

$$F^{op}A = FA, \forall A \in \Im \quad y \quad F^{op}f = Ff, \forall f \in \Im^{op}(A, B)$$

Probar que:

(a) F^{op} es fiel si, y sólo si, F es fiel;

(b) F^{op} es pleno si, y sólo si, F es pleno.

Según queda indicado en (a) del ejercicio anterior, no es gran novedad lo que se obtiene sometiendo la idea de funtor al proceso de dualización; el coconcepto obtenido es el mismo. En cambio, ha resultado mejor la idea de dejar la dualidad a medio camino, ya sea de ida o de regreso, aplicando el procedimiento a medias, considerando funtores

$$F : \Im^{\mathrm{op}} \to \Re \quad \text{o} \quad G : \Im \to \Re^{\mathrm{op}}$$

Como los objetos y morfismos de la categoría dual de una categoría son objetos y morfismos de la propia categoría, puede mirarse en tales funtores reglas que asocian objetos y morfismos de $\Im$ con objetos y morfismos de $\Re$. Como las identidades en una categoría son las mismas que en la categoría dual, en su paso de $\Im$ a $\Re$ estas reglas preservan identidades. Y lo propio acontece con las composiciones sólo que en el orden invertido.

En efecto, si

$$f \in \Im(A,B) \quad \text{y} \quad g \in \Im(B,C)$$

entonces:

(i) $f \in \Im^{\mathrm{op}}(B,A)$, $g \in \Im^{\mathrm{op}}(C,B)$ y se tiene que

$$F(g \circ f) = F(f \circ^{\mathrm{op}} g) = (Ff) \circ (Fg);$$

(ii) $Gf \in \Re^{\mathrm{op}}(GA,GB)$, $Gg \in \Re^{\mathrm{op}}(GB,GC)$ por lo que

$$G(g \circ f) = (Gg) \circ^{\mathrm{op}} (Gf) = (Gf) \circ (Gg).$$

Este hecho distingue a estas reglas de las dadas por los funtores tal cual se venían concibiendo hasta ahora; sin embargo, según se acaba de ver, también son reglas funtoriales de asociación de elementos entre categorías, debido a lo cual, también se llamarán funtores.

Definición 4.4 *Sean $\Im$ y $\Re$ categorías arbitrarias. Un **funtor contravariante** de $\Im$ en $\Re$ es un funtor*

$$F : \Im^{op} \to \Re$$

Se escribirá: $F : \Im \to \Re$.

Observación 4.3 *1. Para acentuar más la diferencia entre los funtores contravariantes y los funtores (a secas) se ha dado a éstos el nombre compuesto de **funtores covariantes**.*

2. Está claro que la notación $F : \Im \to \Re$ para un funtor contravariante no da lugar a equívocos porque en tal caso sabemos, de acuerdo con la definición, que F (como funtor covariante) va de $\Im^{\mathrm{op}}$ en $\Re$.

3. Siguiendo la definición anterior, un funtor $G : \Im \to \Re^{\mathrm{op}}$ es un funtor contravariante de $\Im^{\mathrm{op}}$ en $\Re^{\mathrm{op}}$ ya que (como funtor covariante) se puede reescribir como

$$G : (\Im^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \to (\Re^{\mathrm{op}})$$

Ejemplo 4.4 *Sea*

$$\mathtt{Opt} : \mathfrak{Set}^{op} \to \mathfrak{Set}$$

tal que

$$\mathtt{Opt}\ X = 2^X, \forall X \in \mathfrak{Set}^{op};$$

y si $f \in \mathfrak{Set}^{op}(X,Y)$ entonces

$$\mathtt{Opt}\ f \in \mathfrak{Set}\left(2^X, 2^Y\right)$$

se define por

$$\mathtt{Opt}\ f(A) = f^{-1}(A), \forall A \in 2^X$$

$[a]$ $\mathtt{Opt}$ preserva composiciones.

En efecto, sean

$$f \in \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}(X,Y) \quad \text{y} \quad g \in \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}(Y,Z)$$

entonces, para cualquier $C \subseteq Z$ se tiene

$$\mathtt{Opt}(g \circ^{\mathrm{op}} f)(C) = \mathtt{Opt}(f \circ g)(C) = (f \circ g)^{-1}(C) = g^{-1}\left(f^{-1}(C)\right) = (\mathtt{Opt}g)(\mathtt{Opt}f)(C)$$

$[b]$ $\mathtt{Opt}$ preserva identidades.

En efecto, si $A \subseteq X$, entonces

$$\mathtt{Opt}\ 1_X \in \mathfrak{Set}\left(2^X, 2^X\right)$$

es tal que

$$\mathtt{Opt}1_X(A) = 1_X^{-1}(A) = A = 1_{2^X}(A) = 1_{\mathtt{Opt}X}(A)$$

$\mathtt{Opt} : \mathfrak{Set} \to \mathfrak{Set}$ es el llamado **funtor conjunto potencia contravariante**.

Proposición 4.8 $\mathtt{Opt} : \mathfrak{Set}^{op} \to \mathfrak{Set}$ *es un funtor fiel.*

Demostración. Hay que probar que para cualesquiera conjuntos X, Y, son inyectivas las funciones

$$\mathtt{Opt}_{(X,Y)} : \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}(X,Y) \to \mathfrak{Set}\left(2^X, 2^Y\right)$$

a las que $\mathtt{Opt}$ da lugar. Recuérdese que para tales funciones la regla es: Dada $f \in \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}(X,Y)$,

$$\begin{array}{rccc} \mathtt{Opt}_{(X,Y)}(f) : & 2^X & \to & 2^Y \\ & A & \mapsto & f^{-1}(A) \end{array}$$

Para demostrar la inyectividad de $\mathtt{Opt}_{(X,Y)}$ se probará que aplica elementos distintos de su dominio en elementos distintos de su codominio.

En efecto, sean

$$f_1, f_2 \in \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}(X,Y), f_1 \neq f_2$$

Entonces existe $y \in Y$ tal que

$$f_1(y) \neq f_2(y)$$

Se quiere ver que también

$$\mathtt{Opt}_{(X,Y)}(f_1) \neq \mathtt{Opt}_{(X,Y)}(f_2)$$

para lo cual hay que exhibir un $A \in 2^X$ tal que

$$f_1^{-1}(A) \neq f_2^{-1}(A)$$

Considérese

$$A = \{f_1(y)\}$$

Es claro que

$$y \in f_1^{-1}\{f_1(y)\} \qquad \text{y} \qquad y \notin f_2^{-1}\{f_1(y)\}$$

con lo cual la proposición queda demostrada. [✓]

Ejercicio 4.7 *Describa la concreción de* $\mathfrak{Set}^{op}$ *a la que* $\mathtt{Opt}$ *da lugar.*

Ejercicio 4.8 *(a) Demuestre que para* $\mathtt{Opt}$ *valen las siguientes propiedades (que* $\mathtt{Pot}$ *no tiene):*

1. (i) $\mathtt{Opt}\, f(B_1 \cup B_2) = \mathtt{Opt}\, f(B_1) \cup \mathtt{Opt}\, f(B_2)$
   (ii) $\mathtt{Opt}\, f(B_1 \cap B_2) = \mathtt{Opt}\, f(B_1) \cap \mathtt{Opt}\, f(B_2)$
   (iii) $\mathtt{Opt}\, f(\emptyset) = \emptyset$
   (iv) $\mathtt{Opt}\, f(Y) = X$
   (v) $X - \mathtt{Opt}\, f(B) = \mathtt{Opt}\, f(Y - B)$

(b) ¿Puede describirse una concreción de $\mathfrak{Set}$ vía $\mathtt{Opt}$? De responder afirmativamente describa tal concreción. De responder negativamente, justifique su respuesta.

Antes de pasar a otra cosa se probará un resultado cuya demostración quedó pendiente.

Proposición 4.9 *La categoría dual de una categoría concreta es concretable.*

Demostración. Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta y sea $U : \underline{K} \to \mathfrak{Set}$ el funtor que olvida; se sabe que U es un funtor fiel, de modo que también es fiel el funtor dual

$$U^{\mathrm{op}} : \underline{K}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}$$

Entonces, el funtor compuesto

$$\mathtt{Opt}U^{\mathrm{op}} : \underline{K}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Set}$$

es un funtor fiel, lo cual significa que $\underline{K}^{\mathrm{op}}$ es una categoría concretable. [✓]

4.2. Estructuras Finales

En la sección anterior se habló de la posibilidad de duplicar el contenido de la teoría expuesta empleando el Principio de Dualidad. Es lo que se hará con relación a la sección antepresedente.

Se ha definido una fuente para una categoría $\Re$ arbitraria como una pareja $(A, (f_i)_I)$ en la que A es un $\Re$-objeto arbitrario y $(f_i)_I$ es una clase arbitraria de $\Re$-morfismos $f_i \in \Re(A, A_i)$, $i \in I$. El coconcepto correspondiente al de fuente se llama sumidero.

Definición 4.5 *Sea $\Re$ una categoría arbitraria. Un **sumidero en** $\Re$ o $\Re$-**sumidero** es una pareja $((f_i)_I, A)$ en la que A es un $\Re$-objeto arbitrario y $(f_i)_I$ es una clase arbitraria de $\Re$-morfismos $f_i \in \Re(A_i, A)$, $i \in I$. En tal caso, A recibe el nombre de **codominio del sumidero**, la clase $(A_i)_I$ de $\Re$-objetos es el **dominio del sumidero** y cada morfismo f_i es **una flecha del sumidero**. Notaciones alternativas para sumideros son:*

$$\left(A_i \xrightarrow{f_i} A\right)_I \quad y \quad (f_i : A_i \to A)_I$$

Como con las fuentes, también se considerarán sumideros en $\mathfrak{Set}$

$$(f_i : X_i \to X)_I$$

suponiendo que cada miembro X_i de su dominio puede $\underline{K}$-estructurarse según una categoría concreta arbitraria $\underline{K}$, y lo mismo que entonces, no se reconocerá a este sumidero ("híbrido") un $\underline{K}$-sumidero sino hasta que se demuestre la existencia de una $\underline{K}$-estructura para X que haga de cada f_i un $\underline{K}$-morfismo.

Ejemplo 4.5 *Si $S = ((f_i)_I, X)$ es un sumidero cuyo dominio es una familia $(X_i, \tau_i)_I$ de espacios topológicos, entonces la familia*

$$\tau = \left\{U \subseteq X : f_i^{-1}(U) \in \tau_i, \forall i \in I\right\}$$

es una $\mathfrak{Top}$-estructura para X que hace de cada f_i una función continua.

En efecto, dados $i \in I$ y $U \in \tau$ cualesquiera se tiene $f_i^{-1}(U) \in \tau_i$, de modo que $f_i : (X_i, \tau_i) \to (X, \tau)$ es una función continua.

La topología anterior es la **topología fuerte**[5] **para** X **correspondiente a** $(\tau_i)_I$ **y a** $(f_i)_I$.

El coconcepto correspondiente al de $\underline{K}$-estructura inicial es el de $\underline{K}$-estructura final. Su definición es como sigue:

Sea X un conjunto arbitrario. Si $S = ((f_i)_I, X)$ es un sumidero cuyo dominio es una familia $(A_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos $A_i = (X_i, \xi_i)$ de una categoría concreta $\underline{K}$, entonces **una $\underline{\mathbf{K}}$-estructura final para** X **con respecto al sumidero** S es una estructura $\xi \in \underline{K}[X]$ tal que si $A = (X, \xi)$ entonces:

(*i*) $f_i \in \underline{K}(A_i, A)$, $\forall i \in I$.

(*ii*) Si $B = (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-objeto y $f : X \to Y$ es una función tal que

$$ff_i \in \underline{K}(A_i, B), \forall i \in I$$

entonces $f \in \underline{K}(A, B)$.

Si ξ es una $\underline{K}$-estructura final para X con respecto a S, entonces se hablará de S como de un **$\underline{\mathbf{K}}$-sumidero final**.

Ejercicio 4.9 *Las condiciones (i) y (ii) pueden sintetizarse en una sola:*

Para cada $\underline{K}$-objeto $B = (Y, \eta)$ y cada función $f : X \to Y$

$$f \in \underline{K}(A, B) \Leftrightarrow ff_i \in \underline{K}(A_i, B), \forall i \in I$$

Ejercicio 4.10 *Sea $S = ((f_i)_I, X)$ un sumidero cuyo dominio es una familia $(X_i, \tau_i)_I$ de espacios topológicos. Probar que la topología fuerte para X correspondiente a $(\tau_i)_I$ y a $(f_i)_I$ es una $\mathfrak{Top}$-estructura final para X con respecto al sumidero S.*

[5] también llamada **final**

Ejemplo 4.6 *Debido al ejercicio anterior, la topología fuerte para X correspondiente a $(\tau_i)_I$ y a $(f_i)_I$ es una $\mathfrak{Top}$-estructura final para X con respecto al sumidero*

$$S = (f_i : (X_i, \tau_i) \to X)_I$$

Ejemplo 4.7 *Si $\overline{\mathfrak{Set}}$ es la concreción de $\mathfrak{Set}$ descrita anteriormente y*

$$S = (f_i : (X_i, X_i) \to X)_I$$

es un sumidero de dominio en $\overline{\mathfrak{Set}}$, entonces X es una $\overline{\mathfrak{Set}}$-estructura final para X con respecto a S.

En efecto, $X \in \overline{\mathfrak{Set}}\,[X]$ y si $A = (X, X)$ y $A_i = (X_i, X_i)$, $\forall i \in I$, entonces:
(i) Como $f_i \in \mathfrak{Set}\,(X_i, X)$, $i \in I$, entonces

$$1_{\mathfrak{Set}} f_i \in \overline{\mathfrak{Set}}\,((1_{\mathfrak{Set}} X_i, X_i), (1_{\mathfrak{Set}} X, X)), \forall i \in I$$

o sea

$$f_i \in \overline{\mathfrak{Set}}\,(A_i, A), \forall i \in I$$

(ii) Si $B = (Y, Y)$ y $f : X \to Y$ es tal que para cada $i \in I$, $ff_i \in \overline{\mathfrak{Set}}\,(A_i, B)$, entonces [por el solo hecho de ser $f \in \mathfrak{Set}\,(X, Y)$], $f \in \overline{\mathfrak{Set}}\,(A, B)$.

Ejemplo 4.8 *Si $S = \left((X_i, \alpha_i) \xrightarrow{f_i} X\right)_I$ es un sumidero cuyo dominio es una clase de $\mathfrak{Gra}$-objetos $(X_i, \alpha_i)_I$, entonces una $\mathfrak{Gra}$-estructura final para X con respecto a S es*

$$\alpha = \{(f_i(x), f_i(x')) : (x, x') \in \alpha_i \ \ e\ i \in I\}$$

En efecto;
(i) Para cada $i \in I$, $f_i : (X_i, \alpha_i) \to (X, \alpha)$ es compatible porque

$$(x, x') \in \alpha_i \Rightarrow (f_i(x), f_i(x')) \in \alpha$$

(ii) Si (Y, β) es una digráfica y $f : X \to Y$ es una función tal que toda composición $ff_i : (X_i, \alpha_i) \to (Y, \beta)$ es compatible, entonces dada cualquier $(f_i(x), f_i(x')) \in \alpha$ tenemos $(ff_i(x), ff_i(x')) \in \beta$, o sea que $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es compatible.

También se tiene un coconcepto correspondiente al de $\mathfrak{K}$-monofuente cuyo caso particular, cuando consta de una sola flecha, ya ha sido empleado: es el de epimorfismo. El concepto de $\underline{K}$-fuente que separa puntos también da lugar a un concepto casi dual en una categoría concreta:

Definición 4.6 *(a) Sea $\mathfrak{K}$ una categoría arbitraria. Un $\mathfrak{K}$-sumidero $S = ((f_i)_I, A)$ es un $\mathfrak{K}$-**episumidero** si toda vez que para un $\mathfrak{K}$-objeto B cualquiera se tengan morfismos*

$$h, k \in \mathfrak{K}\,(A, B)$$

tales que $hf_i = kf_i$, $\forall i \in I$, resulta que $h = k$.

(b) Si $S = (f, A)$ es un $\mathfrak{K}$-episumidero con una sola flecha f, entonces f recibe el nombre de **epimorfismo**.
(c) Si $\underline{K}$ es concreta y $S = ((f_i)_I, (X, \xi))$ es un $\underline{K}$-sumidero, se dice que S **es exhaustivo** si todo punto de su codominio posee una preimagen bajo al menos un miembro de la clase de $\underline{K}$-morfismos de S.

Proposición 4.10 *Si $\underline{K}$ es concreta y $S = ((f_i)_I, (X, \xi))$ es un $\underline{K}$-sumidero exhaustivo, entonces S es episumidero.*

Demostración. Hay que probar que para

$$h, k \in \underline{K}\,((X, \xi), (Y, \eta))$$

se tiene

$$h \neq k \Rightarrow hf_i \neq kf_i, \text{ p.a. } i \in I$$

Pero si $h \neq k$, entonces $h(x) \neq k(x)$, p.a. $x \in X$; como S es exhaustivo, existe $i \in I$ tal que $x = f_i(x')$. Por lo tanto

$$hf_i(x') \neq kf_i(x')$$

para esa misma i, que es a lo que se quería llegar. [✓]

Ejercicio 4.11 *Sea* $S = \left((W,\omega) \xrightarrow{f} X\right)$ *un sumidero de una sola flecha y supóngase que* f *es biyectiva. Probar que* ξ *es final en* X *con respecto a* S *si, y sólo si,* $f : (W,\omega) \to (X,\xi)$ *es un isomorfismo.*

Como con las estructuras iniciales, también con las finales se da una unicidad esencial que será enunciada enseguida. Como consecuencia, también aquí se hablará (cuando exista) de <u>*la*</u> estructura final para un conjunto X respecto de un sumidero S.

Proposición 4.11 *a) Si* $S = \left((f_i)_I, (X,\xi)\right)$ *es un* $\underline{K}$*-sumidero final y* $h : (X,\xi) \to \left(X,\xi'\right)$ *es un* $\underline{K}$*-isomorfismo, entonces* $S' = \left((hf_i)_I, \left(X,\xi'\right)\right)$ *también es un* $\underline{K}$*-sumidero final.*

b) Si

$$S = \left((X_i,\xi_i) \xrightarrow{f_i} (X,\xi)\right)_I \quad \text{y} \quad S' = \left((X_i,\xi_i) \xrightarrow{f_i} \left(X,\xi'\right)\right)_I$$

son $\underline{K}$-sumideros finales, entonces existe un $\underline{K}$-isomorfismo $h : (X,\xi) \to \left(X,\xi'\right)$ tal que $hf_i = f_i$, $\forall i \in I$.

Demostración. a) Sea (Y,η) un $\underline{K}$-objeto arbitrario y supóngase que $f : X \to Y$ es una función tal que $f(hf_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$. Entonces fh es una función tal que $(fh)f_i$ es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$, de manera que, por la finalidad de S, fh resulta $\underline{K}$-morfismo. Como además h es un $\underline{K}$-isomorfismo entonces, debido al resultado establecido en el ejercicio anterior, puede aplicarse la propiedad característica de un sumidero final y asegurar que f es un $\underline{K}$-morfismo.

b) Sea

$$h = 1_X : (X,\xi) \to \left(X,\xi'\right)$$

Como S' es un $\underline{K}$-sumidero, entonces

$$1_X f_i = f_i : (X_i,\xi_i) \to \left(X,\xi'\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$, de modo que, por la finalidad de S, resulta

$$1_X \in \underline{K}\left((X,\xi), \left(X,\xi'\right)\right)$$

La demostración de que

$$1_X^{-1} \in \underline{K}\left(\left(X,\xi'\right), (X,\xi)\right)$$

es análoga.

$$\begin{array}{ccc} \left(X,\xi'\right) & \overset{1_X}{\leftrightarrows} & (X,\xi) \\ f_i \nwarrow & \circlearrowleft & \nearrow f_i \\ & (X_i,\xi_i) & \end{array}$$

Por lo tanto, 1_X es un $\underline{K}$-isomorfismo. [✓]

En $\mathfrak{Top}$ la topología fuerte para X es *la* $\mathfrak{Top}$-estructura final con relación a cierto sumidero S. El nombre de *fuerte* le viene a consecuencia de ser la *más grande* de las topologías para X que hace de cada flecha de S una función continua. También el vocablo *final* para una $\underline{K}$-estructura obedece a razones similares. Es justamente la situación casi dual que priva con las estructuras iniciales:

Proposición 4.12 *Sea* $S = \left((f_i)_I, (X,\xi)\right)$ *un* $\underline{K}$*-sumidero final cualquiera. Entonces* ξ *es la más fina de las* $\underline{K}$*-estructuras para* X *que hacen de cada* f_i *un* $\underline{K}$*-morfismo.*

Demostración. Supóngase que θ es otra $\underline{K}$-estructura para X que hace de cada f_i un $\underline{K}$-morfismo.

$$\begin{array}{ccc} (X,\theta) & \overset{1_X}{\longleftarrow} & (X,\xi) \\ f_i \nwarrow & \circlearrowleft & \nearrow f_i \\ & (X_i,\xi_i) & \end{array}$$

Entonces, la composición $1_X f_i$ es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$, lo cual, debido a la finalidad de S, implica que 1_X es un $\underline{K}$-morfismo, y esto significa precisamente que ξ es más fina que θ. [✓]

Capítulo 5

Inmersiones

Es tan frecuente la aparición de las ideas de inmersión y cociente en las teorías matemáticas, que sería raro no hallar un concepto general de ellas aplicable en cualquier categoría concreta. Esta aplicabilidad exige, desde luego, que tal concepto sea lo suficientemente dúctil como para adoptar las formas específicas que cada categoría concreta imponga; sin embargo, su formulación no puede ser de otro modo sino inducida, recogiendo en lo particular la pepita de generalidad que dé carácter universal a su fórmula, aun cuando tal universalidad no rebase las fronteras discursivas del orbe que tiene como núcleo a $\mathfrak{Set}$.

5.1. Inmersiones

Pártase del hecho intuitivo de que en $\mathfrak{Set}$ se consigue la *inmersión* de un conjunto A en un conjunto B siempre que A es *inyectable* en B, es decir, siempre que existe una función inyectiva $f : A \to B$. De hecho, esta es, aunque a muy grosso modo todavía, la idea de inmersión que aquí se persigue: Definir qué debe entenderse por *sumergir* un objeto en otro en una categoría concreta.

Obsérvese que esto es lo mismo que describir los morfismos a través de los cuales tal *inmersion* se consigue (y puesto que esto consiguen, es a ellos a quienes ha de darse el nombre de *inmersiones*). Ya se ve que para que la cosa marche tales morfismos deben ser ante todo morfismos inyectivos.

Podría pensarse que, como con éstos se cuida la $\underline{K}$-estructura al inyectar al $\underline{K}$-objeto A en el $\underline{K}$-objeto B, entonces todos y cada uno de ellos dan lugar a $\underline{K}$-*inmersiones*, pero pronto puede uno convencerse de que no es así. En $\mathfrak{Top}$, por ejemplo, denotando con τ_d y τ_i a las topologías discreta e indiscreta de un conjunto X cualquiera, se tiene que

$$1_X : (X, \tau_d) \to (X, \tau_i)$$

es continua e inyectiva pero no por ello se presume de haber sumergido a (X, τ_d) en (X, τ_i). ¿Por qué? ¿Qué chocaría de eso?

Sin duda, el hallar a X discreto dentro de X indiscreto. ¿Y por qué chocaría esto?

Pues porque *los espacios indiscretos sólo inducen subespacios indiscretos.*

Ah, entonces esta es la manera de distinguir, al menos en $\mathfrak{Top}$, a las inmersiones de entre los morfismos inyectivos: Una inmersión topológica f que inyecte al espacio (X, τ) en el espacio (Y, σ) debe "dejar a (X, τ) tal cual espacio topológico que es" como *subespacio* de (Y, σ); dicho en forma más técnica pero más precisa: Por medio de f debe quedar definido un homeomorfismo entre (X, τ) y el *subespacio* de (Y, σ), $(f(X), \sigma \mid f(X))$.

Para dar cabida a la generalización de estas ideas bastaría contar con el concepto categórico correspondiente al de *subespacio topológico.*

Recuérdese que en $\mathfrak{Top}$, el subespacio inducido por $W \subseteq Y$ en (Y, σ) es $(W, \sigma \mid W)$, donde $\sigma \mid W$ es la topología relativa para W definida por

$$\sigma \mid W = \{V \cap W : V \in \sigma\}$$

Denótese con ι a la inclusión de W en Y y obsérvese que

$$V \cap W = \iota^{-1}(V), \forall V \in \sigma$$

Pero

$$\tau(\iota,\sigma)=\left\{\iota^{-1}(V):V\in\sigma\right\}$$

es la topología débil para W con repecto a ι y σ; es decir, es la $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para W correspondiente a la fuente $(W\hookrightarrow(Y,\sigma))$ cuya única flecha es ι.

Para la estructura inicial respecto de una fuente $\mathcal{F}$ ya se cuenta con una definición categórica precisa. Si $\mathcal{F}=(X,f)$, o sea, si sólo consta de una sola flecha, tal definición puede reescribirse como sigue:

Definición 5.1 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sean, (Y,σ) un $\underline{K}$-objeto, X un conjunto y $f:X\to Y$ una función, cualesquiera. Se dice que $\xi\in\underline{K}[X]$* ***es inicial para** X **con respecto a** f **y** η* *si se satisfacen las condiciones:*

(1) $f\in\underline{K}((X,\xi),(Y,\eta))$;
(2) Si $(W,\omega)\in\underline{K}$ y $g:W\to X$ es una función tal que

$$fg\in\underline{K}((W,\omega),(Y,\eta))$$

entonces, $g\in\underline{K}((W,\omega),(X,\xi))$.

Por lo tanto, se puede proponer como generalización de la idea de subespacio la siguiente.

Definición 5.2 *Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta, (Y,η) un $\underline{K}$-objeto y $W\subseteq Y$, arbitrarios. Considerando la inclusión $\iota:W\hookrightarrow Y$, diremos que W* ***induce un subobjeto en*** *(Y,σ) si existe $\omega\in\underline{K}[W]$ que sea inicial para W con respecto a ι y η. En tal caso diremos que el $\underline{K}$-objeto (W,ω)* ***es un subobjeto de*** *(Y,η).*

Apoyándose en esta definición se tiene como primera aproximación de la idea general de inmersión la siguiente.

Definición 5.3 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sean $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ un $\underline{K}$-morfismo inyectivo y $\theta\in\underline{K}[f(X)]$ una $\underline{K}$-estructura tal que $(f(X),\theta)$ es subobjeto de (Y,η). Si la restricción*

$$f\mid^{(f(X),\theta)}:(X,\xi)\to(f(X),\theta)$$

es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces se dice que f es una ***$\underline{K}$-inmersión a subobjeto.***

Aunque ésta es ya casi la definición de $\underline{K}$-inmersión que va a emplearse, unas observaciones servirán para afinarla un poco.

Se ha probado que si $\mathcal{F}=((X,\xi),(f_i)_I)$ es una $\underline{K}$-fuente inicial y $h:(X,\xi')\to(X,\xi)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces la fuente $\mathcal{F}'=\left((X,\xi'),(f_ih)_I\right)$ también es una $\underline{K}$-fuente inicial. Por otra parte, de acuerdo con la definición anterior, para ver en un $\underline{K}$-morfismo inyectivo $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ una $\underline{K}$-*inmersión a subobjeto* debemos tener una $\underline{K}$-fuente inicial $((f(X),\theta),\iota)$ y un $\underline{K}$-isomorfismo

$$f\mid^{(f(X),\theta)}:(X,\xi)\to(f(X),\theta)$$

Aplicando el resultado mencionado se tiene que también

$$\left((X,\xi),\iota f^{(f(X),\theta)}\right)$$

es una $\underline{K}$-fuente inicial; pero $\iota f\mid^{(f(X),\theta)}=f$. Por consiguiente, ξ es la $\underline{K}$-estructura inicial para X correspondiente a f y η.

Recíprocamente; sean, $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ un $\underline{K}$-morfismo inyectivo y $\theta\in\underline{K}[f(X)]$ una $\underline{K}$-estructura tal que $(f(X),\theta)$ es subobjeto de (Y,η), y supóngase que ξ es inicial para X con respecto a f y η. Debido a la inyectividad de f, la restricción

$$f\mid^{f(X)}:X\to f(X)$$

es biyectiva, por lo que también se puede considerar su función inversa

$$\left(f\mid^{f(X)}\right)^{-1}:f(X)\to X$$

Como además

$$f\left(f\mid^{f(X)}\right)^{-1}=\iota\in\underline{K}\left(\left(f\left(X\right),\theta\right),\left(Y,\eta\right)\right)$$

entonces, debido a la inicialidad de ξ se tiene que

$$\left(f\mid^{f(X)}\right)^{-1}\in\underline{K}\left(\left(f\left(X\right),\theta\right),\left(X,\xi\right)\right)$$

Por otra parte, como

$$\iota f\mid^{f(X)}=f\in\underline{K}\left(\left(X,\xi\right),\left(Y,\eta\right)\right)$$

entonces, debido a la inicialidad de θ con respecto a ι y η, se tiene que también

$$f\mid^{f(X)}\in\underline{K}\left(\left(X,\xi\right),\left(f\left(X\right),\theta\right)\right)$$

Por lo tanto

$$f\mid^{(f(X),\theta)}:\left(X,\xi\right)\to\left(f\left(X\right),\theta\right)$$

es un $\underline{K}$-isomorfismo y f una $\underline{K}$-*inmersión a subobjeto.*

Estas observaciones justifican el que se adopte como definición de $\underline{K}$-inmersión (a secas) la siguiente:

Definición 5.4 *Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta, (Y,η) un $\underline{K}$-objeto, X un conjunto y $f:X\to Y$ una función inyectiva, cualesquiera. Si $\xi\in\underline{K}[X]$ es inicial en X con respecto a f y η, entonces daremos el nombre de* $\underline{K}$***-inmersión*** *al $\underline{K}$-morfismo $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$.*

Observación 5.1 *Como se acaba de ver, tanto en la definición de $\underline{K}$-inmersión como en la de subobjeto, se emplea la noción de $\underline{K}$-estructura inicial. Por consiguiente, en uno y otro caso vale aplicar los resultados que para $\underline{K}$-estructuras iniciales se han demostrado. Por ejemplo, que la $\underline{K}$-estructura inicial es única (salvo isomorfismo) o que es la menos fina que hace de la función correspondiente un $\underline{K}$-isomorfismo.*

Ejemplo 5.1 *Considérese en $\mathfrak{Pos}$ un copo arbitrario $(Y,\leq)$; sean, X un conjunto y $f:X\to Y$ una función inyectiva, cualesquiera. Entonces, se puede definir una relación $\preceq$ en X como*

$$x\preceq x'\Leftrightarrow f\left(x\right)\leq f\left(x'\right),\ \forall x,x'\in X$$

Nótese que:

a) $\preceq$ es un orden parcial en X.

En efecto, para cualesquiera $x,x',x''\in X$ se tiene

(i) $x\preceq x$ porque $f(x)\leq f(x)$.

(ii) Si $x\preceq x'$ y $x'\preceq x''$, entonces

$$f\left(x\right)\leq f\left(x'\right)\qquad\text{y}\qquad f\left(x'\right)\leq f\left(x''\right)$$

Por lo tanto

$$f\left(x\right)\leq f\left(x''\right);\therefore x\preceq x''.$$

(iii) Si $x\preceq x'$ y $x'\preceq x$, entonces

$$f\left(x\right)\leq f\left(x'\right)\qquad\text{y}\qquad f\left(x'\right)\leq f\left(x\right);\therefore f\left(x\right)=f\left(x'\right);$$

como f es inyectiva, esto implica que $x=x'$.

b) $\preceq$ es inicial en X con respecto a f y $\leq$.

En efecto:

(1) $f\in\mathfrak{Pos}\left(\left(X,\preceq\right),\left(Y,\leq\right)\right)$ porque, cualesquiera que sean $\forall x,x'\in X$

$$x\preceq x'\Rightarrow f\left(x\right)\leq f\left(x'\right)$$

(2) Sean, $(W,\leqq)$ un copo y $g:W\to X$ una función tal que

$$fg\in\mathfrak{Pos}\left(\left(W,\leqq\right),\left(Y,\leq\right)\right)$$

Entonces, para cualesquiera $w, w' \in W$ tales que $w \leqq w'$ se tiene

$$f(g(w)) = fg(w) \leq fg(w') = f(g(w'))$$

lo cual, según la definición del orden parcial $\preceq$, es si, y sólo si, $g(w) \preceq g(w')$. Por lo tanto

$$g \in \mathfrak{Pos}((W, \leqq), (X, \preceq))$$

Por lo tanto, $f : (X, \preceq) \to (Y, \leq)$ es una $\mathfrak{Pos}$-inmersión.$_{[\checkmark]}$

Ejemplo 5.2 $\mathfrak{Met}$ *denota a la categoría de los* ***espacios métricos*** *y* ***contracciones***.

(i) La **estructura métrica** en un conjunto X arbitrario le viene dada por funciones del tipo

$$d : X \times X \to [0, \infty)$$

que, para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in X$, satisfacen las condiciones
(d$_1$) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
(d$_2$) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$
(d$_3$) $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$
Una función con estas características es una **métrica** para el conjunto X. Por lo tanto

$$\mathfrak{Met}[X] = \{d : X \times X \to [0, \infty) \mid d \text{ es una métrica para } X\}$$

(ii) En consecuencia, los $\mathfrak{Met}$-objetos o **espacios métricos** son parejas (X, d) en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $d \in \mathfrak{Met}[X]$.

(iii) Los $\mathfrak{Met}$-morfismos o **contracciones** entre dos espacios métricos $M_1 = (X_1, d_1)$ y $M_2 = (X_2, d_2)$ cualesquiera, son funciones tales que

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq d_1(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X_1$$

Es fácil comprobar que $\mathfrak{Met}$ satisface las condiciones (m_1) y (m_2) que definen a una categoría concreta.

Supóngase ahora que (Y, d_Y) es un espacio métrico, X un conjunto, y $f : X \to Y$ una función inyectiva. Entonces

$$d_X : X \times X \to [0, \infty)$$

definida por

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)), \forall x_1, x_2 \in X$$

es una métrica para X. En efecto, para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in X$ se tiene que:

(d$_1$) Si $d_X(x_1, x_2) = 0$, entonces $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = 0$, lo cual, debido a que d_Y es una métrica, es si, y sólo si, $f(x_1) = f(x_2)$; y como f es inyectiva, esto implica que $x_1 = x_2$.

(d$_2$)

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_Y(f(x_2), f(x_1)) = d_X(x_2, x_1)$$

(d$_3$)

$$d_X(x_1, x_3) = d_Y(f(x_1), f(x_3)) \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) + d_Y(f(x_2), f(x_3)) = d_X(x_1, x_2) + d_X(x_1, x_2)$$

d_X es la $\mathfrak{Met}$-estructura inicial para X correspondiente a f y d_Y. En efecto,
(1) $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es, obviamente, una contracción.
(2) Si (W, d_W) es un espacio métrico y $g : W \to X$ una función tal que

$$fg \in \mathfrak{Met}((W, d_W), (Y, d_Y))$$

Entonces, dados cualesquiera $w_1, w_2 \in W$ tenemos

$$d_Y(fg(w_1), fg(w_2)) \leq d_W(w_1, w_2) \ ;$$

pero, por definición de d_X :

$$d_X\left(g\left(w_1\right), g\left(w_2\right)\right) = d_Y\left(f\left(g\left(w_1\right)\right), f\left(g\left(w_2\right)\right)\right) = d_Y\left(fg\left(w_1\right), fg\left(w_2\right)\right)$$

Por lo tanto

$$g \in \mathfrak{Met}\left(\left(W, d_W\right), \left(X, d_X\right)\right)$$

Por lo tanto, f es $\mathfrak{Met}$-inmersión.$_{[\checkmark]}$

Ejercicio 5.1 *Demuestre que en una categoría concreta arbitraria toda sección es una inmersión.*

Observación 5.2 *En los dos ejemplos anteriores siempre es posible definir estructuras que hagan de $f(X)$ un subobjeto del codominio de f.*[1] *Ya se ha probado que cuando esto ocurre, la restricción $f\mid^{f(X)}$ define un isomorfismo entre X (con la estructura inicial) y el subobjeto $f(X)$.*

$$\begin{array}{ccc} (X,\xi) & \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{f|^{f(X)}} \\ \xleftarrow[\left(f|^{f(X)}\right)^{-1}]{} \end{array}\right) & (f(X),\theta) \\ f\searrow & \circlearrowright & \swarrow\iota \\ & (Y,\eta) & \end{array}$$

Una categoría concreta en la que para cualquier objeto (X,ξ) y para cualquier conjunto $A \subseteq X$ existe una estructura α tal que (A,α) es subobjeto de (X,ξ) se llama **hereditaria**.

Por otra parte, como en toda categoría dos objetos son teóricamente indistinguibles si son isomorfos entre sí, entonces se puede decir que en toda categoría concreta que sea hereditaria los objetos *inmersibles* en un objeto (Y,η) [2] se agotan con los subobjetos de (Y,η), y las inmersiones con las inclusiones de los mismos. Esta es (en el sentido del isomorfismo) la interpretación que se puede dar del diagrama anterior.

Pero no toda categoría concreta es hereditaria. Como ejemplo piénsese en $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$; es claro que no todo subconjunto de un espacio vectorial es subespacio suyo. Otro ejemplo lo da $\mathfrak{Topc}_2$, la categoría de los **espacios compactos de Hausdorff y funciones continuas**. En $\mathfrak{Topc}_2$ los subobjetos de un espacio (X,τ) son única y exclusivamente los subconjuntos cerrados de (X,τ).

En efecto, por resultados de topología general se sabe que los subconjuntos cerrados de un espacio compacto también son compactos y que el ser de Hausdorff es una propiedad que hereda todo subespacio de un espacio de Hausdorff. Por consiguiente, si $A \subseteq X$ es cerrado en (X,τ) y $(X,\tau) \in \mathfrak{Topc}_2$, entonces también $(A,\tau \mid A) \in \mathfrak{Topc}_2$. Además:

(1) $\iota : (A,\tau \mid A) \hookrightarrow (X,\alpha)$ es continua porque

$$\iota^{-1}(U) = U \cap A \in \tau \mid A, \ \forall U \in \tau$$

(2) Si $(Z,\rho) \in \mathfrak{Topc}_2$ y $g : Z \to A$ es una función tal que

$$\iota g : (Z,\rho) \to (X,\tau)$$

es continua, entonces

$$g^{-1}(U \cap A) = g^{-1}\left(\iota^{-1}(U)\right) = (\iota g)^{-1}(U) \in \rho, \ \forall U \cap A \in \tau \mid A$$

lo que significa que también $g : (Z,\gamma) \to (A,\tau \mid A)$ es continua.

Esto prueba que $(A,\tau \mid A)$ es subobjeto de (X,τ).

Recíprocamente, si $(A,\tau \mid A)$ es subobjeto de un $(X,\tau) \in \mathfrak{Topc}_2$, entonces A es cerrado en (X,τ) porque los subconjuntos compactos de un espacio de Hausdorff son cerrados.$_{[\checkmark]}$

Definición 5.5 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Se dice que $\underline{K}$ **tiene intersecciones** si para todo $\underline{K}$-objeto (X,ξ) y para cualesquiera subobjetos suyos $(A_i,\alpha_i)_I$ existe una $\underline{K}$-estructura para $\bigcap_{i\in I} A_i$ con la cual resulte subobjeto de (X,ξ).*

[1] Se está siendo ambiguo diciendo esto de "que hagan de $f(X)$ un subobjeto del codominio de f". Es que es usual referirse a un conjunto $A \subseteq X$ como *subobjeto de* (X,ξ) cuando existe una estructura α tal que (A,α) es subobjeto de (X,ξ).

[2] Se entiende, aquéllos desde los que puede definirse una inmersión en (Y,η).

Ejemplos de categorías concretas con intersecciones y sin ellas.

1. Toda categoría concreta que sea hereditaria posee intersecciones.

2. Como los subobjetos de cualquier $(X,\tau) \in \mathfrak{Topc}_2$ son los subconjuntos cerrados de (X,τ) y como toda intersección arbitraria de éstos es cerrada en (X,τ), tenemos que $\mathfrak{Topc}_2$ tiene intersecciones.

3. El ejemplo que sigue es el de una categoría con la que aquí no se ha trabajado.

Sus objetos se llaman **retículas**[3]; son copos $(X,\leq)$ con la propiedad de que todo par x_1, x_2 de sus elementos tiene un **ínfimo** $x_1 \wedge x_2 \in X$ y un **supremo** $x_1 \vee x_2 \in X$; es decir, los elementos $x_1 \wedge x_2$ y $x_1 \vee x_2$ son tales que

$$x_1 \wedge x_2 \leq x_1, x_2 \leq x_1 \vee x_2$$

y si para $z, z' \in X$ se tiene

$$z' \leq \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} \leq z$$

entonces

$$z' \leq x_1 \wedge x_2 \quad \text{y} \quad x_1 \vee x_2 \leq z$$

respectivamente. Los morfismos entre dos retículas $(X,\leq)$ y $(Y,\leq)$ cualesquiera son los **homomorfismos reticulares**, es decir, funciones $f \in Y^X$ tales que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ cumplen

$$f(x_1 \wedge x_2) = f(x_1) \wedge f(x_2) \quad \text{y} \quad f(x_1 \vee x_2) = f(x_1) \vee f(x_2)$$

La categoría de las **retículas y de los homomorfismos reticulares** se denota por $\mathfrak{Lat}$. Para todo $X \in \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Lat}[X]$ es la familia de *estructuras reticulares*, es decir, la familia de órdenes parciales que convierten a X en retícula. Es fácil probar las condiciones (m_1) y (m_2) con las que $\mathfrak{Lat}$ resulta una categoría concreta.

Ejercicio 5.2 *Demuestre que $\mathfrak{Lat}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Pos}$.*

Ejercicio 5.3 *Sean $X, Y \in \mathfrak{Set}$, $X \subseteq Y$; si $\alpha \in \mathfrak{Lat}[X]$ y $\beta \in \mathfrak{Lat}[Y]$, probar que (X,α) es subobjeto de (Y,β) ssi para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se tiene*

$$x_1 \wedge_\beta x_2 = x_1 \wedge_\alpha x_2 \quad y \quad x_1 \vee_\beta x_2 = x_1 \vee_\alpha x_2$$

Para continuar con el ejemplo, supóngase que $(Y_i, \beta_i)_I$ es una familia de subretículas de una retícula arbitraria (X,α); sea $Y = \bigcap\limits_{i\in I} Y_i$. Debido al resultado establecido en el ejercicio anterior, dados cualesquiera $y_1, y_2 \in Y$ se tiene

$$y_1 \wedge_\alpha y_2 \ , \ y_1 \vee_\alpha y_2 \in Y_i, \ \forall i \in I$$

Por lo tanto, siendo β el orden parcial inducido por α en Y y haciendo

$$y_1 \wedge_\beta y_2 = y_1 \wedge_\alpha y_2 \quad \text{y} \quad y_1 \vee_\beta y_2 = y_1 \vee_\alpha y_2$$

se tiene, a consecuencia del ejercicio anterior, que también (Y,β) es subretícula de (X,α). Esto prueba que $\mathfrak{Lat}$ es una categoría concreta con intersecciones.

4. Por los cursos de álgebra lineal se sabe que la intersección arbitraria de subespacios de un espacio vectorial cualquiera es también un subespacio de éste. Así, $\mathfrak{Vec}$ es otro ejemplo de categoría concreta con intersecciones.

5. $\mathfrak{Topc}$ denotará a la categoría de **los espacios compactos y de las funciones continuas**. Se verá un ejemplo que muestra que $\mathfrak{Topc}$ carece de intersecciones.

Sea $Z = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ y sea ρ la topología para Z definida por

$$U \in \rho \Leftrightarrow \begin{cases} Z - U \text{ es finito} \\ \text{o} \\ U \cap \{-\infty, +\infty\} = \emptyset \end{cases}$$

Entonces, $\rho \in \mathfrak{Topc}[Z]$. En efecto, si $\mathcal{A} = (U_i)_I$ es una cubierta abierta arbitraria de Z, entonces $-\infty \in U_{i_0}$, p.a. $i_0 \in I$; luego, $U_{i_0} \cap \{-\infty, +\infty\} \neq \varnothing$, y como $U_{i_0} \in \rho$, entonces $Z - U_{i_0}$ es finito y por lo tanto puede ser

[3] O, si se prefiere, en francés: *lattices*.

cubierto por un número finito de miembros de $\mathcal{A}$. Estos miembros y U_{i_0} constituyen una subcubierta finita para Z, lo cual prueba que, efectivamente, $(Z,\rho) \in \mathfrak{Topc}$.

Valiéndose de argumentos similares a éste es posible evidenciar que

$$Y_1 = Z - \{-\infty\} \quad \text{y} \quad Y_2 = Z - \{+\infty\}$$

son subconjuntos compactos de Z. En consecuencia, los subespacios de (Z,ρ)

$$(Y_1, \rho \mid Y_1) \quad \text{y} \quad (Y_2, \rho \mid Y_2)$$

son subobjetos en $\mathfrak{Topc}$. Sin embargo, su intersección

$$\mathbb{Z} = Y_1 \cap Y_2$$

no puede mirarse como subobjeto de (Z,ρ) en $\mathfrak{Topc}$ ya que, de hecho, la topología inducida $\rho \mid \mathbb{Z}$ es la topología discreta:

$$U_z = \{z\} \in \rho \text{ porque } U_z \cap \{-\infty, +\infty\} = \varnothing$$

de manera que

$$U_z \cap \mathbb{Z} = \{z\} \in \rho \mid \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{Z}$$

Por consiguiente, si ϱ fuese una topología para $\mathbb{Z}$ según la cual $(\mathbb{Z},\varrho)$ resultase $\mathfrak{Topc}$-subobjeto de (Z,ρ), entonces, por la continuidad de la inclusión

$$\iota : (\mathbb{Z},\varrho) \hookrightarrow (Z,\rho)$$

se tiene

$$\{z\} = \iota^{-1}(U_z) \in \varrho, \ \forall z \in \mathbb{Z}$$

i.e. $\varrho = \rho \mid \mathbb{Z}$. Pero $(\mathbb{Z}, \rho \mid \mathbb{Z})$ no es compacto porque de la cubierta abierta

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, ...\}$$

es imposible extraer una subcubierta finita. Así pues, tal ϱ no existe.$_{[\checkmark]}$

Observación 5.3 *Si $\underline{K}$ tiene intersecciones, entonces para todo subconjunto M de todo $\underline{K}$-objeto (X,ξ) existe el más chico de los subobjetos (A,α) de (X,ξ) tal que $M \subseteq A$: a saber, es la intersección de todos los subobjetos de (X,ξ) que contienen a M.*

Definition 1 *Si $(A_i,\alpha_i)_I$ es la familia de subobjetos de (X,ξ) que contienen a M y α es una $\underline{K}$-estructura que hace de $A = \bigcap_{i\in I} A_i$ un subobjeto de (X,ξ), se dice que M **genera a** (A,α). Si $A = X$, se habla de M como de un **conjunto de generadores de** (X,ξ). Así, M es un conjunto de generadores si, y sólo si, ningún subobjeto de (X,ξ), excepto (X,ξ) mismo, contiene a M. Se dice que (X,ξ) **tiene** n **generadores** si existe un conjunto M de generadores de (X,ξ) cuyo número cardinal es n y si ningún subconjunto de X de cardinalidad menor que n puede generar a (X,ξ).*

Ejemplo 5.3 *En $\mathfrak{Top}$, para cualquier espacio topológico (X,τ) el $\mathfrak{Top}$-subobjeto generado por cualquier $A \subseteq X$ es $(A, \tau \mid A)$.*

Ejemplo 5.4 *En forma más general: Si $\underline{K}$ es hereditaria, el subobjeto de (X,ξ) generado por $A \subseteq X$ es (A,α), donde α es una $\underline{K}$-estructura que hace de A un subobjeto de (X,ξ).*

3. El intervalo $[0,1]$ con la topología relativa a la usual de $\mathbb{R}$ es un $\mathfrak{Topc}_2$-objeto con $\aleph_0$ generadores.

En efecto, si $M = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $A \subseteq [0,1]$ es un subobjeto (en $\mathfrak{Topc}_2$) que contiene a M, entonces A es cerrado en $[0,1]$ y por lo tanto $\overline{M} \subseteq A$; pero $\overline{M} = [0,1]$ porque $\mathbb{Q}$ es denso en $[0,1]$. Por lo tanto, el único subobjeto que contiene a M es el propio intervalo. Además, se sabe que M es un conjunto infinito numerable, o sea que su número cardinal es $\aleph_0$.

Por otro lado, si $N \subseteq [0,1]$ es un conjunto de cardinalidad menor que $\aleph_0$, entonces N es finito y, por lo tanto, compacto (y de Hausdorff, por estar en un Hausdorff); i.e. $N \in \mathfrak{Topc}_2$ y, por lo tanto, el subobjeto generado por N es N mismo. Esto prueba que en $\mathfrak{Topc}_2$ el intervalo $[0,1]$ no puede generarse con menos de $\aleph_0$ elementos; y como con $\aleph_0$ sí se genera, entonces tiene $\aleph_0$ generadores, como se quería demostrar.

Ejemplo 5.5 *De un modo más general se puede asegurar que en* $\mathfrak{Topc}_2$ *el subobjeto que* $A \subseteq X$ *genera en* (X, τ) *es* $\overline{A}$.

En efecto, se ha visto ya que los subobjetos de cualquier $(X, \tau) \in \mathfrak{Topc}_2$ son precisamente los subconjuntos cerrados de (X, τ); por consiguiente, hablar del subobjeto generado por un subconjunto A cualquiera es hablar del más chico de los cerrados de (X, τ) que contienen a A, o sea, es referirse a $\overline{A}$.

Como conscuencia de esto se tiene que los subconjuntos densos de (X, τ) son precisamente los conjuntos generadores en este tipo de espacios ya que ellos, y solamente ellos, tienen la propiedad de que sus cerraduras coinciden con todo el espacio.

Ejemplo 5.6 *Como sabemos por los cursos de álgebra lineal, en* $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$ *un subconjunto de* n *vectores linealmente independientes de* $\mathbb{R}^n$ *genera a* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 5.7 *La categoría que a continuación se presenta suele denotarse por medio de* $\mathfrak{Mon}$.

(i) Para todo $X \in \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Mon}[X]$ consta de parejas $(\cdot, e)$ en las que

$$\cdot : X \times X \to X$$

es una operación binaria que es asociativa y e es un elemento de X llamado **neutro** que cumple lo siguiente:

$$e \cdot x = x = x \cdot e, \ \forall x \in X$$

(ii) Por consiguiente los $\mathfrak{Mon}$-objetos son parejas del tipo $(X, (\cdot, e))$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $(\cdot, e) \in \mathfrak{Mon}[X]$; reciben el nombre de **monoides**.

(iii) Si $A = (X, (\cdot, e))$ y $B = (Y, (\circ, \mathsf{e}))$ son monoides cualesquiera, entonces

$$\mathfrak{Mon}(A, B) = \{f \in \mathfrak{Set}(X, Y) : f(e) = \mathsf{e} \text{ y } f(x_1 \cdot x_2) = fx_1 \circ fx_2, \ \forall x_1, x_2 \in X\}$$

Los $\mathfrak{Mon}$-morfismos se llaman **homomorfismos de monoides**.

En $\mathfrak{Mon}$ se verifican los axiomas (m_1) y (m_2) que definen a una categoría concreta, como se comprueba fácilmente.

En $\mathfrak{Mon}$ los subobjetos se caracterizan por ser cerrados bajo la operación del monoide en cuestión y contener al elemento neutro.

En efecto, supóngase que $(X, (\cdot, e))$ es un monoide y que $A \subseteq X$ es cerado bajo $\cdot$ y contiene a e. Entonces, $(A, (\cdot, e))$ es un monoide y se tiene:

(1) $\iota : (A, (\cdot, e)) \hookrightarrow (X, (\cdot, e))$ es un homomorfismo de monoides ya que, como para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ se tiene $a_1 \cdot a_2 \in A$, entonces

$$\iota(a_1 \cdot a_2) = a_1 \cdot a_2 = \iota(a_1) \cdot \iota(a_2)$$

(2) Si $(Z, (\circ, \mathsf{e})) \in \mathfrak{Mon}$ y $g : Z \to A$ es tal que

$$\iota g \in \mathfrak{Mon}((Z, (\circ, \mathsf{e})), (X, (\cdot, e)))$$

entonces

$$g(z_1 \circ z_2) = \iota(g(z_1 \circ z_2)) = \iota g(z_1 \circ z_2) = \iota g(z_1) \cdot \iota g(z_2) = g(z_1) \cdot g(z_2), \ \forall z_1, z_2 \in Z$$

Además

$$e = \iota g(\mathsf{e}) = \iota(g(\mathsf{e})) = g(\mathsf{e})$$

Esto prueba que también $g : (Z, (\circ, \mathsf{e})) \to (A, (\cdot, e))$ es un homomorfismo.

Por lo tanto, $(A, (\cdot, e))$ es un submonoide de $(X, (\cdot, e))$.

Recíprocamente, si $(A, (\circ, \mathsf{e}))$ es un submonoide de $(X, (\cdot, e))$, entonces

$$\iota : (A, (\circ, \mathsf{e})) \hookrightarrow (X, (\cdot, e))$$

es un homomorfismo, de manera que para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ se tiene

$$a_1 \circ a_2 = \iota(a_1 \circ a_2) = \iota(a_1) \cdot \iota(a_2) = a_1 \cdot a_2 \ ;$$

pero por ser un monoide, $a_1 \circ a_2 \in A$. Por lo tanto, A está cerrada bajo $\cdot$. Además,

$$\mathsf{e} = \iota(\mathsf{e}) = e$$

por definición de $\mathfrak{Mon}$-morfismo. Por lo tanto, $e \in A$.

Ejercicio 5.4 *Demuestre que* $\mathfrak{Mon}$ *tiene intersecciones.*

Considérese ahora el monoide aditivo de números enteros $(\mathbb{Z}, (+, 0))$; se verá que tiene dos generadores: 1 y -1.

En efecto, si un submonoide $A \subseteq \mathbb{Z}$ contiene a estos dos números, entonces, por ser cerrado bajo la suma, también contendrá a

$$... - 4 = (-1) + (-3), -3 = (-1) + (-2), -2 = (-1) + (-1), -1 + 1, 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 1 + 3 = 4..., ...$$

y en consecuencia, $A = \mathbb{Z}$. Por otra parte, un solo número genera en $\mathbb{Z}$ al submonoide

$$\{0, n, 2n, ...\} \subsetneq \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Esto prueba que $(\mathbb{Z}, (+, 0))$ tiene dos generadores. $_{[\checkmark]}$

Capítulo 6

Cocientes

Como ya se sabe, el coconcepto correspondiente al de fuente inicial es el de sumidero final. Para tener presente su definición para el caso particular en que el sumidero consta de una sola flecha será escrita a continuación.

Definición 6.1 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sean, (X, ξ) un $\underline{K}$-objeto, Y un conjunto y $f : X \to Y$ una función, cualesquiera. Se dice que $\eta \in \underline{K}[Y]$* ***es final para** Y **con respecto a** f **y** ξ* *si se satisfacen las condiciones:*

(1) $f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta))$
(2) Si $(Z, \zeta) \in \underline{K}$ y $g : Y \to Z$ es una función tal que

$$gf \in \underline{K}((X, \xi), (Z, \zeta))$$

entonces también

$$g \in \underline{K}((Y, \eta), (Z, \zeta))$$

Ahora hay que aplicar el Principio de Dualidad a la definición de $\underline{K}$-inmersión, a fin de dar con el coconcepto correspondiente.

Definición 6.2 *Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta, (X, ξ) un $\underline{K}$-objeto, Y un conjunto y $f : X \to Y$ una función suprayectiva, cualesquiera. Si $\eta \in \underline{K}[Y]$ es final para Y con respecto a f y ξ, entonces se dará el nombre de* ***$\underline{K}$-cociente*** *al morfismo $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$. En tal caso se hablará de (Y, η) como de un* ***$\underline{K}$-objeto cociente*** *de (X, ξ) correspondiente al $\underline{K}$-morfismo f.*

Ejercicio 6.1 *Demuestre que en cualquier categoría concreta toda retracción es un cociente.*

Ejercicio 6.2 *Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta y $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ un $\underline{K}$-morfismo, arbitrarios. Probar que son equivalentes:*

(a) f es un isomorfismo.
(b) f es inmersión y cociente.

Como puede verse, la dualidad (o casi dualidad) exige que para definir un cociente en categorías concretas se emplee la noción de $\underline{K}$-estructura final. Por otra parte, la experiencia con las $\underline{K}$-inmersiones adquirida en la sección anterior, disuade en cuanto a querer esperar cocientes de simples $\underline{K}$-morfismos suprayectivos. En $\mathfrak{Top}$, por ejemplo, la misma función

$$1_X : (X, \tau_d) \to (X, \tau_i)$$

en la que τ_d y τ_i denotan a las topologías discreta e indiscreta, respectivamente, es un morfismo suprayectivo al cual chocaría ver como un cociente. ¿Por qué?

Pues porque toda *identificación* que se haga en un espacio discreto da por resultado un espacio que también es discreto.

En efecto, si *se identifican* (es decir, si se miran como idénticos) elementos de X mediante una relación de equivalencia $\sim$ cualquiera y se denota por $X\ /\sim$ a la familia de clases obtenida, se sabe, por resultados de topología general, que la aplicación canónica

$$\begin{array}{rccc} p: & X & \to & X\ /\sim \\ & x & \mapsto & [x] \end{array}$$

debe ser continua y que su continuidad caracteriza a la estructura topológica de $X\ /\sim$ como

$$\widetilde{\tau} = \left\{U \subseteq (X\ /\sim) \mid p^{-1}(U) \in \tau\right\}$$

Pero si la topología τ en X es discreta, entonces todas las fibras $p^{-1}\{[x]\}$ son abiertas en X y, por lo tanto, cada clase $[x]$ es abierta en $X\ /\sim$; o sea que $\widetilde{\tau}$ es la topología discreta de $X\ /\sim$.

Bueno, ¿pero qé chingados tienen qe ver las identificaciones con los cocientes?

En $\mathfrak{Top}$ ambos conceptos se toman como sinónimos porque siempre resultan homeomorfos ($\mathfrak{Top}$-isomorfos) entre sí. Pero si se quiere una respuesta más amplia a la pregunta anterior, habrá que elevar la noción de identificación al contexto general de las categorías concretas. Es lo que se hará enseguida.

Obsérvese, para empezar, que en $\mathfrak{Top}$ la estructura $\widetilde{\tau}$ con la que se topologiza a $X\ /\sim$ es la topología fuerte correspondiente a p y τ. Tal topología es la $\mathfrak{Top}$-estructura final para $X\ /\sim$ respecto al sumidero cuya única flecha es $X \xrightarrow{p} X\ /\sim$.

Definición 6.3 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sean, (X,ξ) cualquier $\underline{K}$-objeto, $\sim$ una relación de equivalencia en X y $p : X \to X\ /\sim$ la aplicación canónica. Si existe $\widetilde{\xi} \in \underline{K}[X\ /\sim]$ que sea final para $X\ /\sim$ con respecto a p y ξ, entonces se llamará* ***$\underline{K}$-objeto de identificación correspondiente a*** *$\sim$ al $\underline{K}$-objeto $\left(X\ /\sim, \widetilde{\xi}\right)$. En tal caso se hablará del morfismo*

$$p : (X,\xi) \to \left(X\ /\sim, \widetilde{\xi}\right)$$

como de una ***$\underline{K}$-identificación.***

Ejemplo 6.1 *Sean, (X,α) una gráfica dirigida y $\sim$ una relación de equivalencia en X, cualesquiera, y hágase*

$$\widetilde{\alpha} = \{([u_1],[u_2]) : \textit{existe } x_i \in [u_i] \textit{ tal que } (x_1,x_2) \in \alpha\}$$

Esto define una relación binaria (o $\mathfrak{Gra}$-estructura) en $X\ /\sim$ para la cual se tiene:

(1) $p : (X,\alpha) \to (X\ /\sim, \widetilde{\alpha})$ es una función compatible, ya que

$$(x_1,x_2) \in \alpha \Rightarrow (p(x_1), p(x_2)) = ([x_1],[x_2]) \in \widetilde{\alpha}$$

(2) Si $(Z,\gamma) \in \mathfrak{Gra}$ y $h \in \mathfrak{Set}(X\ /\sim, Z)$ son tales que

$$hp \in \mathfrak{Gra}((X,\alpha),(Z,\gamma))$$

entonces, cualquiera que sea

$$([u_1],[u_2]) \in \widetilde{\alpha}$$

puesto que existen

$$x_i \in [u_i] \ .\!\ni\!. \ (x_1,x_2) \in \alpha$$

resulta

$$(h[u_1], h[u_2]) = (hp(x_1), hp(x_2)) \in \gamma$$

de manera que también

$$h \in \mathfrak{Gra}((X\ /\sim, \widetilde{\alpha}),(Z,\gamma))$$

Quiere decir que $(X\ /\sim, \widetilde{\alpha})$ es el $\mathfrak{Gra}$-objeto de identificación de (X,α) correspondiente a $\sim$.

[✓]

Ejemplo 6.2 *La categoría que a continuación se presenta suele denotarse como* $\mathfrak{Sgr}$.

(i) Para todo $X \in \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Sgr}[X]$ es la clase de operaciones binarias en X que son asociativas; es decir:

$$\mathfrak{Sgr}[X] = \{\cdot : X \times X \to X \mid x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3, \forall x_1, x_2, x_3 \in X\}$$

(ii) Por lo tanto, los $\mathfrak{Sgr}$-objetos, que se llaman **semigrupos**, son parejas del tipo $(X, \cdot)$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $\cdot \in \mathfrak{Sgr}[X]$.

(iii) Si $A = (X, \cdot)$ y $B = (Y, *)$ son semigrupos, entonces

$$\mathfrak{Sgr}(A, B) = \{f \in \mathfrak{Set}(X, Y) : f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) * f(x_2)\}, \forall x_1, x_2 \in X$$

Los $\mathfrak{Sgr}$-morfismos son los **homomorfismos de semigrupos**. Las condiciones (m_1) y (m_2) que definen a una categoría concreta se verifican fácilmente.

En el semigrupo aditivo de los números enteros $(\mathbb{Z}, +)$ defínase la siguiente relación de equivalencia:

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \text{ es par}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$$

Entonces $\mathbb{Z} / \sim$ consta de dos clases:

$$[1], \text{ la clase de los nones} \qquad \text{y} \qquad [0], \text{ la clase de los pares}$$

Si se define $\oplus$ en $\mathbb{Z} / \sim$ como

$$[0] \oplus [0] = [1] \oplus [1] = [0] \qquad \text{y} \qquad [0] \oplus [1] = [1] \oplus [0] = [1]$$

entonces, para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

$$[z_1] \oplus [z_2] = [z_1 + z_2]$$

Por lo tanto:

(1) $p : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z} / \sim, \oplus)$ es un homomorfismo.

(2) Si $(Z, \cdot) \in \mathfrak{Sgr}$ y $h \in \mathfrak{Set}(\mathbb{Z} / \sim, Z)$ son tales que

$$hp \in \mathfrak{Sgr}((\mathbb{Z}, +), (Z, \cdot))$$

entonces, para cualesquiera $[z_1], [z_2] \in \mathbb{Z} / \sim$ se tiene que

$$h([z_1] \oplus [z_2]) = h(p(z_1) \oplus p(z_2)) = hp(z_1 + z_2) = hp(z_1) \cdot hp(z_2) = h[z_1] \cdot h[z_2]$$

lo cual significa que también

$$h \in \mathfrak{Sgr}((\mathbb{Z} / \sim, \oplus), (Z, \cdot))$$

Entonces, $(\mathbb{Z} / \sim, \oplus)$ es el $\mathfrak{Sgr}$-objeto de identificación de $(\mathbb{Z}, +)$ correspondiente a $\sim$.

[✓]

Ejemplo 6.3 *Otra relación de equivalencia definida para cualesquiera* $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ *es*

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1, z_2 > 1 \\ \text{ó} \\ z_1, z_2 \leq 1 \end{cases}$$

Para esta relación, $\mathbb{Z} / \sim$ *también consta de dos clases*

$$[1] = \{..., -2, -1, 0, 1\} \qquad y \qquad [2] = \{2, 3, 4, 5, ...\}$$

Si se quiere definir una operación $*$ *en* $\mathbb{Z} / \sim$ *según la cual* $(\mathbb{Z} / \sim, *)$ *resulte* $\mathfrak{Sgr}$-*objeto de identificación de* $(\mathbb{Z}, +)$ *correspondiente a* $\sim$, *entonces, dado que* p *tiene que resultar un homomorfismo, se debe definir* $[1] * [1] = [2]$ *ya que*

$$[2] = p(2) = p(1 + 1) = p(1) * p(1)$$

Pero entonces, dado que $p(0) = p(1)$, *se tendrá*

$$[1] = p(0) = p(0 + 0) = p(0) * p(0) = [2] \qquad \underset{\circ}{\nabla}$$

Esta contradicción demuestra que tal $\mathfrak{Sgr}$-*estructura* $*$ *para* $\mathbb{Z} / \sim$ *no existe.*

[✓]

Definición 6.4 *Una categoría concreta* $\underline{K}$ ***es cohereditaria*** *si para todo* $\underline{K}$*-objeto* (X, ξ) *y cualquier relación de equivalencia* $\sim$ *en* X *existe el* $\underline{K}$*-objeto de identificación* $\left(X \,/\, \sim, \widetilde{\xi}\right)$ *de* (X, ξ) *correspondiente a* $\sim$*.*

De los ejemplos anteriores se sigue que $\mathfrak{Gra}$ es cohereditaria y que $\mathfrak{Sgr}$ no lo es.

$\mathfrak{Pros}$, como se verá a continuación, es ejemplo de otra categoría concreta que es cohereditaria; es **la categoría de los conjuntos preordenados** (*copros*, es decir, aquéllos en los que está definida una relación binaria que es reflexiva y transitiva) **y de las funciones monótonas**.

Ejercicio 6.3 *Demuestre (en sentido de* subcategorías*) que son válidas las contensiones*

$$\mathfrak{Pos} \subseteq \mathfrak{Pros} \subseteq \mathfrak{Gra}$$

Proposición 6.1 *Sea* $X \in \mathfrak{Set}$ *y sean*

$$\xi_j \in \mathfrak{Pros}\,[X]\,, \forall j \in J$$

donde J *es cualquier familia de índices. Entonces,* $\xi = \bigcap_{j \in J} \xi_j \in \mathfrak{Pros}\,[X]$*.*

Demostración. (i) ξ es reflexiva, porque si $x \in X$ entonces $(x, x) \in \xi_j, \forall j \in J$.

(ii) ξ es transitiva, porque si

$$(x_1, x_2) \in \xi \qquad \text{y} \qquad (x_2, x_3) \in \xi$$

es que para cualquier $j \in J$

$$(x_1, x_2) \in \xi_j \qquad \text{y} \qquad (x_2, x_3) \in \xi_j$$

y, por lo tanto,

$$(x_1, x_3) \in \xi_j, \forall j \in J$$

De aquí que $\xi \in \mathfrak{Pros}\,[X]$.

[✓]

En vista del resultado anterior y del hecho de que

$$X \times X \in \mathfrak{Pros}\,[X]\,, \forall X \in \mathfrak{Set}$$

se puede asegurar la existencia de un preorden mínimo para X que contenga a cualquier $A \subseteq X \times X$, ya que al considerar a la familia $\left(\xi_j\right)_J$ de todos los preórdenes para X que contienen a A, entonces $\xi = \bigcap_{j \in J} \xi_j$ es tal preorden para X.

Definición 6.5 *Sean,* $X \in \mathfrak{Set}$ *y* $A \subseteq X \times X$ *arbitrarios. Dados cualesquiera* $a, b \in X$*, se llamará* ***cadena en*** A ***de*** a ***en*** b *a toda sucesión finita de elementos de* A *del tipo*

$$(a, c_1)\,, (c_1, c_2)\,, ..., (c_n, b)$$

Proposición 6.2 *Sean,* $X \in \mathfrak{Set}$ *y* $A \subseteq X \times X$ *arbitrarios. Si*

$$\Delta\,(X) = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq A$$

entonces el preorden mínimo para X *que contiene a* A *es*

$$\xi = \{(a, b) : \textit{existe una cadena en } A \textit{ de } a \textit{ en } b\}$$

Demostración. Comiéncese observando que $A \subseteq \xi$, porque si $(a, b) \in A$ entonces (a, b) es una cadena en A de a en b.

Por otra parte se tiene que:

(i) ξ es reflexiva, porque $\Delta\,(X) \subseteq A$;

(ii) Si

$$(a, b) \in \xi \qquad \text{y} \qquad (b, c) \in \xi$$

entonces en A existen cadenas

$$(a, b_1), (b_1, b_2), ..., (b_m, b) \qquad \text{y} \qquad (b, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_n, c)$$

que pueden *eslabonarse* para formar una sola cadena

$$(a, b_1), (b_1, b_2), ..., (b_m, b), (b, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_n, c)$$

claramente de a en c. De modo que también $(a, c) \in \xi$.

Finalmente, si η es cualquier otro preorden para X que contiene a A, entonces, como para cualquier $(a, b) \in \xi$ hay una cadena

$$(a, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_m, b)$$

de elementos de A, por aplicaciones sucesivas de la transitividad de η se tiene

$$\begin{aligned} (a, a_1), (a_1, a_2) &\in \eta \Rightarrow (a, a_2) \in \eta \\ (a, a_2), (a_2, a_3) &\in \eta \Rightarrow (a, a_3) \in \eta \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a, a_m), (a_m, b) &\in \eta \Rightarrow (a, b) \in \eta \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\xi \subseteq \eta$.

[✓]

Proposición 6.3 $\mathfrak{Pros}$ *es cohereditaria.*

Demostración. Sean, $(X, \xi) \in \mathfrak{Pros}$ y $\sim$ una relación de equivalencia en X, arbitrarios, y hágase

$$A = \{(t_1, t_2) \in (X \,/\, \sim) \times (X \,/\, \sim) : \text{existe } x_i \in t_i \text{ tal que } (x_1, x_2) \in \xi\}$$

Como se verá, el mínimo preorden para $X \,/\, \sim$ que contiene a A da lugar al objeto de identificación de (X, ξ) correspondiente a $\sim$.

Para aplicar la proposición anterior, obsérvese que $\Delta (X \,/\, \sim) \subseteq A$, pues, debido a que $\sim$ es una relación de equivalencia en X, ninguna $t \in X \,/\, \sim$ es vacía sino que contiene algún $x \in X$; y como $(x, x) \in \xi, \forall x \in X$, entonces $(t, t) \in A, \forall t \in X \,/\, \sim$.

En consecuencia

$$\widetilde{\xi} = \{(a, b) \in (X \,/\, \sim) \times (X \,/\, \sim) : \text{existe una cadena en } A \text{ de } a \text{ en } b\}$$

es el mínimo preorden para X que contiene a A. Además:

(1) $p : (X, \xi) \to \left(X \,/\, \sim, \widetilde{\xi}\right)$ es monótona ya que, por la definición de A, se tiene

$$(x_1, x_2) \in \xi \Rightarrow ([x_1], [x_2]) = (p(x_1), p(x_2)) \in A \subseteq \widetilde{\xi}$$

(2) Si $(Z, \zeta) \in \mathfrak{Pros}$ y $h \in \mathfrak{Set}(X \,/\, \sim, Z)$ son tales que

$$hp \in \mathfrak{Pros}((X, \xi), (Z, \zeta))$$

entonces, como para cualquier $(a, b) \in \widetilde{\xi}$ hay una cadena en A

$$(a, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_m, b)$$

y para cada *eslabón* de esta cadena existen elementos

$$x \in a, x_1 \in t_1; x_1' \in t_1, x_2 \in t_2; x_2' \in t_2, ..., x_m \in t_m; x_m' \in t_m, y \in b$$

tales que

$$(x, x_1), (x_1', x_2), ..., \left(x_{m-1}', x_m\right), (x_m', b) \in \xi$$

Debido a la monotonía de hp tenemos la sucesión

$$(hp(x), hp(x_1)), (hp(x_1'), hp(x_2)), ..., (hp(x_{m-1}'), hp(x_m)), (hp(x_m'), hp(y)) \in \zeta$$

pero

$$x_i, x_i' \in t_i \Rightarrow p(x_i) = p(x_i'), \forall i \in \{1, 2, ..., m\}$$

de modo que la sucesión anterior puede escribirse como

$$(h(a), h(t_1)), (h(t_1), h(t_2)), ..., (h(t_{m-1}), h(t_m)), (h(t_m), h(b)) \in \zeta$$

de donde, aplicando la transitividad de ζ, se obtiene

$$(h(a), h(b)) \in \zeta$$

Por lo tanto, también

$$h : \left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right) \to (Z, \zeta)$$

es monótona.

Esto prueba que $\left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right)$ es el objeto de identificación de (X, ξ) correspondiente a $\sim$.

Por lo tanto, $\mathfrak{Pros}$ es cohereditaria, como se quería demostrar.

[✓]

Como consecuencia de la proposición anterior puede darse una descripción de las relaciones de equivalencia en $\mathfrak{Pos}$ que derivan en copos de identificación. Para enunciarla se recurrirá al siguiente concepto:

Definición 6.6 *Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta y (X, ξ) un $\underline{K}$-objeto, arbitrarios. Si $\sim$ es una relación de equivalencia en X con respecto a la cual existe el $\underline{K}$-objeto de identificación correspondiente, entonces se dice que $\sim$ es una* ***$\underline{K}$-congruencia para*** (X, ξ).

Observación 6.1 *Cuando no se preste a duda el saber de qué categoría $\underline{K}$ se trata, se hablará de $\sim$ como de una* congruencia para (X, ξ)*, simplemente.*

Proposición 6.4 *Sean, (X, ξ) un copo y $\sim$ una relación de equivalencia en X, arbitrarios. Si $\left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right)$ es el copro de identificación de (X, ξ) correspondiente a $\sim$, entonces, son equivalentes:*

(a) $\sim$ es una $\mathfrak{Pos}$-congruencia para (X, ξ).
(b) $\widetilde{\xi}$ es antisimétrico.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Por (a), existe el $\mathfrak{Pos}$-objeto de identificación de (X, ξ) correspondiente a $\sim$; denotémoslo por $\left(X \;/ \sim, \widehat{\xi}\right)$. Entonces, son monótonas

$$\begin{aligned} p &: (X, \xi) \xrightarrow{p} \left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right) \xrightarrow{1_{X \,/\sim}} \left(X \;/ \sim, \widehat{\xi}\right) \\ p &: (X, \xi) \xrightarrow{p} \left(X \;/ \sim, \widehat{\xi}\right) \xrightarrow{1^{-1}_{X \,/\sim}} \left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, también resultan monótonas

$$1_{X \,/\sim} : \left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right) \to \left(X \;/ \sim, \widehat{\xi}\right) \qquad \text{y} \qquad 1^{-1}_{X \,/\sim} : \left(X \;/ \sim, \widehat{\xi}\right) \to \left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right)$$

En consecuencia se tiene que

$$(t_1, t_2) \in \widetilde{\xi} \Leftrightarrow (t_1, t_2) \in \widehat{\xi}$$

De aquí, y de la antisimetría de $\widehat{\xi}$, resulta que $\widetilde{\xi}$ también es antisimétrico.

$(b) \Rightarrow (a)$ Por hipótesis, el copro $\left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right)$ es un copo; y como la aplicación canónica ya era monótona (en $\mathfrak{Pros}$), entonces:

(1) $p : (X, \xi) \to \left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right)$ es un $\mathfrak{Pos}$-morfismo.

(2) Si $(Z,\zeta) \in \mathfrak{Pos}$ y $h \in \mathfrak{Set}(X\ /\ \sim, Z)$ son tales que la composición

$$hp : (X,\xi) \to (Z,\zeta)$$

resulta monótona, entonces puede bajarse uno de la categoría $\mathfrak{Pos}$ a la categoría $\mathfrak{Pros}$ para asegurar que también

$$h : \left(X\ /\ \sim, \widetilde{\xi}\right) \to (Z,\zeta)$$

es monótona.

Esto prueba que $\left(X\ /\ \sim, \widetilde{\xi}\right)$ es el $\mathfrak{Pos}$-objeto de identificación de (X,ξ) correspondiente a $\sim$. Por lo tanto, $\sim$ es una $\mathfrak{Pos}$-congruencia.

[✓]

El resultado anterior hace a $\mathfrak{Pos}$ muy sospechosa de no ser cohereditaria, pero aún cabe una duda: qué tal que siempre que se define una relación de equivalencia en un copo arbitrario (X,ξ), el preorden $\widetilde{\xi}$ resulta antisimétrico (?). Un contraejemplo bastará para disiparla.

Ejemplo 6.4 *En el copo* $(\mathbb{R},\leq)$ *con el orden usual defínase, para cualesquiera* $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

$$r_1 \sim r_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1, r_2 \in [-1,1] \\ \text{ó} \\ r_1, r_2 \in \mathbb{R} - [-1,1] \end{cases}$$

Es claro que se trata de una relación de equivalencia; las clases a que da lugar son:

$$c_1 = [-1,1] \qquad y \qquad c_2 = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$$

De acuerdo con la construcción del copro de identificación $\left(\mathbb{R}\ /\ \sim, \widetilde{\xi}\right)$ *correspondiente a* $\sim$*, hay que considerar al conjunto*

$$A = \{(t_1,t_2) \in (\mathbb{R}\ /\ \sim) \times (\mathbb{R}\ /\ \sim) : \textit{existe } r_i \in t_i \textit{ tal que } r_1 \leq r_2\}$$

que en este caso consta de cuatro elementos:

$$A = \{(c_1,c_1), (c_2,c_2), (c_1,c_2), (c_2,c_1)\}$$

y constituye por sí mismo un preorden para $\mathbb{R}\ /\ \sim$ *que, claramente, no es antisimétrico.*

En consecuencia, $\sim$ no es una $\mathfrak{Pos}$-congruencia para $(\mathbb{R},\leq)$; por lo tanto, $\mathfrak{Pos}$ no es cohereditaria.

[✓]

Ejercicio 6.4 *En el copo* $(\mathbb{R},\leq)$ *con el orden usual, para cualquier* $r \in \mathbb{R}$*, sea*

$$[r] = \text{máx}\{z \in \mathbb{Z} : z \leq r\}$$

Demuestre que la relación $\sim$ *dada mediante*

$$r_1 \sim r_2 \Leftrightarrow [r_1] = [r_2]$$

define una $\mathfrak{Pos}$*-congruencia para* $(\mathbb{R},\leq)$*, y que el* $\mathfrak{Pos}$*-objeto de identificación correspondiente a* $\sim$ *es isomorfo a* $\mathbb{Z}$ *con su orden usual.*

Ejercicio 6.5 *Demuestre que una relación de equivalencia* $\sim$ *en un semigrupo* $(X,\cdot)$ *es una congruencia si, y sólo si, para cualesquiera* $x_1, x_2, x_1', x_2' \in X$ *se tiene que*

$$x_1 \sim x_1' \qquad y \qquad x_2 \sim x_2' \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \sim x_1' \cdot x_2'$$

Ejercicio 6.6 *Dé una caracterización de las congruencias en* $\mathfrak{Mon}$*.*

Ejercicio 6.7 *Demuestre que en una retícula* $(X, \leq)$ *arbitraria, una relación de equivalencia* $\sim$ *en* X *es una congruencia si, y sólo si, para cualesquiera* $x_1, x_2, x_1', x_2' \in X$ *se tiene que*

$$x_1 \sim x_1' \quad y \quad x_2 \sim x_2' \Rightarrow (x_1 \vee x_2) \sim (x_1' \vee x_2') \quad y \quad (x_1 \wedge x_2) \sim (x_1' \wedge x_2')$$

Proposición 6.5 *Sea* $\underline{K}$ *una categoría concreta arbitraria. Si* $\underline{K}$ *es cohereditaria, entonces coinciden los conceptos de* $\underline{K}$*-identificación y* $\underline{K}$*-cociente.*

Ejercicio 6.8 *En el copo* $(\mathbb{R}, \leq)$ *con el orden usual, y para todo* $r \in \mathbb{R}$*, sea*

$$[r] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq r\}$$

Demuestre que

$$r_1 \sim r_2 \Leftrightarrow [r_1] = [r_2]$$

define una $\mathfrak{Pos}$*-congruencia para* $(\mathbb{R}, \leq)$*, y que el* $\mathfrak{Pos}$*-objeto de identificación correspondiente a* $\sim$ *es isomorfo a* $\mathbb{Z}$ *con su orden usual.*

Como en $\mathfrak{Pos}$, también en $\mathfrak{Sgr}$ se cuenta con una descripción de las congruencisas.

Proposición 6.6 *Una relación de equivalencia* $\sim$ *en un semigrupo* $(X, \cdot)$ *es una congruencia si, y sólo si, para cualesquiera* $x_1, x_2, x_1', x_2' \in X$ *se tiene que*

$$x_1 \sim x_1' \ y \ x_2 \sim x_2' \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \sim x_1' \cdot x_2'$$

Demostración. Siendo válida la implicación anterior se puede definir una operación $*$ en la familia de clases como

$$[x_1] * [x_2] = [x_1 \cdot x_2]\,, \forall x_1, x_2 \in X$$

Haciéndolo así se obtiene que:

(1) $p : (X, \cdot) \to (X \ / \sim, *)$ es un homomorfismo de semigrupos, pues

$$p\,(x_1 \cdot x_2) = [x_1 \cdot x_2] = [x_1] * [x_2] = p\,(x_1) * p\,(x_2)\,, \forall x_1, x_2 \in X$$

(2) Si $(Y, \circ) \in \mathfrak{Sgr}$ y $h : X \ / \sim \to Y$ es tal que $hp : (X, \cdot) \to (Y, \circ)$ es un homomorfismo, entonces, cualesquiera que sean $[x_1]\,, [x_2] \in X \ / \sim$, se tiene

$$h\,([x_1] * [x_2]) = h\,(p\,(x_1) * p\,(x_2)) = hp\,(x_1 \cdot x_2) = hp\,(x_1) \circ hp\,(x_2) = h\,[x_1] \circ h\,[x_2]$$

lo cual significa que también $h : (X \ / \sim, *) \to (Y, \circ)$ es un homomorfismo.

Recíprocamente, si $\sim$ es una congruencia para $(X, \cdot)$ y $(X \ / \sim, *)$ es el $\mathfrak{Sgr}$-objeto de identidicación correspondiente, entonces p es un homomorfismo y en consecuencia

$$[x_1 \cdot x_2] = p\,(x_1 \cdot x_2) = p\,(x_1) * p\,(x_2) = [x_1] * [x_2]\,, \forall x_1, x_2 \in X$$

Si además $x_1 \sim x_1'$ y $x_2 \sim x_2'$, entonces $[x_1] = [x_1']$, $[x_2] = [x_2']$ y por lo tanto

$$[x_1 \cdot x_2] = [x_1] * [x_2] = [x_1'] * [x_2'] = [x_1' \cdot x_2']$$

o sea que también $x_1 \cdot x_2 \sim x_1' \cdot x_2'$. $_{[\checkmark]}$

Ejercicio 6.9 *Dar una caracterización de las congruencias en* $\mathfrak{Mon}$.

Ejercicio 6.10 *Demuestre que en una retícula arbitraria* $(X, \leq)$ *una relación de equivalencia* $\sim$ *en* X *es una congruencia si, y sólo si, para cualesquiera* $x_1, x_2, x_1', x_2' \in X$ *se tiene que*

$$x_1 \sim x_1' \quad y \quad x_2 \sim x_2' \quad \Rightarrow \quad (x_1 \vee x_2) \sim (x_1' \vee x_2') \quad y \quad (x_1 \wedge x_2) \sim (x_1' \wedge x_2')$$

Proposición 6.7 *Sea* $\underline{K}$ *una categoría concreta arbitraria. Si* $\underline{K}$ *es cohereditaria, entonces coinciden las nociones de* $\underline{K}$*-identificación y* $\underline{K}$*-cociente.*

Demostración. Considérese una $\underline{K}$-identificación cualquiera

$$p : (X, \xi) \to \left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right)$$

Es claro que la función

$$p : X \to X \;/ \sim$$

es suprayectiva. Además, de acuerdo con la definición de $\underline{K}$-identificación, $\widetilde{\xi}$ es final para $X \;/ \sim$ con respecto a p y ξ. Por lo tanto, el morfismo p es un $\underline{K}$-cociente.

Recíprocamente, supóngase que se tiene un $\underline{K}$-cociente arbitrario

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

Para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ defínase

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Es claro que se trata de una relación de equivalencia. Como $\underline{K}$ es cohereditaria existen el $\underline{K}$-objeto de identificación correspondiente, $\left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right)$, y la $\underline{K}$-identificación

$$p : (X, \xi) \to \left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right).$$

Sea

$$\begin{array}{rccc} h : & X \;/ \sim & \to & Y \\ & [x] & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Es fácil probar que h es una biyección bien definida. Si se la compone con p se obtiene

$$hp = f \in \underline{K}\left((X, \xi), (Y, \eta)\right)$$

de modo que, por la finalidad de $\widetilde{\xi}$ con respecto a p y ξ, se tiene que también

$$h \in \underline{K}\left(\left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right), (Y, \eta)\right)$$

En cuanto a la función inversa, h^{-1}, se tiene

$$h^{-1} f = p \in \underline{K}\left((X, \xi), \left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right)\right)$$

de modo que, por la finalidad de η con respecto a f y ξ, se tiene que también

$$h^{-1} \in \underline{K}\left((Y, \eta), \left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right)\right)$$

Esto prueba que $h : \left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo y, por lo tanto, los $\underline{K}$-objetos cociente, (Y, η), y de identificación, $\left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right)$, resultan indistinguibles. $[\checkmark]$

Como consecuencia del resultado anterior puede decirse que en las categorías concretas que son cohereditarias, con los objetos de identificación se agotan los objetos cociente y con las aplicaciones canónicas de aquéllos quedan agotados todos los $\underline{K}$-cocientes. Esta es la interpretación que en tales categorías tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & (X, \xi) & & \\ & f \swarrow & & \searrow p & \\ & & h & & \\ \left(X \;/ \sim, \widetilde{\xi}\right) & & \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \cong \\ \longleftarrow \end{array} & & (Y, \eta) \\ & & h^{-1} & & \end{array}$$

Otro tipo de categorías en las que también coinciden identificaciones y cocientes son las *transportables*.

Definición 6.7 *Una categoría concreta $\underline{K}$ es* ***transportable*** *si para todo $\underline{K}$-objeto (X,ξ) y cualquier biyección $f : X \to Y$ existe un única $\underline{K}$-estructura $\eta \in \underline{K}[Y]$ tal que $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo.*

Ejercicio 6.11 *Demuestre que en una categoría concreta que sea transportable:*

a) con las inclusiones quedan agotadas las $\underline{K}$-inmersiones.
b) con las aplicaciones canónicas quedan agotados los $\underline{K}$-cocientes.
$\mathfrak{Pos}$ es ejemplo de una categoría que, aunque no es cohereditaria, sí es transportable.
En efecto, si (X,ξ) es un copo y $f : X \to Y$ es una función biyectiva, entonces

$$\eta = \{(y_1,y_2) \in Y \times Y : \text{existe } (x_1,x_2) \in \xi \text{ tal que } y_1 = f(x_1) \text{ y } y_2 = f(x_2)\} \in \mathfrak{Pos}[Y]$$

ya que: (*i*) Debido a la biyectividad de f, para toda $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, lo que hace de η una relación reflexiva.

(*ii*) Si $(y_1,y_2) \in \eta$ y $(y_2,y_3) \in \eta$, entonces existen $(x_1,x_2) \in \xi$ y $(x_2,x_3) \in \xi$ tales que $y_i = f(x_i), i = 1,2,3$. Pero entonces, $(x_1,x_3) \in \xi$ y por lo tanto, $(y_1,y_3) \in \eta$.

(*iii*) Si $(y_1,y_2) \in \eta$ y $(y_2,y_1) \in \eta$, entonces existe $(x_1,x_2) \in \xi$ tal que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Pero entonces, $x_1 = x_2$; por lo tanto, $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$.

Entonces, $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ es claramente monótona; y si (y_1,y_2) es cualquier miembro de η, entonces, debido a la biyectividad de f y a la definición de η, se tiene que las únicas preimágenes x_1,x_2 de y_1 y y_2 son tales que $(x_1,x_2) \in \xi$. Luego, es válida la implicación

$$(y_1,y_2) \in \eta \Rightarrow \left(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)\right) \in \xi$$

por lo que también $f^{-1} : (Y,\eta) \to (X,\xi)$ es monótona. Por lo tanto, f es un isomorfismo.

Y si η' es otro orden parcial para Y que hace de f un isomorfismo, entonces, por la transitividad de la relación de isomorfía, también

$$1_Y : (Y,\eta) \to (Y,\eta')$$

es un isomorfismo, lo cual implica que

$$(y_1,y_2) \in \eta \Leftrightarrow (y_1,y_2) \in \eta'$$

O sea que $\eta = \eta'$, como se quería demostrar.

Como consecuencia de esto y del ejercicio anterior se tiene que, aunque $\mathfrak{Pos}$ es una categoría que no es cohereditaria, en $\mathfrak{Pos}$, sin embargo, con las inclusiones de los subcopos quedan agotadas todas las $\mathfrak{Pos}$-inmersiones y con las aplicaciones canónicas de los copos de identificación quedan agotados todos los $\mathfrak{Pos}$-cocientes.

Ejercicio 6.12 *¿Es cierto que $\mathfrak{Sgr}$ es transportable? Justifique su respuesta.*

Proposición 6.8 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sean, $(X,\xi) \in \underline{K}$ y $\sim$ una congruencia en (X,ξ), cualesquiera. Entonces $\left(X / \sim, \widetilde{\xi}\right)$ es el $\underline{K}$-objeto de identificación de (X,ξ) correspondiente a $\sim$ si, y sólo si, $\widetilde{\xi}$ es la más fina de todas las $\underline{K}$-estructuras para $X / \sim$ que hacen de la aplicación canónica p un $\underline{K}$-morfismo.*

Demostración. Se sabe que siendo $\left(X / \sim, \widetilde{\xi}\right)$ el $\underline{K}$-objeto de identificación de (X,ξ) correspondiente a $\sim$, $\widetilde{\xi}$ es la $\underline{K}$-estructura final para $X / \sim$ respecto a p y ξ, y por lo tanto, es la más fina de las $\underline{K}$-estructuras para $X / \sim$ que hacen de p un $\underline{K}$-morfismo.

Recíprocamente, supóngase que $\widetilde{\xi}$ es la más fina de las $\underline{K}$-estructuras para $X / \sim$ que hacen de p un $\underline{K}$-morfismo. Como $\sim$ es una congruencia, existe el $\underline{K}$-objeto de identificación, $\left(X / \sim, \widehat{\xi}\right)$, de (X,ξ) correspondiente a $\sim$. Entonces, $\left(p, \left(X / \sim, \widehat{\xi}\right)\right)$ es un $\underline{K}$-sumidero final por lo que, en particular,

$$p : (X,\xi) \xrightarrow{p} \left(X / \sim, \widehat{\xi}\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por lo tanto, $\widetilde{\xi} \leq \widehat{\xi}$, $\left(i.e, 1^{-1}_{X/\sim} \in \underline{K}\left(\left(X / \sim, \widehat{\xi}\right), \left(X / \sim, \widetilde{\xi}\right)\right)\right)$.

Por otro lado se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & (X,\xi) & \\ p\swarrow & \circlearrowleft & \searrow p \\ \left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right) & \underset{1_{X\ /\sim}}{\longrightarrow} & \left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right) \end{array}$$

del cual resulta que

$$1_{X\ /\sim}\in \underline{K}\left(\left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right),\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)\right)$$

Por lo tanto, $\left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right)\cong\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$; o sea que también

$$\left(1_{X\ /\sim}p,\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)\right)$$

es un $\underline{K}$-sumidero final. En consecuencia, también $\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$ es un $\underline{K}$-objeto de identificación de (X,ξ) correspondiente a $\sim$, que es a lo que se quería llegar. $_{[\checkmark]}$

Corolario 6.1 *Si $\underline{K}$ es transportable, entonces toda congruencia $\sim$ determina de manera única al objeto de identificación correspondiente.*

Demostración. Sea $\sim$ una congruencia para (X,ξ) y sea $\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$ el $\underline{K}$-objeto de identificación de (X,ξ) correspondiente a $\sim$. Debido a la transportabilidad de $\underline{K}$, existe una única $\underline{K}$-estructura para $X\ /\sim$ que hace de la biyección $1_{X\ /\sim}$ un $\underline{K}$-isomorfismo; y como

$$1_{X\ /\sim}:\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)\to\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$$

es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces tal $\underline{K}$-estructura es precisamente $\widetilde{\xi}$ y, por lo tanto, $\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$ está unívocamente determinado. $_{[\checkmark]}$

Según se ha visto en ejemplos como $\mathfrak{Sgr}$ o $\mathfrak{Pos}$, no toda relación de equivalencia en un objeto conduce necesariamente a la formación de objetos de identificación. Sin embargo, suele ser frecuente que las relaciones de equivalencia inducidas por los morfismos en una categoría resulten congruencias. Se distinguirán tales tipos de relaciones con un nombre especial.

Definición 6.8 *(a) Sea $f:X\to Y$ una función arbitraria.* ***El núcleo de*** *f es la relación de equivalencia en X definida por*

$$x_1\sim x_2\Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

(b) Se dirá que una categoría concreta **tiene núcleos** si el núcleo de cualquiera de sus morfismos es una congruencia.

Ejemplo 6.5 *Toda categoría concreta que sea cohereditaria tiene núcleos.*

Ejemplo 6.6 $\mathfrak{Sgr}$ *tiene núcleos.*

En efecto, sea $f\in\mathfrak{Sgr}((X,\cdot),(Y,\circ))$ y denótese al núcleo de f mediante $\sim_f$; entonces, dados cualesquiera $x,x',\ y,y'\in X$ tales que

$$x\sim_f x' \quad \text{y} \quad y\sim_f y'$$

se tiene

$$f(x\cdot y)=f(x)\circ f(y)=f(x')\circ f(y')=f(x'\cdot y')$$

o sea que también $x\cdot y\sim_f x'\cdot y'$. Por lo visto en una proposición anterior, esto significa que $\sim_f$ es una congruencia, que es lo que había que probar.

Otro ejemplo de una categoría concreta que sin ser cohereditaria tiene núcleos es $\mathfrak{Pos}$.

Ejercicio 6.13 *Demuestre que* $\mathfrak{Pos}$ *tiene núcleos.*

Los morfismos en una categoría concreta con núcleos siempre pueden factorizarse por $\underline{K}$-identificaciones y $\underline{K}$-morfismos inyectivos como se indica a continuación.

1$^{\text{ER}}$ TEOREMA DE FACTORIZACIÓN.

Si $\underline{K}$ es una categoría concreta con núcleos, entonces todo $\underline{K}$-morfismo f se puede factorizar como $f = f'p$, donde p es una $\underline{K}$-identificación y f' un $\underline{K}$-morfismo inyectivo.

<u>*Demostración*</u>. Sea $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ un $\underline{K}$-morfismo arbitrario y sean, $\sim_f$ el núcleo de f y $\widetilde{\xi}$ la $\underline{K}$-estructura para $X \,/\, {\sim_f}$ que hace de la aplicación canónica p una $\underline{K}$-identidicación. Es claro que si se hace

$$\begin{array}{ccc} X \,/\, {\sim_f} & \overset{f'}{\to} & Y \\ [x] & \mapsto & f(x) \end{array}$$

se obtiene una función inyectiva bien definida. Entonces se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} (X,\xi) & & \overset{f}{\to} & & (Y,\eta) \\ & p \searrow & \circlearrowleft & \nearrow f' & \\ & & \left(X \,/\, {\sim_f}, \widetilde{\xi}\right) & & \end{array}$$

del cual resulta (debido a la finalidad de $\widetilde{\xi}$ con respecto a p y ξ) que

$$f' \in \underline{K}\left(\left(X \,/\, {\sim_f}, \widetilde{\xi}\right), (Y,\eta)\right)$$

con lo que el teorema queda demostrado. $_{[\checkmark]}$

Otro teorema de factorización (casi dual a éste) es válido cuando las imágenes de todos los morfismos de una categoría concreta dan lugar a subobjetos de los codominios correspondientes.

Definición 6.9 *Se dice que una categoría concreta* ***tiene imágenes*** *si para todo morfismo* $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$*, el conjunto* $f(X)$ *puede estructurarse como subobjeto de* (Y,η)*.*

Ejemplo 6.7 *Toda categoría concreta que sea hereditaria tiene imágenes.*

Ejemplo 6.8 $\mathfrak{Mon}$ *tiene imágenes.*

En efecto, recuérdese que los subobjetos de un monoide se caracterizan por contener al elemento neutro y ser cerrados bajo la operación del monoide. Sea $f : (X,(e,\cdot)) \to (Y,(\mathsf{e},\circ))$ un homomorfismo entre monoides y sean $y_1, y_2 \in f(X)$; entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Luego,

$$y_1 \circ y_2 = f(x_1) \circ f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2) \in f(X)$$

Por otra parte, la definición de homomorfismo entre monoides exige explícitamente la preservación del elemento neutro; en consecuencia

$$\mathsf{e} = f(e) \in f(X)$$

Ejemplo 6.9 $\mathfrak{Topc}_2$ *tiene imágenes.*

Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ un $\mathfrak{Topc}_2$-morfismo; entonces f es continua y (X,τ) compacto. Se sabe que las imágenes continuas de compactos son compactas; como además (Y,σ) es de Hausdorff y los subconjuntos compactos en un espacio de Hausdorff son cerrados, entonces $f(X)$ es cerrado en (Y,σ) y, por lo tanto, $\mathfrak{Topc}_2$-subobjeto de (Y,σ).

2$^{\underline{\text{o}}}$ TEOREMA DE FACTORIZACIÓN.

Sea $\underline{K}$ una categoría concreta con imágenes; entonces, todo $\underline{K}$-morfismo f se puede factorizar en la forma $f = \iota\bar{f}$, donde $\bar{f}$ es un $\underline{K}$-morfismo suprayectivo e ι es un $\underline{K}$-morfismo inclusivo de un subobjeto del codominio de f.

<u>*Demostración*</u>. Sea $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ un $\underline{K}$-morfismo arbitrario y sea $\theta\in\underline{K}[f(X)]$ tal que $(f(X),\theta)$ es subobjeto de (Y,η). Es claro que la restricción

$$f\,|^{f(X)}:\quad X\quad\to\quad f(X)$$

es una función suprayectiva. Además, se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X,\xi) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f\,|^{f(X)}"'] & & (Y,\eta) \\
& (f(X),\theta) \arrow[ur, "\iota"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

del cual resulta (debido a la inicialidad de θ con respecto a ι y η) que

$$f\,|^{f(X)}\in\underline{K}((X,\xi),(f(X),\theta))$$

con lo que el teorema queda demostrado.[✓]

Como consecuencia de los teoremas de factorización se tiene el siguiente resultado

Teorema. En toda categoría concreta $\underline{K}$ con núcleos e imágenes, todo $\underline{K}$-morfismo f puede factorizarse como $f=\iota\breve{f}p$, donde p es una $\underline{K}$-identidicación, $\breve{f}$ es un $\underline{K}$-morfismo biyectivo e ι la inclusión de algún subobjeto del codominio de f.

Demostración. Sea $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ un $\underline{K}$-morfismo arbitrario. Aplicando el 1^{er} teorema de factorización se sabe que tiene lugar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X,\xi) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & (Y,\eta) \\
& \left(X/\sim_f,\widetilde{\xi}\right) \arrow[ur, "f'"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

en donde

$$\begin{array}{ccc}
\left(X/\sim_f,\widetilde{\xi}\right) & \overset{f'}{\to} & (Y,\eta) \\
[x] & \mapsto & f(x)
\end{array}$$

es un $\underline{K}$-morfismo inyectivo. Si se restringe el codominio de la función f' a $f(X)$ se obtiene la función biyectiva

$$\begin{array}{ccc}
X/\sim_f & \overset{(f')\,|^{f(X)}}{\longrightarrow} & f(X) \\
[x] & \mapsto & f(x)
\end{array}$$

Hágase $\breve{f}=(f')\,|^{f(X)}$; se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X,\xi) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (Y,\eta) \\
\left(X/\sim_f,\widetilde{\xi}\right) \arrow[r, "\breve{f}"] & (f(X),\theta) \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

del cual resulta (por la finalidad de $\widetilde{\xi}$ o por la inicialidad de θ) que

$$\breve{f}\in\underline{K}\left(\left(X/\sim_f,\widetilde{\xi}\right),(f(X),\theta)\right)$$

con lo que el teorema queda demostrado.[✓]

Capítulo 7

Objetos Libres

Definición 7.1 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Se dice que un $\underline{K}$-objeto (X,ξ)* ***es libre sobre un conjunto*** *$M \subseteq X$ si para todo $\underline{K}$-objeto (Y,η) y cualquier función $f_0 : M \to Y$ existe un único $\underline{K}$-morfismo $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ que extiende a f_0, es decir, que $f(m) = f_0(m)$, $\forall m \in M$.*

Ejemplo 7.1 *En $\mathfrak{Mon}$, el monoide aditivo de números naturales $(\mathbb{N},(+,0))$ es libre sobre $\{1\}$.*

En efecto, si $(Y,(\cdot,e)) \in \mathfrak{Mon}$ y $f_0 : \{1\} \to Y$ es cualquier función, sea $y_0 = f_0(1)$. Entonces, la única extensión de f_0 a un homomorfismo de monoides

$$f : (\mathbb{N},(+,0)) \to (Y,(\cdot,e))$$

es

$$\begin{aligned} f(0) &= e \\ f(1) &= y_0 \\ f(2) &= f(1+1) = f(1)\cdot f(1) = y_0 \cdot y_0 \\ f(0) &= f(1+1+1) = f(1)\cdot f(1)\cdot f(1) = y_0\cdot y_0\cdot y_0 \qquad \text{etcétera} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.2 *En $\mathfrak{Mon}$ otro ejemplo viene a ser* ***el monoide de palabras*** *operado mediante concatenación de palabras; ahora se verá en qué consiste.*

Sea Σ un conjunto arbitrario (al cuál se llamará **alfabeto** y cuyos elementos se llamarán **letras**) y sea Σ^* el conjunto de sucesiones finitas de elementos de Σ (a cuyos elementos se da el nombre de **palabras**). Los elementos de Σ^* son: $\emptyset$, **la palabra vacía**; σ_1, las palabras de una sola letra ($\forall \sigma_1 \in \Sigma$); $\sigma_1\sigma_2$, las palabras con dos letras ($\forall \sigma_1,\sigma_2 \in \Sigma$); etcétera. Ahora defínase la **concatenación de palabras**

$$\cdot : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$$

como

$$\sigma_1\sigma_2...\sigma_m \cdot \tau_1\tau_2...\tau_n = \sigma_1\sigma_2...\sigma_m\tau_1\tau_2...\tau_n$$

para cualesquiera $\sigma_1\sigma_2...\sigma_m, \tau_1\tau_2...\tau_n \in \Sigma^*$. Es claro que entonces $(\Sigma^*,(\cdot,\emptyset)) \in \mathfrak{Mon}$. Este monoide es libre sobre Σ.

En efecto, si $(Y,(\circ,e)) \in \mathfrak{Mon}$ y $f_0 : \Sigma \to Y$ es cualquier función, entonces la única extensión de f_0 a un homomorfismo

$$f : (\Sigma^*,(\cdot,\emptyset)) \to (Y,(\circ,e))$$

es

$$\begin{aligned} f(\varnothing) &= e \\ f(\sigma_1) &= f_0(\sigma_1), \forall \sigma_1 \in \Sigma \\ f(\sigma_1\sigma_2) &= f(\sigma_1)\circ f(\sigma_2), \forall \sigma_1,\sigma_2 \in \Sigma \\ f(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) &= f(\sigma_1)\circ f(\sigma_2)\circ f(\sigma_3), \forall \sigma_1,\sigma_2,\sigma_3 \in \Sigma \qquad \text{etcétera} \end{aligned}$$

Obsérvese, en consecuencia, que para todo número cardinal existe un conjunto Σ (con esa cardinalidad) sobre el cual es libre su monoide de palabras.

Ejemplo 7.3 *En $\mathfrak{Met}$, el espacio métrico singular $(\{x\}, d_0)$ es libre sobre $\{x\}$.*

En efecto, si $(X,d) \in \mathfrak{Met}$ y $f_0 : \{x\} \to X$ es cualquier función, entonces

$$f_0 \in \mathfrak{Met}\left(\left(\{x\}, d_0\right), (X,d)\right)$$

Ejercicio 7.1 *Demuestre que en $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$ todo espacio vectorial es libre sobre cualquiera de sus bases.*

En lo sucesivo se hará uso frecuente del sencillo resultado que viene a continuación.

Lema 7.1 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta y supóngase que uno de sus $\underline{K}$-objetos, (X,ξ), es libre sobre un conjunto $M \subseteq X$. Si dos $\underline{K}$-morfismos cualesquiera*

$$h, k : (X,\xi) \to (Y,\eta)$$

son tales que

$$h(m) = k(m), \forall m \in M$$

entonces $h = k$.

Demostración. Sea $f_0 : M \to Y$ tal que $f_0(m) = h(m) = k(m), \forall m \in M$. Entonces h y k son $\underline{K}$-extensiones de f_0; de ahí que sea $h = k$. [✓]

Definición 7.2 *Cuando un $\underline{K}$-objeto (X,ξ) sea libre sobre un conjunto $M \subseteq X$, se hablará de M como de* ***un conjunto de generadores libres****. También se dirá que (X,ξ)* ***es un objeto libre con n generadores****, si $\#(M) = n$.*

Ya se ha dicho qué entender por un conjunto de generadores de un $\underline{K}$-objeto (X,ξ). Enseguida se probará que esta definición no es inconsistente con aquéllo.

Proposición 7.1 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sea (X,ξ) un $\underline{K}$-objeto arbitrario. Si (X,ξ) es libre sobre $M \subseteq X$, entonces M es un conjunto de generadores de (X,ξ).*

Demostración. Hay que probar que el más chico de los subobjetos de (X,ξ) que contienen a M es (X,ξ). Supóngase que (Y,η) es un subobjeto de (X,ξ) tal que $M \subseteq Y$. Considérense las funciones inclusivas

$$\upsilon : M \hookrightarrow X \qquad \vartheta : M \hookrightarrow Y \qquad \iota : Y \hookrightarrow X$$

Es claro que

$$\iota\vartheta = \upsilon$$

Como (X,ξ) es libre sobre M, la función ϑ se extiende a un $\underline{K}$-morfismo

$$\overline{\vartheta} : (X,\xi) \to (Y,\eta) \ ;$$

componiendo $\overline{\vartheta}$ con el $\underline{K}$-morfismo inclusivo $\iota : (Y,\eta) \hookrightarrow (X,\xi)$ se obtiene un $\underline{K}$-morfismo

$$\iota\overline{\vartheta} : (X,\xi) \to (X,\xi)$$

que evaluado en M coincide con 1_X. En efecto, para cualquier $m \in M$ se tiene

$$\iota\overline{\vartheta}(m) = \iota(\vartheta(m)) = \upsilon(m) = m$$

Entonces, debido al lema, $\iota\overline{\vartheta} = 1_X$. En consecuencia

$$x = \iota\left(\overline{\vartheta}(x)\right) \in Y, \forall x \in X$$

Por lo tanto, $Y = X$, que es a lo que se quería llegar.$_{[\checkmark]}$

En un ejemplo anterior se vió que $(\mathbb{N}, (+, 0))$ es un monoide libre sobre $\{1\}$. Como consecuencia del ejemplo 2, el monoide de palabras

$$\left(\{\shortmid\}^*, (\cdot, \emptyset)\right)$$

es un $\mathfrak{Mon}$-objeto libre sobre $\{\shortmid\}$. Obsérvese que los elementos de este monoide son los mismos naturales (pero disfrazados de palitos:)

$$\varnothing, \shortmid, \shortmid\shortmid, \shortmid\shortmid\shortmid, ..., \underbrace{\shortmid\shortmid\shortmid ... \shortmid}_{n \text{ veces}} = \shortmid^{[n]}, ...$$

Por lo tanto, es claro que se obtiene un $\mathfrak{Mon}$-isomorfismo

$$f : (\mathbb{N}, (+, 0)) \to \left(\{\shortmid\}^*, (\cdot, \emptyset)\right)$$

haciendo

$$f(0) = \varnothing,\ f(1) = \ |\ ,\ f(2) = \ ||\ ,\ f(3) = \ |||\ ,...,\ f(n) = \ |^{[n]}, ...$$

Como se verá enseguida, esto no es una casualidad.

Proposición 7.2 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta y sean $A = (X, \xi)$ y $A' = (X', \xi')$ dos $\underline{K}$-objetos arbitrarios.*

(1) Si A y A' son $\underline{K}$-objetos libres sobre conjuntos biyectables, entonces A y A' son $\underline{K}$-isomorfos.

(2) Si A es libre sobre un conjunto M y A' es isomorfo a A, entonces A' es libre sobre un conjunto M' biyectable con M.

Demostración. (1) Supóngase que A es libre sobre M, que A' es libre sobre M', y que $f_0 : M \to M'$ es una función biyectiva; considérense las inclusiones

$$\iota : M \hookrightarrow X \quad \text{y} \quad \iota' : M' \hookrightarrow X'$$

Entonces, para las composiciones

$$\iota' f_0 : M \to X' \quad \text{y} \quad \iota f_0^{-1} : M' \to X$$

existen sendas $\underline{K}$-extensiones

$$f : (X, \xi) \to (X', \xi') \quad \text{y} \quad f' : (X', \xi') \to (X, \xi)$$

Desde luego, se espera que tales extensiones den el $\underline{K}$-isomorfismo buscado; como ambas son $\underline{K}$-morfismos, basta probar que una es inversa de la otra. Para ello evalúese, por ejemplo, la composición $f'f$ en los elementos de M:

$$f'f(m) = f'\iota' f_0(m) = f' f_0(m) = \iota f_0^{-1} f_0(m) = \iota(m) = m, \forall m \in M$$

Por el lema, esto implica que $f'f = 1_X$. Análogamente se demuestra que $ff' = 1_{X'}$. Por lo tanto, $f' = f^{-1}$y f es un $\underline{K}$-isomorfismo.

(2) Sea $g : (X, \xi) \to (X', \xi')$ un $\underline{K}$-isomorfismo y supóngase que (X, ξ) es libre sobre $M \subseteq X$. Dado que g es una función biyectiva, la restricción

$$g\,|_M^{g(M)} : M \to g(M)$$

es una función biyectiva. Se probará que (X', ξ') es libre sobre $g(M)$. Sean, $(Y, \eta) \in \underline{K}$ y $f_0 : g(M) \to Y$ una función cualquiera. Entonces

$$f_0 g\,|_M^{g(M)} : M \to Y$$

tiene una $\underline{K}$-extensión

$$\widehat{f} : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

que compuesta con el $\underline{K}$-morfismo inverso a g produce la $\underline{K}$-extensión buscada

$$f = \widehat{f} g^{-1} : (X', \xi') \to (Y, \eta)$$

En efecto, para cada $m' \in g(M)$ se tiene que $g^{-1}(m') \in M$, de modo que

$$f(m') = \widehat{f}g^{-1}(m') = \widehat{f}\left(g^{-1}(m')\right) = f_0 g\mid_M^{g(M)}\left(g^{-1}(m')\right) = f_0(m') \;\;;$$

y si $f' : \left(X', \xi'\right) \to (Y, \eta)$ es otra extensión de f_0, entonces los morfismos

$$fg : (X, \xi) \to (Y, \eta) \quad \text{ y } \quad f'g : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

son tales que

$$fg(m) = f(g(m)) = f_0(g(m)) = f'(g(m)) = f'g(m), \forall m \in M$$

Por el lema, esto implica que $fg = f'g$; luego,

$$f = f\left(gg^{-1}\right) = (fg)g^{-1} = (f'g)g^{-1} = f'\left(gg^{-1}\right) = f'$$

o sea que la extensión f es única.$_{[\checkmark]}$

Se ha dicho que es posible dar condiciones adecuadas sobre una categoría concreta a fin de garantizar en ella la coincidencia entre los morfismos inyectivos y los monomorfismos. Ya se está en condiciones de dar formalidad a ese resultado.

Proposición 7.3 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta con al menos un objeto libre con un solo generador. Entonces, un $\underline{K}$-morfismo es monomorfismo si, y sólo si, es un morfismo inyectivo.*

Demostración. Se sabe que en toda categoría concreta todo morfismo inyectivo es un monomorfismo, por lo que, del enunciado, sólo hay que probar la implicación de izquierda a derecha. Supóngase entonces que

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

es un monomorfismo arbitrario. Sean $x_1, x_2 \in X$ cualesquiera y sea (W, ω) un $\underline{K}$-objeto libre sobre $\{w_0\} \subseteq W$; defínanse

$$\begin{array}{rccc} h_0 : & \{w_0\} & \to & X \\ & w_0 & \mapsto & x_1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} k_0 : & \{w_0\} & \to & X \\ & w_0 & \mapsto & x_2 \end{array}$$

Entonces, existen sendas $\underline{K}$-extensiones únicas

$$h : (W, \omega) \to (X, \xi) \quad \text{ y } \quad k : (W, \omega) \to (X, \xi) \;\;;$$

y si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$fh(w_0) = f(h_0(w_0)) = f(x_1) = f(x_2) = f(k_0(w_0)) = fk(w_0) \;\;;$$

aplicando el lema, se tiene que $fh = fk$, y como f es monomorfismo, entonces $h = k$. O sea que $x_1 = x_2$; por lo tanto, f es un $\underline{K}$-morfismo inyectivo.$_{[\checkmark]}$

Ejercicio 7.2 *Demuestre que en cada una de las categorías concretas enlistadas a continuación el objeto que se describe es libre sobre $\{x\}$.*

(*i*) En $\mathfrak{Top}$, el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es $\{x\}$.
(*ii*) En $\mathfrak{Gra}$, la digráfica $(\{x\}, \varnothing)$.
(*iii*) En $\mathfrak{Rng}$, el anillo de polinomios $P[x]$ con coeficientes enteros en la indeterminada x.
(*iv*) En $\mathfrak{Grp}$, el grupo aditivo de números enteros $(\mathbb{Z}, (+, 0))$, [haciendo $x = 1$].
(*v*) En $\mathfrak{Lat}$, la retícula cuyo conjunto subyacente es $\{x\}$.

Por el ejercicio y la proposición anteriores, $\mathfrak{Top}, \mathfrak{Gra}, \mathfrak{Rng}, \mathfrak{Grp}, \mathfrak{Lat}$ son ejemplos de categorías concretas en las que los monomorfismos coinciden con los morfismos inyectivos. También tienen esta cualidad $\mathfrak{Mon}, \mathfrak{Met}, \mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$ como se deduce de la proposición anterior, de los ejemplos 1 y 3 y del ejercicio 6. Otro ejemplo en esta situación es $\mathfrak{Clat}$, la categoría de *retículas completas y homomorfismos reticulares completos* que se define enseguida.

Definición 7.3 *(i) Sea $(X, \leq)$ un copo arbitrario y sea A cualquier subconjunto de X; entonces:*

$$(1) \begin{cases} c \in X \text{ es una } \textbf{cota superior de } A \text{ en } X \text{ si } a \leq c, \forall a \in A; \\ d \in X \text{ es una } \textbf{cota inferior de } A \text{ en } X \text{ si } d \leq a, \forall a \in A. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x \in X \text{ es } \textbf{supremo de } A \text{ en } X \text{ si} \begin{cases} s_1)\ x \text{ es cota superior de } A \text{ en } X \\ s_2)\ x \leq c, \text{ para toda cota superior } c \text{ de } A \text{ en } X \end{cases} \\ x \in X \text{ es } \textbf{ínfimo de } A \text{ en } X \text{ si} \begin{cases} i_1)\ x \text{ es cota inferior de } A \text{ en } X \\ i_2)\ d \leq x, \text{ para toda cota inferior } d \text{ de } A \text{ en } X \end{cases} \end{cases}$$

Observación 7.1 *(a) En el caso particular en que A es vacío, todo $x \in X$ es tanto cota superior como cota inferior de A, ya que en tal caso $a \in A \Rightarrow a \leq x \leq a, \forall x \in X$.*

(b) Por la condición de antisimetría en un copo, cuando A posee supremo e ínfimo, éstos son únicos. Se empleará la notación $\sup A$ para el supremo, e $\text{ínf}\, A$ para el ínfimo.

(c) Si además el copo es una retícula, entonces para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se tiene

$$\sup \{x_1, x_2\} = x_1 \vee x_2 \quad \text{e} \quad \text{ínf}\, \{x_1, x_2\} = x_1 \wedge x_2$$

(ii) Se dice que una retícula $(X, \leq)$ es una **retícula completa** cuando todo subconjunto de X posee ínfimo y supremo en X.

En una retícula completa los elementos $\sup \varnothing$ e $\text{ínf}\, \varnothing$ reciben los nombres de cero y uno, respectivamente; (0 es el primer elemento de X, según $\leq$, y 1 el último)[1].

Ejemplo de retícula completa: Para cualquier conjunto X considérese su conjunto potencia $\texttt{Pot}(X)$. Claro es que $(\texttt{Pot}\,(X), \subseteq)$ es un copo. Y si A es un subconjunto arbitrario de elementos de $\texttt{Pot}(X)$, entonces A es una familia $(X_i)_I$ de subconjuntos de X; luego

$$\sup A = \bigcup_{i \in I} X_i \quad \text{e} \quad \text{ínf}\, A = \bigcap_{i \in I} X_i$$

Por lo tanto, $(\texttt{Pot}\,(X), \subseteq)$ es una retícula completa.

Así, $\mathfrak{Clat}\,[X]$ es la familia de órdenes parciales que hacen de X una retícula completa; y si $A = (X, \leq)$ y $B = (Y, \leq)$ son dos $\mathfrak{Clat}$-objetos cualesquiera, se define

$$\mathfrak{Clat}\,(A, B) = \left\{ f \in Y^X : f\,(\sup U) = \sup f\,(U) \ \text{ y } \ f\,(\text{ínf}\, U) = \text{ínf}\, f\,(U)\,, \forall U \subseteq X \right\}$$

cuyos miembros son los **homomorfismos reticulares completos**.

La retícula completa de tres elementos

$$(\{0, x, 1\}\,, \leq)\,, \text{ con } 0 \leq x \leq 1$$

es libre sobre $\{x\}$ porque si $(Y, \leq) \in \mathfrak{Clat}$ y $f_0 : \{x\} \to X$ es cualquier función, entonces

$$f : (\{0, x, 1\}\,, \leq) \to (Y, \leq)$$

definida por

$$f\,(0) = 0 \ \ , \ \ f\,(x) = f_0\,(x) \ \ , \ \ f\,(1) = 1$$

es una $\mathfrak{Clat}$-extensión de f_0, como se comprueba fácilmente.

Ejercicio 7.3 *Sea X un conjunto arbitrario y denótese mediante $\mathfrak{Eqi}\,[X]$ al conjunto de relaciones de equivalencia en X. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathfrak{Eqi}\,[X]$ defínase*

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$$

(a) Demuestre que $(\mathfrak{Eqi}\,[X]\,, \leq)$ es una retícula completa y describa sus elementos cero y uno.

Definición 7.4 *En cualquier categoría concreta se dice que un objeto B **puede encajarse** en un objeto A si B es isomorfo a un subobjeto de A.*

[1] I.e. $0 = \text{ínf}\, X$ y $1 = \sup X$.

(b) Pruebe que si $\preceq$ es un orden parcial en X, entonces el copo $(X, \preceq)$ puede encajarse $(\mathfrak{Eqi}[X], \leq)$.

Definición 7.5 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Se dice que $\underline{K}$* ***tiene objetos libres*** *si tiene objetos libres sobre conjuntos de toda cardinalidad.*

Ejemplo 7.4 *Según se vio en el ejemplo 2 anterior, el monoide de palabras $(\Sigma^*, (\cdot, \emptyset))$ es libre sobre Σ, para todo $\Sigma \in \mathfrak{Set}$. Por lo tanto, $\mathfrak{Mon}$ tiene objetos libres.*

Ejemplo 7.5 *$\mathfrak{Top}$ tiene objetos libres porque el espacio discreto (X, τ_d) es libre sobre X, para todo $X \in \mathfrak{Set}$. En efecto, si $(Y, \sigma) \in \mathfrak{Top}$ y $f_0 : X \to Y$ es cualquier función, entonces*

$$f_0 \in \mathfrak{Top}((X, \tau_d), (Y, \sigma))$$

Ejemplo 7.6 *$\mathfrak{Pos}$ tiene objetos libres porque el copo discreto $(X, \leq)$ [i.e. $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$] es libre sobre X, para todo $X \in \mathfrak{Set}$. En efecto, si $(Y, \preceq) \in \mathfrak{Pos}$ y $f_0 : X \to Y$ es cualquier función, entonces*

$$f_0 \in \mathfrak{Pos}((X, \leq), (Y, \preceq))$$

Los dos últimos ejemplos son casos particulares de una situación más general que se explicará enseguida.

Definición 7.6 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta y sea X un conjunto arbitrario. Se dice que una $\underline{K}$-estructura $\xi \in \underline{K}[X]$ es* ***discreta*** *si para cualesquiera $Y \in \mathfrak{Set}$ y $f \in Y^X$ se tiene*

$$f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta)), \ \forall \eta \in \underline{K}[Y]$$

En tal caso se habla de (X, ξ) como de un ***$\underline{K}$-objeto discreto****.*

Proposición 7.4 *Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta y (X, ξ) un $\underline{K}$-objeto, arbitrarios. Son equivalentes:*

(a) (X, ξ) es discreto.
(b) (X, ξ) es libre sobre X.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sean, $(Y, \eta) \in \underline{K}$ y $f_0 : X \to Y$ una función, cualesquiera. Debido a la discresión de (X, ξ),

$$f_0 \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta))$$

O sea que f_0 es la única $\underline{K}$-extensión de sí misma (la unicidad es obvia). Por lo tanto, (X, ξ) es libre sobre X.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sean, $Y \in \mathfrak{Set}$, $f \in Y^X$ y $\eta \in \underline{K}[Y]$, cualesquiera. Entonces, $(Y, \eta) \in \underline{K}$ y, por (b), f puede extenderse a un $\underline{K}$-morfismo que no tiene más remedio que ser la propia $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$. Por lo tanto, (X, ξ) es discreto.$_{[\checkmark]}$

$\mathfrak{Met}$ es un ejemplo de categoría concreta sin objetos libres. En efecto, sean $(X, d) \in \mathfrak{Met}$ y $M \subseteq X$ con $\#(M) > 1$, arbitrarios. Si se considera el espacio métrico $(X, 2d)$, entonces para la inclusión

$$\iota : M \hookrightarrow X$$

no existe una extensión

$$f : (X, d) \to (X, 2d)$$

que sea contracción, ya que para $m_1, m_2 \in M$, $m_1 \neq m_2$, debería suceder

$$2d(f(m_1), f(m_2)) = 2d(m_1, m_2) \leq d(m_1, m_2)$$

lo cual es absurdo.

Definición 7.7 *Sea $\mathfrak{K}$ cualquier categoría. Un $\mathfrak{K}$-objeto I es* ***inicial*** *si para cada $A \in \mathfrak{K}$ el conjunto $\mathfrak{K}(I, A)$ consta de un solo morfismo. Para tal morfismo se empleará la notación $!_A$.*

Proposición 7.5 *En una categoría concreta $\underline{K}$, todo objeto inicial es libre sobre el conjunto vacío.*

Demostración. Sea sabe que del vacío en cualquier conjunto X sólo existe una función: ϕ, *la función vacía*. También se sabe que $\emptyset \subseteq Y$, para todo $Y \in \mathfrak{Set}$. Así, si $A = (X, \xi) \in \underline{K}$, entonces todo morfismo de codominio A es extensión de ϕ. Por lo tanto, siendo I un $\underline{K}$-objeto inicial, ϕ encuentra en $\underline{K}(I, A)$ una extensión única, para todo $\underline{K}$-objeto A. De aquí que I sea libre sobre $\emptyset$. [✓]

Observación 7.2 *Como se ha visto, dos $\underline{K}$-objetos libres sobre conjuntos con la misma cardinalidad son $\underline{K}$-isomorfos. A consecuencia de la proposición anterior, en una categoría concreta $\underline{K}$ dos $\underline{K}$-objetos iniciales siempre son $\underline{K}$-isomorfos, pues ambos son libres sobre un conjunto $\emptyset$ con 0 generadores. Este resultado también es válido para categorías arbitrarias.*

Proposición 7.6 *Si I y J son $\mathfrak{R}$-objetos iniciales de una categoría $\mathfrak{R}$ arbiraria, entonces $I \cong J$.*

Demostración. Considérense las composiciones

$$I \xrightarrow{!_J} J \xrightarrow{!_I} I \qquad\qquad J \xrightarrow{!_I} I \xrightarrow{!_J} J$$

Debido a la inicialidad de ambos objetos, las identidades respectivas son los únicos morfismos

$$\text{en } \mathfrak{R}(I, I) \quad \text{ y } \quad \text{en } \mathfrak{R}(J, J)$$

Luego,

$$!_I !_J = 1_I \quad \text{ y } \quad !_J !_I = 1_J$$

lo cual significa que $!_I$ es un $\mathfrak{R}$-isomorfismo y que $!_J = !_I^{-1}$. [✓]

Observación 7.3 *Nótese que el $\mathfrak{R}$-isomorfismo $!_I$ es el único posible de J en I; de aquí que se diga que dos objetos iniciales de una categoría son canónicamente equivalentes.*

Ejemplos de objetos iniciales.
1. En $\mathfrak{Set}$ el objeto inicial es el $\emptyset$.
2. En $\mathfrak{Gra}$ el objeto inicial es la digráfica vacía $(\emptyset, \emptyset)$.
3. En $\mathfrak{Top}$ el objeto inicial es el espacio vacío $(\emptyset, \{\emptyset\})$.
4. En $\mathfrak{Mon}$ el objeto inicial es el monoide trivial $(\{e\}, (\cdot, e))$.
5. En $\mathfrak{Rng}_1$ el objeto inicial es el anillo de números enteros $(\mathbb{Z}, (+, \cdot, 1))$.

El coconcepto correspondiente al concepto de objeto inicial se llama objeto final.

Definición 7.8 *Sea $\mathfrak{R}$ cualquier categoría. Un $\mathfrak{R}$-objeto F es* **final** *si para cada $A \in \mathfrak{R}$ el conjunto $\mathfrak{R}(A, F)$ consta de un solo morfismo. Para tal morfismo se empleará la notación $¿_A$.*

Ejemplo 7.7 *En $\mathfrak{Set}, \mathfrak{Pos}, \mathfrak{Top}, \mathfrak{Met}$ es final el objeto cuyo conjunto subyacente es cualquier simplete $\{x\}$.*

Desde luego, es verdadera la coproposición correspondiente a la proposición anterior.

Proposición 7.7 *Si F y G son $\mathfrak{R}$-objetos finales de una categoría $\mathfrak{R}$ arbiraria, entonces $F \cong G$.*

Definición 7.9 *Cuando un $\mathfrak{R}$-objeto Z de una categoría $\mathfrak{R}$ arbiraria es simultáneamente inicial y final recibe el nombre de* ***objeto cero****.*

Observación 7.4 *Sea $\mathfrak{R}$ una categoría con objeto cero; entonces:*

1. Todo $\mathfrak{R}$-objeto inicial y todo $\mathfrak{R}$-objeto final es un objeto cero.
2. Para cualesquiera $\mathfrak{R}$-objetos A y B existe un morfismo distinguido $0_{AB} \in \mathfrak{R}(A, B)$. Es, a saber, el que pasa por el objeto cero:

$$0_{AB} : A \xrightarrow{¿_A} Z \xrightarrow{!_B} B$$

Este morfismo se llama **morfismo cero**; a veces se lo denota simplemente como 0.

Proposición 7.8 *Sea $\Re$ una categoría arbitraria. Entonces, cualesquiera que sean los $\Re$-morfismos f y g, se tiene*

$$0f = 0 \qquad y \qquad g0 = 0$$

Demostración.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & Z & & & & \\
 & & & & \uparrow 1_Z & & \searrow !_{B'} & & \\
 & & & \nearrow ¿_A & & & & & \\
A' & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{¿_A} & Z & \xrightarrow{!_B} & B & \xrightarrow{g} & B' \\
 & & & & & !_B \nearrow & & & \\
 & & \searrow ¿_{A'} & & \downarrow 1_Z & & & & \\
 & & & & Z & & & &
\end{array}$$

[✓]

...pocos diagramas.

Capítulo 8

Categorías Concretas Topológicas

Definición 8.1 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta.*

(a) Se dice que $\underline{K}$ es **topológica** si para todo conjunto X y cualquier fuente $\mathcal{F} = (X, (f_i)_I)$ cuyo codominio sea una familia $(A_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos $A_i = (X_i, \xi_i)$ existe $\xi \in \underline{K}[X]$ tal que si $A = (X, \xi)$, entonces $\mathcal{F} = \left(A \xrightarrow{f_i} A_i\right)_I$ es una $\underline{K}$-fuente inicial.

(b) Se dice que $\underline{K}$ es **cotopológica** si para todo conjunto X y cualquier sumidero $S = ((f_i)_I, X)$ cuyo dominio sea una familia $(A_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos $A_i = (X_i, \xi_i)$, existe $\xi \in \underline{K}[X]$ tal que si $A = (X, \xi)$, entonces $S = \left(A_i \xrightarrow{f_i} A\right)_I$ es un $\underline{K}$-sumidero final.

Observación 8.1 *Cuando $\underline{K}$ satisface alguna de estas definiciones, hacer la consideración de las fuentes y sumideros vacíos, respectivamente, resulta de importancia.*

a) Si $\underline{K}$ es cotopológica y X es un conjunto cualquiera, entonces la clase de $\underline{K}$-estructuras $\underline{K}[X]$ está obligada a contener un miembro, ξ, que haga del sumidero vacío

$$S = ((f_i)_I, X), \text{ con } I = \emptyset$$

un $\underline{K}$-sumidero final. De acuerdo con la definición de $\underline{K}$-estructura final se debe tener:

(i) $f_i \in \underline{K}((X_i, \xi_i) \to (X, \xi)), \forall i \in I$.

(ii) Si $(Y, \eta) \in \underline{K}$ y $f : X \to Y$ es una función tal que, para toda $i \in I$,

$$ff_i \in \underline{K}((X_i, \xi_i), (Y, \eta))$$

entonces

$$f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta))$$

Pero con $I = \varnothing$ siempre es válida la implicación

$$i \in I \Rightarrow ff_i \in \underline{K}((X_i, \xi_i), (Y, \eta))$$

En consecuencia, para cualesquiera $Y \in \mathfrak{Set}$ y $f \in Y^X$ se tiene

$$f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta)), \ \forall \eta \in \underline{K}[Y]$$

lo que significa que ξ es una $\underline{K}$-estructura discreta para X.

Por consiguiente, en toda categoría concreta cotopológica todo conjunto puede quedar discretamente estructurado.

b) En forma casi análoga: si $\underline{K}$ es topológica y para cualquier conjunto $X \neq \varnothing$ se considera la fuente vacía

$$\mathcal{F} = (X, (f_i)_I), \text{ con } I = \emptyset$$

entonces, existe $\xi \in \underline{K}[X]$ tal que para cualesquiera $W \in \mathfrak{Set}$ y $f \in X^W$ se tenga

$$f \in \underline{K}((W,\omega),(X,\xi)), \ \forall \omega \in \underline{K}[W]$$

Esto significa que ξ es una **$\underline{K}$-estructura indiscreta** para X y que (X,ξ) es un **$\underline{K}$-objeto indiscreto**.

Por lo tanto, en toda categoría concreta topológica siempre es posible dotar a cualquier conjunto no vacío de una estructura indiscreta.[1]

Ejemplo 8.1 *Se sabe que si $\digamma = (X,(f_i)_I)$ es una fuente cuyo codominio es una familia $(X_i,\tau_i)_I$ de espacios topológicos, entonces la topología débil para X correspondiente a $(f_i)_I$ y a $(\tau_i)_I$ es una $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para X con respecto a la fuente $\digamma$. También se sabe que si $S = ((f_i)_I, X)$ es un sumidero cuyo dominio es una familia $(X_i,\tau_i)_I$ de espacios topológicos, entonces la topología fuerte para X correspondiente a $(\tau_i)_I$ y a $(f_i)_I$ es una $\mathfrak{Top}$-estructura final para X con respecto al sumidero S. Por lo tanto, $\mathfrak{Top}$ es topológica y cotopológica.*

Ejemplo 8.2 *Sea $\overline{\mathfrak{Set}}$ la concreción de $\mathfrak{Set}$ descrita antes. Se sabe que si*

$$\digamma = (f_i : X \to (X_i, X_i))_I$$

es cualquier fuente de codominio en $\overline{\mathfrak{Set}}$, entonces X es una $\overline{\mathfrak{Set}}$-estructura inicial para X con respecto a $\digamma$. Por un ejemplo, si

$$S = (f_i : (X_i, X_i) \to X)_I$$

es un sumidero de dominio en $\overline{\mathfrak{Set}}$, entonces X es una $\overline{\mathfrak{Set}}$-estructura final para X con respecto a S. Por lo tanto, también $\overline{\mathfrak{Set}}$ es una categoría concreta que es topológica y cotopológica.

Ejemplo 8.3 *Se ha visto que si $S = \left((X_i,\alpha_i)_I \xrightarrow{f_i} X\right)_I$ es un sumidero cuyo dominio es una familia de gráficas dirigidas $(X_i,\alpha_i)_I$, entonces*

$$\alpha = \{(f_i(x), f_i(x')) : (x,x') \in \alpha_i, i \in I\}$$

es una $\mathfrak{Gra}$-estructura para X correspondiente a S. Por lo tanto, $\mathfrak{Gra}$ es una categoría concreta cotopológica.

$\mathfrak{Gra}$ también es topológica porque si una familia de gráficas dirigidas $(Y_i,\beta_i)_I$ es codominio de una fuente $\digamma = (Y,(f_i)_I)$, entonces

$$\beta = \{(y,y') \in Y \times Y : (f_i(y), f_i(y')) \in \beta_i, \forall i \in I\}$$

es una $\mathfrak{Gra}$-estructura inicial para Y con respecto a $\digamma$.

En efecto,

(i) Toda flecha $f_i : (Y,\beta) \to (Y_i,\beta_i)$ es compatible a consecuencia de la definición de β;

(ii) Si $(X,\alpha) \in \mathfrak{Gra}$ y $f : X \to Y$ es una función tal que

$$f_i f \in \mathfrak{Gra}((X,\alpha),(Y_i,\beta_i)), \forall i \in I$$

entonces para cualquier $(x,x') \in \alpha$ tenemos

$$(f(x), f(x')) \in Y \times Y$$

y

$$(f_i(f(x)), f_i(f(x'))) = (f_i f(x), f_i f(x')) \in \beta_i, \forall i \in I$$

o sea que $(f(x), f(x')) \in \beta$, lo cual implica que $f : (X,\alpha) \to (Y,\beta)$ es compatible.$_{[\checkmark]}$

[1] Nótese que entre (a) y (b) la *cuasi dualidad* de que son susceptibles no es perfecta; el haber cuidado el caso vacío en (b) evitándolo explícitamente, hace una diferencia con (a) que puede parecer irrelevante pero que a la larga mostrará que tiene consecuencias. Ya dijimos en otra ocasión que de la verdad de una proposición "casi dual" hay que procurar cerciorarse porque no siempre resulta cierta. En lo sucesivo, sería bueno tener presente este consejo en lo referente a proposiciones en las que las ideas de discreción o de indiscreción desepeñen algún papel.

En vista de los ejemplos anteriores cabe preguntar acerca de la posibilidad de hallar un ejemplo de una categoría concreta que sea topológica pero no cotopológica, o viceversa.

Si se hace una relación de conceptos anteriores con los que ahora ocupan la atención, claramente:

(i) Toda categoría concreta topológica es hereditaria.

(ii) Toda categoría concreta cotopológica es cohereditaria.

Por lo tanto, todas las categorías concretas que no son hereditarias, como $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{Grp}$ o R-$\mathfrak{Mod}$, tampoco son topológicas. Ni son cotopológicas las no cohereditarias, como $\mathfrak{Sgr}, \mathfrak{Pos}, \mathfrak{Lat}$.

También es claro que:

(iii) Toda categoría concreta topológica tiene intersecciones.

(iv) Toda categoría concreta cotopológica tiene núcleos.

Se ha visto que $\mathfrak{Topc}$ carece de intersecciones; por lo tanto, la categoría de espacios topológicos compactos y funciones continuas no es topológica (!). También se vio que $\mathfrak{Topc}_2$ no es hereditaria; en consecuencia, la categoría de espacios compactos de Hausdorff y funciones continuas tampoco es topológica (!).

Se podría demostrar que $\mathfrak{Topc}_2$ y $\mathfrak{Topc}$, así como $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{Grp}$ y R-$\mathfrak{Mod}$, tampoco son cotopológicas; y que no son topológicas $\mathfrak{Sgr}, \mathfrak{Pos}, \mathfrak{Lat}$. O sea que ninguna de estas categorías reune la condición pedida: satisfacer una de las dos definición sin satisfacer la otra.

En realidad, es éste un caso de autodualidad notable que quedará evidenciado después del par de resultados que vienen a continuación.

Proposición 8.1 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta cotopológica y sean, X un conjunto, $(A_i)_I$ una familia de $\underline{K}$-objetos $A_i = (X_i, \xi_i), i \in I$, $\mathcal{F} = (f_i : X \to A_i)_I$ una fuente y $\xi \in \underline{K}[X]$. Entonces son equivalentes:*

(a) ξ es inicial para X con respecto a $\mathcal{F}$.

(b) ξ es final para X con respecto al sumidero de identidades

$$\mathcal{I} = \left(1_X : \left(X, \xi_j\right) \to X\right)_J$$

donde $\left(\xi_j\right)_J$ es la familia de $\underline{K}$-estructuras para X que hacen de $\mathcal{F}$ una $\underline{K}$-fuente.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Considérese la familia de $\underline{K}$-estructuras $\left(\xi_j\right)_J$ descrita arriba, fíjese cualquier $j \in J$ y hágase $A_j = \left(X, \xi_j\right)$. Entonces

$$\mathcal{F} = \left(A_j \xrightarrow{f_i} A_i\right)_I$$

es una $\underline{K}$-fuente; por lo tanto, para toda $i \in I$, la composición

$$f_i : \left(X, \xi_j\right) \xrightarrow{1_X} (X, \xi) \xrightarrow{f_i} (X_i, \xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo; por la inicialidad de ξ, esto implica que

$$1_X \in \underline{K}\left(\left(X, \xi_j\right), (X, \xi)\right), \quad (j \in J).$$

Obsérvese, por otra parte, que, debido a la inicialidad de ξ,

$$\mathcal{F} = \left((X, \xi) \xrightarrow{f_i} (X_i, \xi_i)\right)_I$$

es una $\underline{K}$-fuente; por lo tanto, $\xi \in \left(\xi_j\right)_J$. Así, si $(Y, \eta) \in \underline{K}$ y $f : X \to Y$ son tales que, para toda $j \in J$, la composición

$$f : \left(X, \xi_j\right) \xrightarrow{1_X} (X, \xi) \xrightarrow{f} (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, entonces lo es en particular

$$f : (X, \xi) \xrightarrow{1_X} (X, \xi) \xrightarrow{f} (Y, \eta)$$

es decir

$$f \in \underline{K}\left((X, \xi), (Y, \eta)\right)$$

Esto prueba que ξ es final en X con respecto a $\mathcal{I}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Como para toda $j \in J$ la fuente $\mathcal{F} = \left(A_j \xrightarrow{f_i} A_i\right)_I$ es una $\underline{K}$-fuente, entonces para toda $i \in I$ es un $\underline{K}$-morfismo la composición

$$f_i : (X, \xi_j) \xrightarrow{1_X} (X, \xi) \xrightarrow{f_i} (X_i, \xi_i)$$

Pero ξ es final para X con respecto a $(1_X)_J$ y a $(\xi_j)_J$; luego

$$f_i \in \underline{K}\left((X, \xi), (X_i, \xi_i)\right), \forall i \in I. \quad ^2$$

Por otra parte, sean (W, ω) un $\underline{K}$-objeto y $g : W \to X$ una función tales que, para toda $i \in I$, la composición

$$f_i g : (W, \omega) \to (X_i, \xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Como $\underline{K}$ es cotopológica, existe la $\underline{K}$-estructura final para X con respecto a ω y g; denótesela por ξ_0. Entonces, para toda $i \in I$, la composición

$$(W, \omega) \xrightarrow{g} (X, \xi_0) \xrightarrow{f_i} (X_i, \xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, y por la finalidad de ξ_0 con respecto a ω y g, se tiene que

$$f_i \in \underline{K}\left((X, \xi_0), (X_i, \xi_i)\right), \forall i \in I$$

Por lo tanto, $\xi \in (\xi_j)_J$; y como ξ es final con respecto a $(\xi_j)_J$ y a $(1_X)_J$, entonces

$$1_X : (X, \xi_0) \to (X, \xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por lo tanto

$$1_X g = g \in \underline{K}\left((W, \omega), (X, \xi)\right)$$

Esto demuestra la inicialidad de ξ con respecto a $\mathcal{F}$, con lo que la proposición queda demostrada. [✓]

También es válido el resultado casi dual:

Proposición 8.2 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta topológica y sean, X un conjunto, $(A_i)_I$ una familia de $\underline{K}$-objetos $A_i = (X_i, \xi_i), i \in I$, $S = (f_i : A_i \to X)_I$ un sumidero y $\xi \in \underline{K}[X]$. Entonces son equivalentes:*

(a) ξ es final para X con respecto a S.
(b) ξ es inicial para X con respecto a la fuente de identidades

$$\mathcal{J} = \left(1_X : X \to (X, \xi_j)\right)_J$$

donde $(\xi_j)_J$ es la familia de $\underline{K}$-estructuras para X que hacen de S un $\underline{K}$-sumidero.

Definición 8.2 *El sumidero $\mathcal{I}$ de la proposición anterior se llama* ***sumidero dual*** *de la fuente $\mathcal{F}$. Análogamente, la fuente $\mathcal{J}$ de la coproposición anterior es la* ***fuente dual*** *del sumidero S.*

Contando con estos resultados ya se puede responder a la cuestión planteada.

Corolario 8.1 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta arbitraria. Son equivalentes:*

a) $\underline{K}$ es topológica.
b) $\underline{K}$ es cotopológica.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $S = ((f_i)_I, X)$ cualquier sumidero cuyo dominio es una familia $(A_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos $A_i = (X_i, \xi_i)$, y cuyo codominio X es un conjunto arbitrario. Considérese la fuente dual del sumidero S :

$$\mathcal{J} = \left(1_X : X \to (X, \xi_j)\right)_J$$

Por (a) existe $\xi \in \underline{K}[X]$, inicial respecto a $\mathcal{J}$. Por la coproposición anterior, ξ es final para X con respecto a S. Por lo tanto, $\underline{K}$ es cotopológica.

(a) $\Rightarrow$ (b) Se demuestra de manera similar. [✓]

Observación 8.2 *En lo sucesivo, cuando se quiera indicar que $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica se dirá, simplemente, que $\underline{K}$ es topológica o, cuando más, que es una categoría topológica.*

---

[2] Ntese que hasta ahorita no se ha empleado la hiptesis de que $\underline{K}$ sea cotopolgica; por lo tanto, lo que hasta aqu llevamos vale para cualquier categora concreta.

8.1. Discreción e indiscreción en categorías topológicas

Para seguir adelante, se verán caracterizaciones de las $\underline{K}$-estructuras discretas e indiscretas en categorías topológicas.

Proposición 8.3 *Sea $\underline{K}$ una categoría topológica y sea $A = (X, \xi)$ un $\underline{K}$-objeto arbitrario. Son equivalentes:*

(a) ξ es discreta.
(b) ξ es final respecto a cualquier $\underline{K}$-sumidero del que A sea codominio.
(c) ξ es inicial respecto a la fuente de identidades (completa [3])

$$\digamma = \left(1_X : X \to \left(X, \widetilde{\xi}\right)\right)_{\widetilde{\xi} \in \underline{K}[X]}$$

Demostración: $(a) \Rightarrow (b)$ Supóngase que

$$S = \left((X_i, \xi_i) \overset{f_i}{\to} (X, \xi)\right)_I$$

es un $\underline{K}$-sumidero. Entonces, cada una de sus flechas es un $\underline{K}$-morfismo. Si además (Y, η) es un $\underline{K}$-objeto y $g : X \to Y$ es una función, tales que toda composición gf_i es un $\underline{K}$-morfismo, entonces, aplicando(a), también lo es $g : (X, \xi) \to (Y, \eta)$. Por lo tanto, ξ es final respecto a S.

$(b) \Rightarrow (c)$ Considérese el sumidero vacío

$$S = \left((f_i)_I, A\right), \text{ con } I = \varnothing$$

Por (b), ξ es final con respecto a S. En consecuencia se tiene que

$$1_X \in \underline{K}\left((X, \xi), \left(X, \widetilde{\xi}\right)\right), \forall \widetilde{\xi} \in \underline{K}[X]$$

Y si $(W, \omega) \in \underline{K}$ y $f : W \to X$ son tales que

$$f : (W, \omega) \overset{f}{\to} (X, \xi) \overset{1_X}{\to} \left(X, \widetilde{\xi}\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo para toda $\widetilde{\xi} \in \underline{K}[X]$, entonces, puesto que $\xi \in \underline{K}[X]$,

$$f : (W, \omega) \to (X, \xi)$$

también es un $\underline{K}$-morfismo. Por lo tanto, ξ es inicial con respecto a $\digamma$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Sean, $Y \in \mathfrak{Set}, \eta \in \underline{K}[Y]$ y $f \in Y^X$, arbitrarios. Como $\underline{K}$ es topológica, existe una $\underline{K}$-estructura, ξ_f, inicial para X con respecto a f y η. En consecuencia

$$f : \left(X, \xi_f\right) \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Puesto que $\xi_f \in \underline{K}[X]$, aplicando (c), se tiene que también

$$1_X : (X, \xi) \to \left(X, \xi_f\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por lo tanto, también lo es la composición

$$f : (X, \xi) \overset{1_X}{\to} \left(X, \xi_f\right) \overset{f}{\to} (Y, \eta)$$

que es a lo que se quería llegar. $_{[\checkmark]}$

También tiene lugar el resultado casi dual; debido al corolario anterior, puede escribirse:

Proposición 8.4 *Si $\underline{K}$ es topológica y $A = (X, \xi)$ es un $\underline{K}$-objeto arbitrario, entonces son equivalentes:*

[3] En el sentido de que el codominio consta de todos los $\underline{K}$-objetos sobre X.

(a) ξ es indiscreta.
(b) ξ es inicial respecto a cualquier $\underline{K}$-fuente de la que A sea dominio.
(c) ξ es final respecto al sumidero de identidades (completo [4])

$$S = \left(1_X : \left(X, \widetilde{\xi}\right) \to X\right)_{\widetilde{\xi} \in \underline{K}[X]}$$

Como enseguida se verá, la existencia de estructuras discretas e indiscretas está estrechamente relacionada con la coincidencia de las clases de monomorfismos y morfismos inyectivos, y de epimorfismos y morfismos suprayectivos, respectivamente.

Proposición 8.5 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Si algún singulete puede dotarse con una $\underline{K}$-estructura discreta, entonces coinciden los $\underline{K}$-monomorfismos con los $\underline{K}$-morfismos inyectivos.*

Demostración. Ya se sabe que en toda categoría concreta todo $\underline{K}$-morfismo inyectivo es un $\underline{K}$-monomorfismo. Para probar lo recíproco, supóngase que $\{w_0\}$ es un singulete para el cual existe una $\underline{K}$-estructura discreta ω_0. Sea

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

un $\underline{K}$-monomorfismo arbitrario y sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$; defínase

$$\begin{array}{rccc} h: & \{w_0\} & \to & X \\ & w_0 & \mapsto & x_1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} k: & \{w_0\} & \to & X \\ & w_0 & \mapsto & x_2 \end{array}$$

Debido a la discreción de ω_0,

$$h, k \in \underline{K}\left(\left(\{w_0\}, \omega_0\right), (X, \xi)\right)$$

Además

$$fh(w_0) = f(x_1) = f(x_2) = fk(w_0)$$

Debido a la monomorfía de f, esto implica que $h = k$; en consecuencia

$$x_1 = h(w_0) = k(w_0) = x_2$$

Por lo tanto, f es inyectivo. $_{[\checkmark]}$

Corolario 8.2 *Si $\underline{K}$ es topológica, entonces coinciden los $\underline{K}$-monomorfismos con los $\underline{K}$-morfismos inyectivos.*

Demostración. En efecto, ya se sabe que en toda categoría topológica todo conjunto puede quedar discretamente estructurado; particularmente, los simpletes. $_{[\checkmark]}$

Es de esperar que también valga el resultado casi dual al enunciado en este corolario; vale. Sin embargo, no se desprende de la proposición casi dual a la anterior sino de otra que le es casi casi dual; ésta:

Proposición 8.6 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Si existe una $\underline{K}$-estructura indiscreta para el conjunto $\{0, 1\}$, entonces coinciden los $\underline{K}$-epimorfismos con los $\underline{K}$-morfismos suprayectivos.*

Demostración. Ya se sabe que en toda categoría concreta todo $\underline{K}$-morfismo suprayectivo es un $\underline{K}$-epimorfismo. Supóngase, por otro lado, que el $\underline{K}$-morfismo

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

no es suprayectivo y que υ es una $\underline{K}$-estructura indiscreta para $\{0, 1\}$. Escogiendo $y_0 \in Y - f(X)$, defínanse

$$h, k : Y \to \{0, 1\}$$

como

$$h(y) = 0, \forall y \in Y \qquad \text{y} \qquad k(y) = \begin{cases} 0, \text{ si } y \neq y_0 \\ 1, \text{ si } y = y_0 \end{cases}$$

[4] Idem.

Debido a la indiscreción de υ,

$$h, k \in \underline{K}\left((Y, \eta), (\{0,1\}, \upsilon)\right)$$

En consecuencia, f no puede ser un $\underline{K}$-epimorfismo pues aunque claramente $hf = kf$, también es claro que $h \neq k$. $[\checkmark]$

Corolario 8.3 *Si $\underline{K}$ es topológica, entonces coinciden los $\underline{K}$-epimorfismos con los $\underline{K}$-morfismos suprayectivos.* $[\checkmark]$

Se ha visto que $\mathbf{T_2}$, la categoría de espacios de Hausdorff y funciones continuas, es una categoría en la que no todo epimorfismo es un morfismo suprayectivo. Como consecuencia del corolario anterior resulta que $\mathbf{T_2}$ no es topológica (!)

Otro resultado que es consecuencia de este corolario y del anterior a éste es el siguiente.

Proposición 8.7 *Si $\underline{K}$ es topológica y $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo, entonces f es un bimorfismo si, y sólo si, $f : X \to Y$ es biyectiva.* $[\checkmark]$

Ejercicio 8.1 *¿Son válidas las coproposiciones de las proposiciones de las que derivaron los dos corolarios anteriores? Justifique su respuesta.*

Observación 8.3 *Las proposiciones que dieron lugar a los corolarios anteriores pudieron haber sido corolarios, a su vez, de dos resultados más generales. En efecto, se sabe que los monomorfismos y los epimorfismos son casos particulares de monofuentes y episumideros, respectivamente, en tanto que un caso particular de una fuente que separa puntos es un morfismo inyectivo, así como uno suprayectivo es caso particular de un sumidero exhaustivo. Con esto en mente resulta claro que las proposiciones a que se alude son corolarios de las dos siguientes:*

Proposición 8.8 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Si algún singulete puede dotarse con una $\underline{K}$-estructura discreta, entonces coinciden las $\underline{K}$-monofuentes con las $\underline{K}$-fuentes que separan puntos.*

Proposición 8.9 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Si existe una $\underline{K}$-estructura indiscreta para el conjunto $\{0,1\}$, entonces coinciden los $\underline{K}$-episumideros con los $\underline{K}$-sumideros exhaustivos.*

Estas proposiciones pueden demostrarse en forma exactamente similar a como se demostraron las dos anteriores, respectivamente. Los corolarios que de ellas se desprenden son generalizaciones de los dos corolarios anteriores.

Corolario 8.4 *Sea $\underline{K}$ una categoría topológica y sea $\mathcal{F} = \left((X, \xi), (f_i)_I\right)$ una $\underline{K}$-fuente arbitraria. Son equivalentes:*

a) $\mathcal{F}$ es monofuente.
b) $\mathcal{F}$ separa puntos.

Corolario 8.5 *Sea $\underline{K}$ una categoría topológica y sea $S = \left((f_i)_I, (X, \xi)\right)$ un $\underline{K}$-sumidero arbitrario. Son equivalentes:*

a) S es episumidero.
b) S es exhaustivo.

Para ver una caracterización más de los objetos discretos en las categorías topológicas considérese el concepto categórico definido a continuación.

Definición 8.3 *Sea $\Re$ una categoría arbitraria y sea A un $\Re$-objeto cualquiera. Se dice que A es* ***proyectivo*** *si siempre que se tiene un diagrama como el siguiente*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f"'] & & B' \arrow[dl, "g"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

en donde $f : A \to B$ es un $\mathfrak{R}$-morfismo y $g : B' \to B$ es un $\mathfrak{R}$-epimorfismo, es posible definir otro $\mathfrak{R}$-morfismo, $h : A \to B'$, tal que $gh = f$; es decir, tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \circlearrowright & B' \arrow[dl, "g"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Proposición 8.10 *Si (X,ξ) es un $\underline{K}$-objeto arbitrario de una categoría topológica $\underline{K}$ cualquiera, entonces son equivalentes:*

a) (X,ξ) es discreto.
b) (X,ξ) es proyectivo.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sean, $f : (X,\xi) \to (Z,\zeta)$ un $\underline{K}$-morfismo y $g : (Y,\eta) \to (Z,\zeta)$ un $\underline{K}$-epimorfismo, cualesquiera. Debido al corolario anterior puede darse por hecho que $g : Y \to Z$ es una función suprayectiva; entonces existe una función $h : X \to Y$ tal que $gh = f$. Por (a), $h : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo, y se tiene

$$\begin{tikzcd} (X,\xi) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \circlearrowright & (Y,\eta) \arrow[dl, "g"] \\ & (Z,\zeta) & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, (X,ξ) es proyectivo.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sean, $Y \in \mathfrak{Set}$, $\eta \in \underline{K}[Y]$ y $f \in Y^X$, cualesquiera. Considérese el sumidero S descrito en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} (X,\xi) \arrow[dr, "f"'] & & (Y,\eta) \arrow[dl, "1_Y"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Como $\underline{K}$ es topológica, existe una $\underline{K}$-estructura $\widetilde{\eta}$ para Y que es final con respecto a S; entonces

$$f : (X,\xi) \to (Y,\widetilde{\eta}) \qquad \text{y} \qquad 1_Y : (Y,\eta) \to (Y,\widetilde{\eta})$$

son $\underline{K}$-morfismos, el segundo de los cuales es epimorfismo, lo que, por (b), implica que

$$f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$$

es $\underline{K}$-morfismo. Por lo tanto, (X,ξ) es discreto. $[\checkmark]$

El coconcepto correspondiente al concepto de objeto proyectivo se llama *objeto inyectivo*. Para su definición hay que invertir el sentido de cada flecha que aparece en la definicón de objeto proyectivo.

Definición 8.4 *Sea $\mathfrak{R}$ una categoría arbitraria y sea A un $\mathfrak{R}$-objeto cualquiera. Se dice que A es* ***inyectivo*** *si siempre que se tiene un diagrama como el siguiente*

$$\begin{tikzcd} A & & B' \\ & B \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

en donde $f : B \to A$ es un $\mathfrak{R}$-morfismo y $g : B \to B'$ es un $\mathfrak{R}$-monomorfismo, es posible definir otro $\mathfrak{R}$-morfismo, $h : B' \to A$, tal que $hg = f$; es decir, tal que

$$\begin{tikzcd} A & \circlearrowleft & B' \arrow[ll, dashed, "h"'] \\ & B \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Es de esperar que tenga lugar un resultado casi dual al enunciado en la proposición anterior. Pero he aquí que en esta ocasión hay un caso particular en que la coproposición correspondiente deja de ser verdadera; se trata del caso en el que el $\underline{K}$-objeto (X,ξ) tiene por conjunto subyacente al conjunto vacío.

Si en la proposición anterior se toma $X = \varnothing$ y se denota por $\xi_\varnothing$ a la $\underline{K}$-estructura discreta para X, entonces f es el morfismo vacío ϕ, mismo que hace que conmute el triángulo

$$\begin{tikzcd}
(X, \xi_\varnothing) \arrow[rr, dashed, "\phi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & (Y, \eta) \arrow[dl, "g"] \\
& (Z, \zeta) &
\end{tikzcd}$$

En cambio, para $\underline{K}$-objetos arbitrarios como son (Y, η) y (Z, ζ), los morfismos f, g y h que desde ellos se definan no pueden incidir, en general, en un $\underline{K}$-objeto vacío salvo que Y y Z sean vacíos, ya que el concepto de función exige tener codominio no vacío para toda función definida sobre un dominio no vacío. De aquí que no puedan invertirse las flechas (ni pueda considerarse la situación dual) del diagrama anterior mientras se tenga $X = \varnothing$.

Por espacio de cuatro años este detalle pasó inadvertido ante los ojos de los especialistas hasta que, en 1978 (dirigida por el Dr. Vázquez), Graciela Salicrup lo hizo notar en el tercer capítulo de su tesis doctoral[5]. Ello permite mostrar un ejemplo en el que la *cuasi dualidad* aplicada a una proposición verdadera da por resultado una proposición que no es verdadera.

Ya corregida, la sentencia correspondiente puede escribirse como sigue:

Proposición 8.11 *Si (X, ξ) es un $\underline{K}$-objeto arbitrario de una categoría topológica $\underline{K}$ cualquiera, entonces son equivalentes:*

a) ξ es indiscreta y $X \neq \varnothing$.

b) (X, ξ) es inyectivo.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Se prueba casi dualmente a como se probó la primera parte de la proposición anterior.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea (Y, η) un $\underline{K}$-objeto, con $Y \neq \varnothing$. Por vacuidad, la función vacía

$$\phi : \emptyset \to Y$$

es inyectiva; en consecuencia,

$$\phi : (\emptyset, \xi_\varnothing) \to (Y, \eta)$$

es un monomorfismo, siendo $\xi_\varnothing$ la $\underline{K}$-estructura discreta de $\emptyset$; considérese también el $\underline{K}$-morfismo vacío

$$\phi : (\emptyset, \xi_\varnothing) \to (X, \xi)$$

Por (b), existe un $\underline{K}$-morfismo

$$h : (Y, \eta) \to (X, \xi)$$

que da conmutatividad al triángulo

$$\begin{tikzcd}
(X, \xi) & & (Y, \eta) \arrow[ll, dashed, "h"'] \\
& (\emptyset, \xi_\varnothing) \arrow[ul, "\phi"] \arrow[ur, "\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $Y \neq \varnothing$, el concepto de función obliga a tener $X \neq \varnothing$. El resto de la demostración es casi dual al de la segunda parte de la proposición anterior. ■

8.2. Categorías monotopológicas

No deja de ser desconcertante el haber hallado que subcategorías de $\mathfrak{Top}$ como $\mathbf{T_2}$, $\mathfrak{Topc}$ y $\mathfrak{Topc}_2$ no son topológicas. Para ellas resultó demasiado restrictiva la condición de tener que dotar de estructuras iniciales a todos los conjuntos que sean dominio de fuentes cuyos codominios consten de familias de objetos pertenecientes a ellas. Esta restricción puede holgarse un poco y dar lugar a una clase de categorías concretas donde tengan cabida muchas de las que habían quedado excluidas de la clase de las topológicas.

[5] "Epirreflexividad y Conexidad en Categorías Concretas Topológicas", Anales del Instituto de Matemáticas, vol.18 nº2, 1978.

Definición 8.5 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Se dice que $\underline{K}$ es* ***monotopológica*** *si para todo conjunto X y cualquier fuente que separe puntos $\digamma = (X, (f_i)_I)$, cuyo codominio sea una familia $(A_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos, existe $\xi \in \underline{K}[X]$ tal que si $A = (X, \xi)$, entonces $\digamma = \left(A \xrightarrow{f_i} A_i\right)_I$ es una $\underline{K}$-fuente inicial.*

Ejemplo 8.4 *Toda categoría concreta topológica es monotopológica.*

Ejemplo 8.5 $\mathbf{T_2}$ *es monotopológica.*

En efecto, quedó establecido que si $\digamma = (X, (f_i)_I)$ es una fuente que separa puntos cuyo codominio es una familia de espacios $\mathbf{T_2}$, entonces existe una $\mathbf{T_2}$-estructura para X que es inicial con respecto a $\digamma$.

Ejemplo 8.6 $\mathfrak{Pos}$ *es monotopológica.*

En efecto, se sabe que para cualquier fuente $\digamma = \left(X \xrightarrow{f_i} (X_i, \leq_i)\right)_I$ de codominio en $\mathfrak{Pos}$, el preorden $\preceq$ en X definido para cualesquiera $x, x' \in X$ por

$$x \preceq x' \Leftrightarrow f_i(x) \leq_i f_i(x'), \forall i \in I$$

es una $\mathfrak{Pos}$-estructura inicial para X con respecto a $\digamma$ si es antisimétrico. Ahora bien, si x y x' son tales que

$$x \preceq x' \qquad \text{y} \qquad x' \preceq x$$

entonces, para toda $i \in I$, se tiene

$$f_i(x) \leq_i f_i(x') \qquad \text{y} \qquad f_i(x') \leq_i f_i(x)$$

Y como $\leq_i$es un orden parcial, entonces

$$f_i(x) = f_i(x'), \forall i \in I.$$

Si $\digamma$ separa puntos, esto implica que $x = x'$ y, por lo tanto, $\preceq$ es antisimétrico.

Observación 8.4 *Dado que la inclusión ι de cualquier subconjunto A de X en (X, ξ) constituye una fuente que separa puntos con una sola flecha*

$$\iota : A \hookrightarrow (X, \xi)$$

se tiene que toda categoría monotopológica es hereditaria.

Esta observación revela que ni $\mathfrak{Topc}$ ni $\mathfrak{Topc}_2$ han quedado incluidas en la clase de las categorías monotopológicas.

El coconcepto correspondiente al de categoría monotopológica es el de *categoría epitopológica*.

Definición 8.6 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Se dice que $\underline{K}$ es* ***epitopológica*** *si para todo conjunto X y cualquier sumidero exhaustivo $S = ((f_i)_I, X)$, cuyo dominio sea una familia $(A_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos, existe $\xi \in \underline{K}[X]$ tal que si $A = (X, \xi)$, entonces $S = \left(A_i \xrightarrow{f_i} A\right)_I$ es un $\underline{K}$-sumidero final.*

Ejercicio 8.2 *Siendo $\underline{K}$ cualquier categoría concreta considérese el par de afirmaciones siguiente*

a) $\underline{K}$ es monotopológica.
b) $\underline{K}$ es epitopológica.
?'Son equivalentes (*a*) y (*b*)? Justifique su respuesta.

Como ya se ha señalado, la clase de categorías monotopológicas incluye dentro de sí a todas las categorías topológicas. Una propiedad que poseen algunas categorías concretas (y que se describirá enseguida) resulta ser, en la clase de las categorías monotopológicas, propiedad característica de las categorías topológicas. Con la prueba de esta caracterización se pone fin a este estudio.

La propiedad referida permite que en algunas categorías concretas puedan obtenerse objetos nuevos de los ya dados *escindiendo puntos* en los conjuntos subyacentes. En $\mathfrak{Top}$, por ejemplo, escindiendo el punto x del singulete $\{x\}$ en dos puntos, se obtiene un espacio topológico sobre un conjunto de dos puntos

$$\{x_1, x_2\}$$

Si se conviene en adoptar para él la topología que por cada abierto U en el singulete da un abierto formado por las escisiones de los puntos de que constaba U, se obtiene que los abiertos son

$$\emptyset \qquad \text{y} \qquad \{x_1, x_2\}$$

es decir, se obtiene el espacio indiscreto de dos puntos. Es claro que si en vez de escindir a x en dos lo se escinde en tres puntos, se obtiene, de acuerdo con la descripción anterior, el espacio indiscreto de tres puntos. Escindiendo indefinidamente al singulete se obtienen todos los espacios indiscretos.

Aún en $\mathfrak{Top}$, pero de modo más general: Si el conjunto subyacente de un espacio topológico (X, τ) consta de una familia de puntos $X = (x_i)_I$ de la cual cada miembro x_i se escinde en una familia $x_i = (x_{ij})_{J_i}$, entonces por cada $U \in \tau$ queda definido un conjunto

$$\widehat{U} = \{x_{ij} : x_i \in U\}$$

y es fácil ver que la familia $\widehat{\tau}$ formada por estos conjuntos constituye una topología para el conjunto

$$\widehat{X} = \bigcup_{i \in I} \{x_{ij} : j \in J_i\}$$

Obsérvese que de $\widehat{X}$ en X se puede definir de modo natural una función f mediante

$$\begin{array}{rccc} f: & \widehat{X} & \rightarrow & X \\ & x_{ij} & \mapsto & x_i \end{array}$$

Nótese que f es suprayectiva. Más aún,

$$f : \left(\widehat{X}, \widehat{\tau}\right) \rightarrow (X, \tau)$$

es una función continua, pues, evidentemente,

$$f^{-1}(U) = \widehat{U}, \ \forall U \in \tau$$

Además, si $(W, \omega) \in \mathfrak{Top}$ y $g : W \rightarrow \widehat{X}$ son tales que

$$fg : (W, \omega) \rightarrow (X, \tau)$$

es continua, entonces para todo $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$ se tiene que

$$g^{-1}\left(\widehat{U}\right) = g^{-1}\left(f^{-1}(U)\right) = (fg)^{-1}(U) \in \omega$$

Es decir,

$$g : (W, \omega) \rightarrow \left(\widehat{X}, \widehat{\tau}\right)$$

es continua. Esto demuestra que $\widehat{\tau}$ es la topología inicial para $\widehat{X}$ con respecto a f y τ.

Recíprocamente, como $\mathfrak{Top}$ es topológica, a cualquier conjunto $\widehat{X}$ desde el cual se encuentre definida una función suprayectiva f sobre cualquier espacio topológico (X, τ) puede ser dotado de la topología inicial correspondiente a f y τ y ser visualizado como el resultado de una escisión de puntos ocurrida en X: la fibra $f^{-1}(x)$ de cada $x \in X$ es la familia de puntos en que x se ha escindido.

Considérese otro ejemplo, ahora en $\mathfrak{Gra}$. Supóngase que el conjunto subyacente de una gráfica dirigida (X, β) es $X = (x_i)_I$ y que cada punto x_i se escinde en una familia $x_i = (x_{ij})_{J_i}$, dando lugar al conjunto

$$\widehat{X} = \bigcup_{i \in I} \{x_{ij} : j \in J_i\}$$

Definiendo

$$\widehat{\beta} = \left\{ (x_{ij}, x_{i'j'}) \in \widehat{X} \times \widehat{X} : (x_i, x_{i'}) \in \beta \right\}$$

es claro que

$$\left(\widehat{X}, \widehat{\beta} \right) \in \mathfrak{Gra}$$

Obsérvese que también en este caso, de la función suprayectiva

$$\begin{array}{rccc} f: & \widehat{X} & \rightarrow & X \\ & x_{ij} & \mapsto & x_i \end{array}$$

se obtiene un morfismo

$$f : \left(\widehat{X}, \widehat{\beta} \right) \rightarrow (X, \beta)$$

ya que

$$(x_{ij}, x_{i'j'}) \in \widehat{\beta} \Rightarrow (f(x_{ij}), f(x_{i'j'})) = (x_i, x_{i'}) \in \beta$$

Por otro lado, supóngase que otra digráfica (W, α) y una función $g : W \rightarrow \widehat{X}$ son tales que

$$fg : (W, \alpha) \rightarrow (X, \beta)$$

es compatible. Si para cualquier $(w_1, w_2) \in \alpha$ son

$$g(w_1) = x_{ij} \qquad \text{y} \qquad g(w_2) = x_{i'j'}$$

entonces

$$(x_i, x_{i'}) = (f(x_{ij}), f(x_{i'j'})) = (fg(w_1), fg(w_2)) \in \beta$$

porque fg es compatible; pero entonces de acuerdo con la definición de $\widehat{\beta}$ se debe tener

$$(x_{ij}, x_{i'j'}) \in \widehat{\beta}$$

lo que significa que

$$g : (W, \alpha) \rightarrow \left(\widehat{X}, \widehat{\beta} \right)$$

también es compatible. Esto prueba que $\widehat{\beta}$ es una $\mathfrak{Gra}$-estructura inicial para $\widehat{X}$ con respecto a f y β.

Y también recíprocamente: como $\mathfrak{Gra}$ es topológica, a cualquier conjunto $\widehat{X}$ desde el cual se encuentre definida una función suprayectiva f sobre cualquier digráfica (X, β) se lo puede dotar de una $\mathfrak{Gra}$-estructura inicial correspondiente a f y β y se lo puede visualizar como el resultado de una escisión de puntos ocurrida en X según las fibras determinadas por f.

Estos ejemplos ya dan una idea precisa de los siguientes conceptos.

Definición 8.7 *Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta y (X, ξ) un $\underline{K}$-objeto, cualesquiera. Un $\underline{K}$-objeto $\left(\widehat{X}, \widehat{\xi} \right)$ es una **escisión** de (X, ξ) si existe un morfismo suprayectivo*

$$f : \left(\widehat{X}, \widehat{\xi} \right) \rightarrow (X, \xi)$$

*y si $\widehat{\xi}$ es inicial para $\widehat{X}$ con respecto a f y ξ. Se dice que $\underline{K}$ **permite escisiones** si para toda fuente con una flecha del tipo*

$$\mathcal{F} = \left(\widehat{X} \overset{f}{\twoheadrightarrow} (X, \xi) \right), \qquad (f \text{ suprayectiva})$$

siempre existe $\widehat{\xi} \in \underline{K}\left[\widehat{X} \right]$ que es inicial con respecto a $\mathcal{F}$.

Como claramente se puede observar, toda categoría topológica permite escisiones. Sin embargo, esta propiedad no es exclusiva de las categorías topológicas; para mostrar un ejemplo se presentará una categoría que hasta ahora no ha sido vista.

$\mathfrak{Pmet}$ es la **categoría de espacios seudométricos y contracciones**.

Definición 8.8 *Una* ***seudométrica*** *para un conjunto X es una función*

$$\delta : X \times X \to \mathbb{R}$$

que para cualesquiera $x, y, z \in X$ satisface las dos condiciones siguientes:

(i) $\delta(x, x) = 0$.
(ii) $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$.
Una **contracción** entre dos espacios seudométricos (X, δ) y (X', δ') es una función

$$f : X \to X'$$

tal que para cualesquiera $x, y \in X$,

$$\delta'(f(x), f(y)) \leq \delta(x, y)$$

Para probar que $\mathfrak{Pmet}$ permite escisiones, considérense cualquier espacio seudométrico (X, δ) y cualquier función suprayectiva

$$f : \widehat{X} \to (X, \delta)$$

Definiendo

$$\widehat{\delta} : \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{R}$$

mediante

$$\widehat{\delta}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \delta(f(\widehat{x}), f(\widehat{y}))$$

se obtiene una función bien definida que claramente convierte a

$$f : \left(\widehat{X}, \widehat{\delta}\right) \to (X, \delta)$$

en una contracción. Además, si otro espacio seudométrico (W, γ) y una función $g : W \to \widehat{X}$ son tales que

$$fg : (W, \gamma) \to (X, \delta)$$

es una contracción, entonces para $u, v \in W$ arbitrarios se tiene

$$\widehat{\delta}(g(u), g(v)) = \delta(fg(u), fg(v)) \leq \gamma(u, v)$$

lo que significa que

$$g : (W, \gamma) \to \left(\widehat{X}, \widehat{\delta}\right)$$

también es una contracción. Esto prueba que $\widehat{\delta}$ es una seudométrica inicial para $\widehat{X}$ con respecto a f y δ. Por lo tanto, $\mathfrak{Pmet}$ permite escisiones.

Pero $\mathfrak{Pmet}$ no es topológica, pues si para el conjunto $X = \{0, 1\}$ se definen seudométricas δ_n haciendo

$$\delta_n(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ si } x = y \\ n, \text{ si } x \neq y \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces para X no puede haber una seudométrica inicial con respecto a la fuente

$$\digamma = (1_X : X \to (X, \delta_n))_{\mathbb{N}}$$

porque para cualquier seudométrica δ que se proponga siempre podrá hallarse $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\delta(0, 1) < n, \ \forall n > N;$$

o sea que a partir de cierto momento las identidades dejan de ser contracciones.

Para finalizar, se demostrá la caracterización de que mencionada.

Proposición 8.12 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Entonces, $\underline{K}$ es topológica si, y sólo si, $\underline{K}$ es monotopológica y permite escisiones.*

Demostración. Basta demostrar la implicación de derecha a izquierda. Considérese entonces, para $X \in \mathfrak{Set}$ arbitrario, cualquier fuente de codominio en $\underline{K}$

$$\mathcal{F} = \left(X \xrightarrow{f_i} (X_i, \xi_i) \right)_I \quad ;$$

Defínase, para cualesquiera $x, x' \in X$, la relación

$$x \sim x' \Leftrightarrow f_i(x) = f_i(x), \forall i \in I$$

y considérese la aplicación canónica

$$p : X \to X \,/\, \sim$$

Si para toda $i \in I$ se define

$$\begin{array}{rccc} f'_i : & X \,/\, \sim & \to & X_i \\ & [x] & \mapsto & f_i(x) \end{array}$$

entonces la fuente

$$\mathcal{F}' = \left(X \,/\, \sim \xrightarrow{f'_i} (X_i, \xi_i) \right)_I$$

separa puntos. En efecto, si $[x] \neq [x']$ entonces $x \nsim x'$, es decir, existe $i \in I$ para la cual

$$f_i(x) \neq f_i(x')$$

Entonces, para esa i

$$f'_i[x] = f'_i[x']$$

Como $\underline{K}$ es monotopológica, existe una $\underline{K}$-estructura $\widetilde{\xi}$ para $X \,/\, \sim$ que es inicial con respecto a $\mathcal{F}'$. Pero además $\underline{K}$ permite escisiones; entonces, considerando que la aplicación canónica es una función suprayectiva

$$p : X \to \left(X \,/\, \sim, \widetilde{\xi} \right)$$

es posible garantizar la existencia de una $\underline{K}$-estructura $\widehat{\xi}$ para X inicial con respecto a p y $\widetilde{\xi}$. Se asegura que $\widehat{\xi}$ ha resultado inicial para X con respecto a $\mathcal{F}$; comprobémoslo.

(i) $f_i : \left(X, \widehat{\xi} \right) \to (X_i, \xi_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo por ser la composición de dos $\underline{K}$-morfismos

$$f_i : \left(X, \widehat{\xi} \right) \xrightarrow{p} \left(X \,/\, \sim, \widetilde{\xi} \right) \xrightarrow{f'_i} (X_i, \xi_i), \forall i \in I$$

(ii) Dados $(W, \omega) \in \underline{K}$ y $g : W \to X$ tales que para toda $i \in I$

$$f_i g : (W, \omega) \to (X_i, \xi_i)$$

son $\underline{K}$-morfismos, se tiene (puesto que $f_i = f'_i p$) el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (W, \omega) & \xrightarrow{f_i g} & (X_i, \xi_i) \\ g \downarrow & \circlearrowleft & \uparrow f'_i \\ \left(X, \widehat{\xi} \right) & \xrightarrow{p} & \left(X \,/\, \sim, \widetilde{\xi} \right) \end{array}$$

Debido a la inicialidad de $\widetilde{\xi}$ con respecto a $\mathcal{F}'$ se tiene que pg es un $\underline{K}$-morfismo. Y como $\widehat{\xi}$ es inicial con respecto a p y $\widetilde{\xi}$, entonces también g es un $\underline{K}$-morfismo, y la demostración llega a su fin. [✓]

Capítulo 9

Transformaciones Naturales

En los cursos de aritmética elemental se enseña que la n-ésima potencia de la m-ésima potencia de un número a es igual a la $(n \times m)$-ésima potencia de a. Desde el punto de vista de la Teoría de los Conjuntos, este resultado no es más que un caso particular de uno mucho más general conocido con el nombre de *"ley exponencial de los conjuntos"*. Asegura que para cualesquiera $A, B, C \in \mathfrak{Set}$ es válida la equivalencia

$$\left(C^{A}\right)^{B} \simeq C^{A \times B}$$

entendida como la biyectividad entre los conjuntos de funciones

$$\mathfrak{Set}\,(B, \mathfrak{Set}\,(A, C)) \quad \text{y} \quad \mathfrak{Set}\,(A \times B, C)$$

Para demostrar esta ley habría que definir una función desde cada uno de estos conjuntos en el otro, con la idea de obtener la invertibilidad mutua entre las dos funciones definidas. Inténtese definir una, digamos

$$\varphi_C : \mathfrak{Set}\,(B, \mathfrak{Set}\,(A, C)) \longrightarrow \mathfrak{Set}\,(A \times B, C)$$ [1]

Escogiendo cualquier

$$f \in \mathfrak{Set}\,(B, \mathfrak{Set}\,(A, C))$$

se tiene que f es una función que asocia con cada $b \in B$ una única función

$$f_b : A \longrightarrow C$$

Obsérvese que, en consecuencia, siempre que se tengan a la mano cualesquiera elementos $a \in A$ y $b \in B$, es posible determinar un elemento en C como $f_b\,(a)$. Y puesto que hay que determinar un elemento en C toda vez que esté dado un par $(a, b) \in A \times B$ para así dejar definida la imagen, $(\varphi_C)_f$, de f bajo φ_C, resulta natural hacerlo escribiendo

$$(\varphi_C)_f\,(a, b) = f_b\,(a)$$

Recíprocamente, si se quiere definir

$$\psi_C : \mathfrak{Set}\,(A \times B, C) \longrightarrow \mathfrak{Set}\,(B, \mathfrak{Set}\,(A, C))$$

entonces, dada

$$g \in \mathfrak{Set}\,(A \times B, C)$$

se antoja proponer como su imagen $(\psi_C)_g$ bajo ψ_C la regla que pone en correspondencia con cada $b \in B$ una función

$$(\psi_C)_{g_b} : A \longrightarrow C$$

definida como

$$(\psi_C)_{g_b}\,(a) = g\,(a, b)$$

Es fácil ver que tanto φ_C como ψ_C son funciones bien definidas.

Si ahora se compone φ_C con ψ_C se obtiene, para cualequier $g \in \mathfrak{Set}(A \times B, C)$, que

$$\varphi_C \psi_C (g) = \varphi_C (\psi_C)_g = (\varphi_C)_{(\psi_C)_g} : A \times B \longrightarrow C$$

es tal que para cualquier $(a, b) \in A \times B$

$$(\varphi_C)_{(\psi_C)_g} (a, b) = (\psi_C)_{g_b} (a) = g (a, b)$$

lo que significa que

$$\varphi_C \psi_C (g) = g$$

Y si se compone ψ_C con φ_C, entonces, para cualquier $f \in \mathfrak{Set}(B, \mathfrak{Set}(A, C))$, se tiene que

$$\psi_C \varphi_C (f) = \psi_C (\varphi_C)_f = (\psi_C)_{(\varphi_C)_f} \; : B \longrightarrow \mathfrak{Set}(A, C)$$

es tal que para cualquier $b \in B$

$$(\psi_C)_{\left[(\varphi_C)_f\right]_b} (a) = (\varphi_C)_f (a, b) = f_b (a)$$

o sea que para cualquier $b \in B$

$$(\psi_C)_{\left[(\varphi_C)_f\right]_b} = f_b$$

de modo que

$$\psi_C \varphi_C (f) = f$$

Por lo tanto, φ_C y ψ_C han resultado, efectivamente, inversas entre sí.

No deja de llamar la atención ni de sorprender el hecho de que un problema en apariencia complicado como éste de establecer la equivalencia entre los dos conjuntos de funciones anteriores, se resuelva simplemente siguiendo las sugerencias que proponen los conceptos y la notación misma. Es muy probable que la respuesta se le ocurra a cualquier persona que comprenda el planteamiento del problema y que sólo conozca el concepto de función. Si después se le pregunta cómo se le ocurrieron las definiciones de φ_C y de ψ_C, la respuesta suele ser: "...porque es natural." Al contemplar esta "naturalidad", queda en uno la impresión de que en casos como éste basta prestarse al juego simbólico hasta que ¡zaz!, el problema quede resuelto.

A mediados del siglo XX dos matemáticos, Eilemberg y Mac Lane, sospecharon que en situaciones como ésta las matemáticas guardaban una peculiaridad muy sutil, y la búsqueda de comprender en qué consiste exáctamente esa sutileza los condujo al desarrollo de la Teoría de las Categorías.

Para intentar poner en relieve lo que subyace en la supuesta *naturalidad* de situaciones como la presente, hay que complicar un poco las cosas introduciendo en la consideración la idea de *transformación natural.*

Definición 9.1 *Sean $F_1, F_2 : \Re \longrightarrow \wp$ dos funtores arbitrarios entre categorías arbitrarias. Se dice que F_1* ***se transforma naturalmente en*** *F_2 si para todo $\Re$-objeto A existe un $\wp$-morfismo*

$$\tau_A : F_1 A \longrightarrow F_2 A$$

tal que para cualquier $\Re$-morfismo $h : A \longrightarrow B$ se tenga

$$\begin{array}{ccc} F_1 A & \xrightarrow{\tau_A} & F_2 A \\ F_1 h \downarrow & \circlearrowright & \downarrow F_2 h \\ F_1 B & \xrightarrow{\tau_B} & F_2 B \end{array}$$

En tal caso se hablará de una ***transformación natural*** *τ* ***de*** *F_1* ***en*** *F_2 y se escribirá*

$$\tau : F_1 \longrightarrow F_2$$

Ejercicio 9.1 *El funtor* ***cuadrado cartesiano***

$$Q_2 : \mathfrak{Set} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

se define, para todo conjunto X como

$$Q_2 X = X \times X$$

donde $X \times X$ es el conjunto

$$X \times X = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in X\} ;$$

y para todo $\mathfrak{Set}$-morfismo $f : X \longrightarrow Y$ como

$$Q_2 f = f \times f : X \times X \longrightarrow Y \times Y$$

donde, para cualquier $(x_1, x_2) \in X \times X$, $f \times f$ viene definida por

$$f \times f\,(x_1, x_2) = (f\,(x_1)\,, f\,(x_2))$$

a) Compruebe que Q_2 preserva composiciones e identidades.
b) Considere el funtor conjunto potencia covariante, Pot, y demuestre que

$$\tau : Q_2 \longrightarrow Pot \quad \text{y} \quad \sigma : Q_2 \longrightarrow Pot$$

definidas para todo $X \in \mathfrak{Set}$ como

$$\begin{array}{rccc} \tau_X : & X \times X & \longrightarrow & 2^X \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & \{x_1, x_2\} \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rccc} \sigma_X : & X \times X & \longrightarrow & 2^X \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & \varnothing \end{array}$$

son transformaciones naturales.

En la ley exponencial de los conjuntos se halla implícita una transformación natural entre funtores de $\mathfrak{Set}$.

Definición 9.2 *Sea $\mathfrak{K}$ una categoría arbitraria y sea D uno cualquiera de sus objetos. El* ***hom-funtor*** *en D es un funtor*

$$H_D : \mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

que para todo $\mathfrak{K}$-objeto A se define como

$$H_D A = \mathfrak{K}\,(D; A)$$

y para todo $\mathfrak{K}$-morfismo $h \in \mathfrak{K}\,(A, B)$, como la función

$$\begin{array}{rccc} H_D h : & \mathfrak{K}\,(D; A) & \longrightarrow & \mathfrak{K}\,(D; B) \\ & f & \longmapsto & hf \end{array}$$

Se verá que esto define efectivamente a un funtor.

[a] H_D preserva composiciones. En efecto, si

$$h \in \mathfrak{K}\,(A, B) \quad \text{y} \quad k \in \mathfrak{K}\,(B, C)$$

entonces, para cualquier $f \in \mathfrak{K}\,(D, A)$,

$$H_D\,(kh)\,(f) = (kh)\,(f) = k\,(hf) = H_D k\,(hf) = (H_D k)\,(H_D h)\,(f)$$

es decir

$$H_D\,(kh) = (H_D k)\,(H_D h)$$

[b] H_D preserva identidades. En efecto, sea $f \in \mathfrak{K}\,(D, A)$; entonces

$$H_D 1_A\,(f) = 1_A f = f = 1_{\mathfrak{K}(D,A)}\,(f)$$

es decir

$$H_D 1_A = 1_{H_D A} \quad [\checkmark]$$

Ahora fíjense en $\mathfrak{Set}$ cualesquiera dos conjuntos A, B y considérese el producto cartesiano $A \times B$. Con los hom-funtores H_A y H_B puede formarse el funtor compuesto

$$H_B H_A : \mathfrak{Set} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

Reconsidérese, por otra parte, a la función

$$\varphi_C : \mathfrak{Set}\,(B, \mathfrak{Set}\,(A, C)) \longrightarrow \mathfrak{Set}\,(A \times B, C)$$

definida en la demostración de la ley exponencial; obsérvese que ahora se la puede denotar como

$$\varphi_C : H_B H_A C \longrightarrow H_{A\times B} C$$

Se verá que cualesquiera que sean

$$C, D \in \mathfrak{Set} \quad \text{y} \quad h \in \mathfrak{Set}\,(C, D)$$

conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_B H_A C & \stackrel{\varphi_C}{\longrightarrow} & H_{A\times B} C \\ H_B H_A h \downarrow & & \downarrow H_{A\times B} h \\ H_B H_A D & \underset{\varphi_D}{\longrightarrow} & H_{A\times B} D \end{array}$$

Para ello recuérdese que si

$$f \in H_B H_A C \quad \text{y} \quad f\,(b) = f_b \in \mathfrak{Set}\,(A, C)$$

entonces, según la definición de φ_C se tiene que

$$\varphi_C\,(f) = (\varphi_C)_f \in H_{A\times B} C$$

es tal que para todo $(a, b) \in A \times B$

$$(\varphi_C)_f\,(a, b) = f_b\,(a)$$

Por otro lado, según la definición de hom-funtor, $H_A h$ es la función

$$\begin{array}{rccc} H_A h : & \mathfrak{Set}\,(A, C) & \longrightarrow & \mathfrak{Set}\,(A, D) \\ & g & \mapsto & hg \end{array} ;$$

en consecuencia $H_B H_A h$ es la función

$$\begin{array}{rccc} H_B\,(H_A h) : & \mathfrak{Set}\,(B, \mathfrak{Set}\,(A, C)) & \longrightarrow & \mathfrak{Set}\,(B, \mathfrak{Set}\,(A, D)) \\ & f & \longmapsto & (H_A h)\, f \end{array}$$

de manera que

$$H_B H_A h\,(f) : B \longrightarrow \mathfrak{Set}\,(A, D)$$

es la composición

$$\begin{array}{rccccc} H_B H_A h\,(f) : & B & \longrightarrow & \mathfrak{Set}\,(A, C) & \longrightarrow & \mathfrak{Set}\,(A, D) \\ & b & \longmapsto & f_b & \longmapsto & h f_b \end{array}$$

Por lo tanto, un camino en el diagrama conduce a la función

$$(\varphi_D)\,(H_B H_A h)\,(f) = (\varphi_D)_{H_B H_A h(f)}$$

tal que para todo $(a, b) \in A \times B$

$$(\varphi_D)_{H_B H_A h(f)}\,(a, b) = h f_b\,(a)$$

El otro camino lleva a la función

$$(H_{A\times B}h)(\varphi_C)(f) = (H_{A\times B}h)(\varphi_C)_f = h(\varphi_C)_f$$

y para todo $(a,b) \in A \times B$

$$h(\varphi_C)_f(a,b) = hf_b(a)$$

Esto demuestra la conmutatividad del diagrama y prueba la existencia de una transformación natural del funtor compuesto $H_B H_A$ en el hom-funtor $H_{A\times B}$.

Para comprender mejor las consecuencias que tiene esto, es conveniente saber más de las transformaciones naturales estudiando algunas de sus propiedades. Por ejemplo, ocurre que pueden componerse funtores y transformaciones naturales.

En efecto, sean

$$\Im \xrightarrow{E} \Re_1 \underset{F_2}{\overset{F_1}{\rightrightarrows}} \Re_2$$

categorías y funtores arbitrarios, y supóngase que existe una transformación natural

$$\tau : F_1 \longrightarrow F_2$$

Sean A, B $\Im$-objetos cualesquiera. Entonces $EA, EB \in \Re_1$ y existen $\Re_2$-morfismos

$$\tau_{EA} : F_1EA \longrightarrow F_2EA \quad \text{y} \quad \tau_{EB} : F_1EB \longrightarrow F_2EB$$

tales que si $h \in \Im(A,B)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} F_1EA & \xrightarrow{\tau_{EA}} & F_2EA \\ F_1Eh \downarrow & \circlearrowright & \downarrow F_2Eh \\ F_1EB & \xrightarrow[\tau_{EB}]{} & F_2EB \end{array}$$

Esto permite definir la composición de τ con E

$$\tau E : F_1E \longrightarrow F_2E$$

como aquella regla que para todo $\Im$-objeto A tiene determinado el $\Re_2$-morfismo

$$(\tau E)_A = \tau_{EA}$$

y se puede asegurar, debido al diagrama anterior, que es una transformación natural.

Ahora considérese la otra situación lateral. Sean

$$\Re_1 \underset{F_2}{\overset{F_1}{\rightrightarrows}} \Re_2 \xrightarrow{G} \wp$$

categorías y funtores arbitrarios, con la transformación natural

$$\tau : F_1 \longrightarrow F_2$$

Entonces, para cualesquiera

$$B, C \in \Re_1 \quad \text{y} \quad g \in \Re_1(B,C)$$

en $\Re_2$ se tiene el diagrama

$$\begin{array}{rcl} F_1B & \xrightarrow{\tau_B} & F_2B \\ F_1g \downarrow & \circlearrowright & \downarrow F_2g \\ F_1C & \xrightarrow[\tau_C]{} & F_2C \end{array}$$

Debido a que G preserva composiciones, el diagrama anterior da lugar, en $\wp$, a éste otro

$$\begin{array}{ccc} GF_1B & \overset{G\tau_B}{\longrightarrow} & GF_2B \\ GF_1g\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow GF_2g \\ GF_1C & \underset{G\tau_C}{\longrightarrow} & GF_2C \end{array}$$

Por lo tanto, también se puede hablar de la transformación natural

$$G\tau : GF_1 \longrightarrow GF_2$$

que para todo $B \in \Re_1$ define un $\wp$-morfismo $(G\tau)_B$ mediante la igualdad

$$(G\tau)_B = G\tau_B$$

Finalmente, considérense las dos composiciones simultáneamente.

$$\Im \overset{E}{\longrightarrow} \Re_1 \underset{F_2}{\overset{F_1}{\rightrightarrows}} \Re_2 \overset{G}{\longrightarrow} \wp$$

De acuerdo con lo anterior, se puede hablar de las transformaciones naturales

$$G(\tau E) : G(F_1E) \longrightarrow G(F_2E) \quad \text{y} \quad (G\tau)E : (GF_1)E \longrightarrow (GF_2)E$$

Ambas transforman al funtor GF_1E en el funtor GF_2E;[2] además, según se ha visto, para cualquier $A \in \Im$ tenemos, por un lado

$$[G(\tau E)]_A = G(\tau E)_A = G\tau_{EA}$$

en tanto que por otro lado

$$[(G\tau)E]_A = (G\tau)_{EA} = G\tau_{EA}$$

Por lo tanto, $G(\tau E) = (G\tau)E$.

Las transformaciones naturales también pueden componerse entre sí, dando lugar a nuevas transformaciones naturales.

Definición 9.3 *Sean*

$$F_1, F_2, F_3 : \Re \longrightarrow \wp$$

funtores y categorías arbitrarios; si

$$\tau : F_1 \longrightarrow F_2 \quad y \quad \sigma : F_2 \longrightarrow F_3$$

son transformaciones naturales, entonces la ***composición***

$$\sigma\tau : F_1 \longrightarrow F_3$$

viene definida mediante

$$(\sigma\tau)_A = \sigma_A\tau_A$$

Se verá que ha quedado definida, efectivamente, una transformación natural. En efecto, si $f \in \Re(A,B)$, entonces se tiene

$$\begin{array}{ccccc} F_1A & \overset{\tau_A}{\longrightarrow} & F_2A & \overset{\sigma_A}{\longrightarrow} & F_3A \\ F_1f\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow F_2h & \circlearrowleft & \downarrow F_3h \\ F_1B & \underset{\tau_B}{\longrightarrow} & F_2B & \underset{\sigma_B}{\longrightarrow} & F_3B \end{array}$$

debido a lo cual, también

$$\begin{array}{ccc} F_1A & \overset{\sigma_A\tau_A}{\longrightarrow} & F_3A \\ F_1f\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow F_3f \\ F_1B & \underset{\sigma_B\tau_B}{\longrightarrow} & F_3B \end{array}$$

que es lo que se tenía que probar.$_{[\checkmark]}$

[2] Véase (a) del ejercicio 1 de la 1ª tanda.

Ejercicio 9.2 *Sean*

$$\Im \underset{F_2}{\overset{F_1}{\rightrightarrows}} \Re \quad y \quad \Re \underset{G_2}{\overset{G_1}{\rightrightarrows}} \wp$$

funtores y categorías cualesquiera. Si

$$\tau : F_1 \longrightarrow F_2 \quad y \quad \sigma : G_1 \longrightarrow G_2$$

son transformaciones naturales arbitrarias, probar que

$$G_1F_1 \underset{(\tau G_2)(F_1\sigma)}{\overset{(\sigma F_2)(G_1\tau)}{\rightrightarrows}} G_2F_2$$

son transformaciones naturales y que

$$(\sigma F_2)\,(G_1\tau) = (\tau G_2)\,(F_1\sigma)$$

Obsérvese que con esta definición terminan quedando explícitamente implícitos tres datos en el presente contexto:

(˙) El que se refiere a una clase de objetos, siempre que están dadas dos categorías arbitrarias $\Re$ y $\wp$; estos objetos son los funtores de $\Re$ en $\wp$.

(¨) Otro dato permite la referencia, cualesquiera que sean dos de estos objetos, a una clase de "morfismos" entre ellos: la clase de transformaciones naturales entre los dos funtores de que se trate.

(∴) Finalmente, la ley de composición entre morfismos dada en la definición anterior.

Salvando por el momento el cuidado que hay que tener en cuanto a que la clase de morfismos entre cualesquiera dos objetos sea un conjunto, y salvo, también, la comprobación de los axiomas correspondientes, lo implícito en el contexto es una categoría. Tal parece que, como ocurre con teorías concretas como la Topología en donde la noción de espacio topológico puede extenderse hasta los conjuntos de funciones continuas entre dos espacios dados, aquí también se podrá extender la noción de categoría para poderse referir a la categoría de funtores entre dos categorías. Para ir formalizando esta cuestión, se intentará primero la comprobación de los axiomas de una categoría.

1. Sean

$$\Re \underset{G_1,G_2}{\overset{F_1,F_2}{\longrightarrow}} \wp$$

funtores arbitrarios entre categorías arbitrarias, y supóngase que τ transforma natural y simultáneamente a F_1 en F_2 y a G_1 en G_2

$$\tau : F_1 \longrightarrow F_2 \qquad \tau : G_1 \longrightarrow G_2$$

Entonces, para todo $\Re$-objeto A,

$$\tau_A \in \wp\,(F_1A, F_2A) \cap \wp\,(G_1A, G_2A)$$

lo cual implica (por el axioma que se está revisando, pero aplicado a la categoría $\wp$) que

$$F_1A = G_1A \quad \text{y} \quad F_2A = G_2A$$

En consecuencia

$$F_11_A = G_11_A \quad \text{y} \quad F_21_A = G_21_A$$

Pero aún más; puesto que se tiene

$$\begin{array}{ccc} F_1A = G_1A & \overset{\tau_A}{\longrightarrow} & F_2A = G_2A \\ F_1h \downarrow\downarrow G_1h & \circlearrowright & F_2h \downarrow\downarrow G_2h \\ F_1B = G_1B & \underset{\tau_B}{\longrightarrow} & F_2B = G_2B \end{array}$$

cualquiera que sea $h \in \Re\,(A, B)$ y cualesquiera que sean A y B en $\Re$, también se tiene

$$F_1h = G_1h \quad \text{y} \quad F_2h = G_2h$$

Por lo tanto

$$F_1 = G_1 \quad \text{y} \quad F_2 = G_2$$

2. Sean los funtores

$$F_1, F_2, F_3, F_4 : \Re \longrightarrow \wp$$

y las transformaciones naturales

$$\tau : F_1 \longrightarrow F_2 \quad \sigma : F_2 \longrightarrow F_3 \quad \rho : F_3 \longrightarrow F_4$$

Entonces

$$[\rho(\sigma\tau)]_A = \rho_A(\sigma\tau)_A = \rho_A(\sigma_A\tau_A) \overset{*}{=} (\rho_A\sigma_A)\tau_A = (\rho\sigma)_A\tau_A = [(\rho\sigma)\tau]_A$$

($\overset{*}{=}$ está justificada por el mismo axioma que se está revisando, pero aplicado a los $\wp$-morfismos ρ_A, σ_A, τ_A). Esto se ve reflejado en que para cualquier $f \in \Re(A, B)$, al diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} F_1A & \overset{\tau_A}{\longrightarrow} & F_2A & \overset{\sigma_A}{\longrightarrow} & F_3A & \overset{\rho_A}{\longrightarrow} & F_4A \\ F_1f\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow F_2f & \circlearrowleft & \downarrow F_3f & \circlearrowleft & \downarrow F_4f \\ F_1B & \underset{\tau_B}{\longrightarrow} & F_2B & \underset{\sigma_B}{\longrightarrow} & F_3B & \underset{\rho_B}{\longrightarrow} & F_4B \end{array}$$

se lo puede hacer conmutar en sus dos primeros tercios con el tercero o bien en los dos últimos con el primero, obteniendo en ambos casos el mismo resultado. Por lo tanto

$$\rho(\sigma\tau) = (\rho\sigma)\tau$$

3. Sea

$$F : \Re \longrightarrow \wp$$

un funtor arbitrario entre categorías cualesquiera, y sea

$$1_F : F \longrightarrow F$$

tal que, para todo $A \in \Re$

$$(1_F)_A = 1_{FA}$$

Entonces, cualquiera que sea $f \in \Re(A, B)$, es obvio que

$$\begin{array}{ccc} FA & \overset{(1_F)_A}{\longrightarrow} & FA \\ Ff\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow Ff \\ FB & \underset{(1_F)_B}{\longrightarrow} & FB \end{array}$$

lo cual implica que 1_F es una transformación natural. Además, si

$$\tau : E \longrightarrow F \quad \text{y} \quad \sigma : F \longrightarrow G$$

son transformaciones naturales, entonces

$$1_F\tau : E \longrightarrow F \quad \text{y} \quad \sigma 1_F : F \longrightarrow G$$

son transformaciones tales que para todo $A \in \Re$

$$(1_F\tau)_A = (1_F)_A\tau_A = 1_{FA}\tau_A = \tau_A \quad \text{y} \quad (\sigma 1_F)_A = \sigma_A(1_F)_A = \sigma_A 1_{FA} = \sigma_A$$

(debido al mismo axioma pero aplicado al $\wp$-morfismo 1_{FA}). Por lo tanto

$$1_F\tau = \tau \quad \text{y} \quad \sigma 1_F = \sigma$$

como había que probar.$_{[\checkmark]}$

Los tres axiomas que definen a una categoría han sido, pues, comprobados. Para saber si se puede hablar, en general, de la categoría de funtores entre dos categorías fijas arbitrarias sólo resta atacar la cuestión acerca de si la clase de transformaciones naturales entre dos funtores arbitrarios es un conjunto. Desgraciada, o quizás, afortunadamente, la respuesta a esta interrogante es negativa. De hecho, ni siquiera es formalmente lícito, desde el punto de vista de la Teoría de los Conjuntos, la referencia a la colección de funtores entre dos categorías cualesquiera como a una *clase*. Si se ha permitido haber incurrido en este error en el inciso ($\dot{}$) anterior es porque a lo largo de este trabajo se ha hablado de clases vaga e imprecisamente. Es justamente a consecuencia de que la colección de funtores entre dos categorías fijas $\Re$ y $\wp$ no siempre es una clase, que tampoco necesariamente la colección de transformaciones naturales entre dos funtores $F_1, F_2 : \Re \to \wp$ es un conjunto. Sin embargo, impidiendo que el *exponente* $\Re$ crezca demasiado, es posible hablar de *la categoría* $\wp^{\Re}$ *de funtores y transformaciones naturales.* Para demostrar esta aceveración se recordará que el producto cartesiano de una familia de conjuntos $(X_\lambda)_\Lambda$

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

es el conjunto de elementos de la forma

$$x = (x_\lambda)_\Lambda$$

donde $x_\lambda \in X_\lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$. Obsérvese, por otra parte, que una transformación natural

$$\tau : F_1 \to F_2$$

puede mirarse como un elemento de la forma

$$\tau = (\tau_A)_{|\Re|}$$

donde $\tau_A \in \wp(F_1A, F_2A)$ para toda $A \in |\Re|$; y si la clase $|\Re|$ de $\Re$-objetos es un conjunto, entonces τ es un elemento del producto

$$\prod_{A\in|\Re|} \wp(F_1A, F_2A)$$

y la clase $\wp^{\Re}(F_1, F_2)$ de transformaciones naturales es un subconjunto de este producto.

Definición 9.4 *Sean, $\Re$ una categoría pequeña y $\wp$ una categoría arbitraria. Entonces $\wp^{\Re}$ denotará a la categoría cuyos objetos son los funtores de $\Re$ en $\wp$, y para cualesquiera funtores $F_1, F_2 \in \wp^{\Re}$*

$$\wp^{\Re}(F_1, F_2)$$

es el conjunto de transformaciones naturales de F_1 en F_2. $\wp^{\Re}$ es, pues, ***la categoría de funtores y transformaciones naturales****.*

Ejemplo 9.1 *Piénsese en el conjunto $\{0,1\}$ con el orden $\leq$ inducido por el usual de $\mathbb{Z}$ y denótese por $\mathfrak{D}$ a la categoría*

$$\mathfrak{D} = (\{0,1\}, \leq)$$

formada por el copro correspondiente. Entonces $\mathfrak{D}$ posee dos objetos

$$0 \quad y \quad 1$$

y un morfismo no trivial

$$\langle 0,1\rangle$$

además de los morfismos idénticos

$$\langle 0,0\rangle = 1_0 \quad y \quad \langle 1,1\rangle = 1_1$$

Si $\wp$ es una categoría arbitraria, entonces todo funtor

$$F : \mathfrak{D} \longrightarrow \wp$$

determina en $\wp$ *dos objetos*

$$F0 \quad y \quad F1$$

y un morfismo

$$F\langle 0,1\rangle : F0 \to F1$$

aparte de las identidades que preserva pero que no determina

$$F1_0 = 1_{F0} \qquad F1_1 = 1_{F1}$$

Sea

$$G : \mathfrak{D} \longrightarrow \wp$$

otro funtor; entonces, una transformación natural

$$\tau : F \to G$$

viene dada por dos $\wp$*-morfismos*

$$\tau_0 : F0 \to G0 \quad y \quad \tau_1 : F1 \to G1$$

tales que

$$\begin{array}{ccc} F0 & \overset{\tau_0}{\longrightarrow} & G0 \\ F\langle 0,1\rangle \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G\langle 0,1\rangle \\ F1 & \underset{\tau_1}{\longrightarrow} & G1 \end{array}$$

Obsérvese que, recíprocamente, todo $\wp$*-morfismo*

$$f : A_0 \to A_1$$

determina un funtor

$$F : \mathfrak{D} \longrightarrow \wp$$

En efecto, F *queda determinado por*

$$A_0 = F0 \quad A_1 = F1 \quad y \quad F\langle 0,1\rangle = f$$

En consecuencia, se puede describir a $\wp^{\mathfrak{D}}$ *como a la categoría cuyos objetos son todos los* $\wp$*-morfismos (y que por eso se habla de* $\wp^{\mathfrak{D}}$ *como de* ***la categoría de morfismos de*** $\wp$*) y cuyos conjuntos de morfismos*

$$\wp^{\mathfrak{D}}\left(A_0 \xrightarrow{f} A_1, B_0 \xrightarrow{g} B_1\right)$$

consta de parejas de $\wp$*-morfismos*

$$\left(A_0 \xrightarrow{\tau_0} B_0, A_1 \xrightarrow{\tau_1} B_1\right)$$

tales que

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \overset{\tau_0}{\longrightarrow} & B_0 \\ f\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow g \\ A_1 & \underset{\tau_1}{\longrightarrow} & B_1 \end{array} \qquad [\checkmark]$$

Ejemplo 9.2 *Si en lugar del orden inducido, se da a* $\{0,1\}$ *el orden discreto* $\leqq$

$$x_1 \leqq x_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$$

y se denota por

$$2 = (\{0,1\}, \leqq)$$

a la categoría correspondiente, entonces 2 sólo consta de los objetos

$$0 \quad y \quad 1$$

y de los morfismos idénticos

$$1_0 \quad y \quad 1_1$$

En consecuencia, todo funtor de 2 en $\wp$ *determina (y está determinado por) un par de objetos de* $\wp$*. Sean*

$$F, G : 2 \to \wp$$

funtores cualesquiera y sean

$$A_0 = F0 \quad A_1 = F1 \quad y \quad B_0 = G0 \quad B_1 = G1$$

Entonces, una transformación natural

$$\tau : F \to G$$

viene dada por cualquier par de $\wp$*-morfismos*

$$\tau_0 : A_0 \to B_0 \quad y \quad \tau_1 : A_1 \to B_1$$

La condición de naturalidad (que consiste en hacer conmutar en $\wp$ *al diagrama correspondiente a cualquier morfismo de la categoría 2) aquí se satisface trivialmente, porque los 2-morfismos* f *son dos:*

$$f = 1_0 \quad ó \quad f = 1_1$$

y se tiene

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{\tau_0} & B_0 \\ 1_{A_0} \downarrow & \circlearrowright & \downarrow 1_{B_0} \\ A_0 & \xrightarrow[\tau_0]{} & B_0 \end{array} \quad ó \quad \begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\tau_1} & B_1 \\ 1_{A_1} \downarrow & \circlearrowright & \downarrow 1_{B_1} \\ A_1 & \xrightarrow[\tau_1]{} & B_1 \end{array} \qquad [\checkmark]$$

Pasando a otra cosa, es claro que en una categoría de funtores y de transformaciones naturales se puede hacer referencia a todos los conceptos que se han definido para cualquier categoría como son, por ejemplo, los tipos especiales de morfismos: los monomorfismos, los epimorfismos, los isomorfismos, etcétera; se entiende que de ellos se derivarán tipos especiales de transformaciones naturales (vistas como morfismos). Ahora bien; tomando en cuenta que la noción de "transformación natural" es previa a la de "categoría de funtores" y precursora de ella, nada impide soslayar el rol de "morfismo" de una transformación natural para así poder extender a transformaciones naturales abstractas estos tipos especiales de ellas que surgen cuando se las mira como a morfismos. Hacerlo así, da lugar a las definiciones siguientes.

Definición 9.5 *Sean* $\Re$ *y* $\wp$ *categorías arbitrarias, y* $F_1, F_2 : \Re \to \wp$ *funtores arbitrarios. Una transformación natural*

$$\tau : F_1 \to F_2$$

es un ***isomorfismo natural*** *si existe otra transformación natural*

$$\sigma : F_2 \to F_1$$

tal que

$$\sigma\tau = 1_{F_1} \quad y \quad \tau\sigma = 1_{F_2}$$

En tal caso se dice que F_1 *y* F_2 *son* ***funtores naturalmente isomorfos*** *y se escribire*

$$F_1 \cong F_2$$

Ejercicio 9.3 *Probar que el funtor Q_2 del ejercicio 10 anterior es naturalmente isomorfo al hom-funtor*

$$H_2 : \mathfrak{Set} \longrightarrow \mathfrak{Set}, \ \textit{donde } 2 = \{0,1\}$$

definiendo una transformación natural

$$\tau : Q_2 \longrightarrow H_2$$

que sea un isomorfismo.

Proposición 9.1 *Si*

$$F_1, F_2 : \Re \to \wp$$

son funtores arbitrarios entre categorías arbitrarias y

$$\tau : F_1 \to F_2$$

es una transformación natural, entonces son equivalentes:

(a) τ es un isomorfismo natural.
(b) Para todo $A \in \Re$

$$\tau_A : F_1 A \to F_2 A$$

es un $\wp$-isomorfismo.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Por (a) existe

$$\sigma : F_2 \to F_1$$

tal que

$$\sigma\tau = 1_{F_1} \quad \text{y} \quad \tau\sigma = 1_{F_2}$$

Por lo tanto, si $A \in \Re$ entonces

$$\sigma_A \tau_A = (\sigma\tau)_A = (1_{F_1})_A = 1_{F_1 A} \quad \text{y} \quad \tau_A \sigma_A = (\tau\sigma)_A = (1_{F_2})_A = 1_{F_2 A}$$

lo cual significa que τ_A es un $\wp$-isomorfismo.

(b) $\Rightarrow$ (a) Por (b), para todo $A \in \Re$ existe

$$\sigma_A : F_2 A \to F_1 A$$

tal que

$$\sigma_A \tau_A = 1_{F_1 A} \quad \text{y} \quad \tau_A \sigma_A = 1_{F_2 A}$$

Hay que probar que se tiene definida una transformación natural

$$\sigma : F_2 \to F_1$$

Para ello hay que probar que si $f \in \Re(A, B)$, entonces conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_2 A & \xrightarrow{\sigma_A} & F_1 A \\ F_2 f \downarrow & & \downarrow F_1 f \\ F_2 B & \xrightarrow[\sigma_B]{} & F_1 B \end{array}$$

Piénseselo así:

$$\begin{array}{ccccc} F_2 A & \xrightarrow{\sigma_A} & F_1 A & \xrightarrow{\tau_A} & F_2 A \\ F_2 f \downarrow & & \downarrow F_1 f & \circlearrowright & \downarrow F_2 f \\ F_2 B & \xrightarrow[\sigma_B]{} & F_1 B & \xrightarrow[\tau_B]{} & F_2 B \end{array}$$

Se tiene:

$$\sigma_B F_2 f = \sigma_B F_2 f (\tau_A \sigma_A) = \sigma_B (F_2 f \tau_A) \sigma_A = \sigma_B (\tau_B F_1 f) \sigma_A = (\sigma_B \tau_B) F_1 f \sigma_A = F_1 f \sigma_A$$

Por lo tanto, σ es una transformación natural tal que

$$\sigma\tau = 1_{F_1} \quad \text{y} \quad \tau\sigma = 1_{F_2}$$

lo cual significa que τ es un isomorfismo natural.$_{[\checkmark]}$

Ejemplo 9.3 *En conformidad con la demostración de la ley exponencial de los conjuntos se sabe que, para todo $C \in \mathfrak{Set}$, la función*

$$\varphi_C : H_B H_A C \longrightarrow H_{A\times B} C$$

es una biyección (un $\mathfrak{Set}$-isomorfismo). Aplicando el resultado de la proposición anterior se tiene que la transformación

$$\varphi : H_B H_A \longrightarrow H_{A\times B}$$

es un isomorfismo natural.$_{[\checkmark]}$

Ejemplo 9.4 *Para mostrar otro ejemplo fundamental de isomorfismo natural, considérese la categoría* $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$.

Para cualquier $V \in \mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$ considérese al espacio vectorial de formas lineales

$$V^* = \{f : V \longrightarrow (\mathbb{R}, (+, \cdot)) \mid f \text{ es lineal}\}$$

llamado **espacio dual de** V.

Suponiendo que V es de dimensión finita y que

$$\beta = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

es una de sus bases, se puede definir, para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$, la función

$$p_j : V \longrightarrow (\mathbb{R}, (+, \cdot))$$

tal que

$$p_j(e_i) = \begin{cases} 0, \text{ si } i \neq j \\ 1, \text{ si } i = j \end{cases}$$

Es fácil ver que $p_j \in V^*$ y que

$$\beta^* = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$$

es base de V^*. Por consiguiente, V^* y V son de la misma dimensión y, en consecuencia, la aplicación

$$\rho : V \longrightarrow V^*$$

tal que en los vectores de β está definida como

$$\rho(e_i) = p_i$$

es un isomorfismo.

Es de notar que la definición de ρ se atiene a la elección de una base β previamente determinada.

Por otro lado, puesto que esta construcción vale para cualquier espacio vectorial de dimensión finita, se puede aplicar a V^* y asegurar que también V^* y V^{**} (es decir, el espacio dual de V^*) tienen la misma dimensión. En consecuencia, también V y V^{**} son isomorfos. Inténtese definir un isomorfismo η_V de V y V^{**}. Para ello hágase, para todo $x \in V$,

$$\eta_V(x) = \widehat{x}$$

y trátese de definir la regla de correspondencia de

$$\widehat{x} : V^* \longrightarrow (\mathbb{R}, (+, \cdot))$$

Después de pensarlo un momento se antoja proponer, para toda $p \in V^*$,

$$\widehat{x}(p) = p(x)$$

Obsérvese que, en contraste con la definición de ρ, la definición de η_V no hace referencia a base alguna. Como se verá a continuación, se trata de un isomorfismo.

En efecto, para cualesquiera $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:

(i) $\widehat{x+y}(p) = p(x+y) = p(x) + p(y) = \widehat{x}(p) + \widehat{y}(p)$;

(ii) $\widehat{\alpha x}(p) = p(\alpha x) = \alpha p(x) = \alpha \widehat{x}(p)$
lo que significa que η_V es una aplicación lineal.
Además, si un vector x de V se descompone en la base β como

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$$

y es tal que

$$\eta_V(x) = \widehat{0} : \begin{array}{ccc} V^* & \longrightarrow & (\mathbb{R}, (+, \cdot)) \\ p & \mapsto & 0 \end{array}$$

entonces, de acuerdo con la definición de η_V, se tiene que para toda $p \in V^*$

$$p(x) = 0$$

En particular, si se evalúa a x bajo cada función p_j de la base β^* de V^* también

$$p_j(x) = 0$$

Pero, para toda $j \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$p_j(x) = x_j$$

Por lo tanto, $x = 0$. Esto implica que η_V es un $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$-morfismo inyectivo.
Y si se escoge un vector ϱ de V^{**} arbitrariamente y para toda $j \in \{1, 2, ..., n\}$ se tiene que

$$\varrho(p_j) = r_j$$

entonces, para

$$x_\varrho = r_1 e_1 + r_2 e_2 + ... + r_n e_n$$

se tendrá

$$\eta_V(x_\varrho) = \varrho$$

En efecto, sea

$$p = a_1 p_1 + a_2 p_2 + ... + a_n p_n \in V^*$$

arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{x_\varrho}(p) &= p(x_\varrho) \\ &= a_1 p_1(x_\varrho) + a_2 p_2(x_\varrho) + ... + a_n p_n(x_\varrho) \\ &= a_1 r_1 + a_2 r_2 + ... + a_n r_n \\ &= a_1 \varrho(p_1) + a_2 \varrho(p_2) + ... + a_n \varrho(p_n) \\ &= \varrho(p) \end{aligned}$$

que es a lo que se quería llegar. Por lo tanto, η_V es un $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$-morfismo suprayectivo.
Finalmente, la aplicación

$$\eta_V^{-1} : \begin{array}{ccc} V^{**} & \rightarrow & V \\ \varrho & \mapsto & x_\varrho \end{array}$$

también es lineal, porque, en conformidad con lo que se acaba de demostrar, la imagen bajo η_V del vector $x_{\varrho+\psi}$ es

$$\eta_V(x_{\varrho+\psi}) = \varrho + \psi;$$

pero, por la linealidad de η_V

$$\eta_V(x_\varrho + x_\psi) = \eta_V(x_\varrho) + \eta_V(x_\psi) = \varrho + \psi;$$

y puesto que η_V es inyectivo, resulta que

$$x_{\varrho+\psi} = x_\varrho + x_\psi$$

es decir

$$\eta_V^{-1}(\varrho+\psi)=\eta_V^{-1}(\varrho)+\eta_V^{-1}(\psi)$$

Recurriendo nuevamente a la linealidad de η_V se tiene, cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\eta_V(\alpha x_\varrho)=\alpha\eta_V(x_\varrho)=\alpha\varrho;$$

pero

$$\alpha\varrho=\eta_V(x_{\alpha\varrho});$$

debido a la inyectividad de η_V se tiene

$$x_{\alpha\varrho}=\alpha x_\varrho$$

es decir

$$\eta_V^{-1}(\alpha\varrho)=\alpha\eta_V^{-1}(\varrho)$$

Toca el turno de confirmar que mediante η_V se tiene definido a un isomorfismo natural. Para ello considérese al **funtor dualidad**

$$D:\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}\longrightarrow\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{op}}$$

definido, para todo $V\in\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$, por

$$DV=V^* \quad [3]$$

y para toda aplicación lineal $g:V\to W$,

$$Dg=g^*:W^*\to V^*$$

es la aplicación lineal que asocia a toda forma lineal $p\in W^*$ la forma lineal $pg\in V^*$. Hay que asegurarse de que D satisface las condiciones exigidas por la definición de funtor.

[a] Sean

$$U\xrightarrow{f}V\xrightarrow{g}W$$

aplicaciones lineales arbitrarias. Entonces

$$(gf)^*:W^*\to U^*$$

es tal que para cualquier $p\in W^*$

$$(gf)^*(p)=p(gf)=(pg)f=f^*(pg)=f^*g^*(p)=(Dg\circ^{\mathrm{op}}Df)(p)$$

Por lo tanto, D preserva composiciones.

[b] Por otra parte, para la aplicación lineal 1_V del espacio V se tiene

$$D1_V=1_V^*:\begin{array}{ccc}V^* & \longrightarrow & V^*\\ p & \mapsto & p1_V=p\end{array}$$

de modo que

$$1_V^*=1_{V^*}$$

Por lo tanto, D preserva identidades.

Para seguir adelante recuérdese que al funtor dual de un funtor dado lo definen las mismas reglas que definen al dado. En consecuencia, bajo la composición

$$\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}\xrightarrow{D}\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{op}}\xrightarrow{D^{\mathrm{op}}}(\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}=\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$$

la imagen de cualquier espacio vectorial V es

$$D^{\mathrm{op}}DV=D^{\mathrm{op}}V^*=(V^*)^*=V^{**}$$

[3] He aqu el por qu del nombre asignado al espacio vectorial V^*: se llama *espacio dual* porque viene dado por el funtor que va de $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$ en la categora dual $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{op}}$.

y la imagen de cualquier aplicación lineal $g : V \to W$ es

$$D^{\mathrm{op}} Dg = D^{\mathrm{op}} g^* = (g^*)^* = g^{**} : V^{**} \longrightarrow W^{**}$$

Los $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$-isomorfismos η_V de V en V^{**} definen un isomorfismo natural entre el funtor identidad $1_{\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}}$ y el funtor $D^{\mathrm{op}} D$. Para demostrarlo basta probar que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \overset{\eta_V}{\longrightarrow} & V^{**} \\ g \downarrow & & \downarrow g^{**} \\ W & \underset{\eta_W}{\longrightarrow} & W^{**} \end{array}$$

Sea $x \in V$; uno de los caminos conduce a la forma lineal

$$g^{**} \eta_V (x) = g^{**} (\widehat{x}) = \widehat{x} g^* \in W^{**}$$

Si se aplica esta forma a un elemento $p : W \longrightarrow (\mathbb{R}, (+, \cdot))$ de su dominio, se obtiene

$$\widehat{x} g^* (p) = \widehat{x} (pg) = pg (x)$$

Ahora recórrase el otro camino; se tiene

$$\eta_W g (x) = \widehat{g (x)}$$

lo cual, aplicado a p da

$$\widehat{g (x)} (p) = p (g (x))$$

que es a lo que se quería llegar. Por lo tanto,

$$\eta : 1_{\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}} \longrightarrow D^{\mathrm{op}} D$$

es natural.$_{[\checkmark]}$

Ejemplo 9.5 *Para este ejemplo considérese a la categoría* $\mathfrak{Mon}$ *y, desde ella, al funtor que olvida*

$$U : \mathfrak{Mon} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

y al hom-funtor en el monoide aditivo $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, (+, 0))$ *de números naturales*

$$H_{\mathfrak{N}} : \mathfrak{Mon} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

Sea $A = (X, (\cdot, e))$ *cualquier otro monoide; defínase*

$$\begin{array}{rccc} \tau_A : & \mathfrak{Mon} (\mathfrak{N}, A) & \longrightarrow & X \\ & f & \mapsto & f (1) \end{array}$$

Entonces, para cualquier otro monoide $B = (Y, (\circ, \mathsf{e}))$ *y para cualquier homomorfismo* $h : A \to B$ *conmuta el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Mon} (\mathfrak{N}, A) & \overset{\tau_A}{\longrightarrow} & X \\ H_{\mathfrak{N}} h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathfrak{Mon} (\mathfrak{N}, B) & \underset{\tau_B}{\longrightarrow} & Y \end{array} \quad [4]$$

En efecto, para cualquier $f \in \mathfrak{Mon} (\mathfrak{N}, A)$*, uno de los caminos lleva a*

$$h \tau_A (f) = h (f (1)) = (hf) (1)$$

[4] No debiera quedar sin mencionar el abuso de notacin aqu cometido por denotar con la misma letra h al homomorfismo entre los monoides A y B y a la funcin entre los conjuntos subyacentes X, Y. Si hubiese que ser demasiado estrictos habra que recurrir a la notacin formal para morfismos en una categora concreta, convenida en la definicin [REFERENCIA]<u>K</u>.0.5, y denotar, en este caso, al homomorfismo entre A y B por $(h, ((\cdot, e), (\circ, \mathsf{e})))$. Aclarado esto, el abuso cometido ya no puede dar lugar a equvocos.

y también el otro camino:

$$\tau_B H_{\mathfrak{N}} h(f) = \tau_B (hf) = (hf)(1)$$

Por lo tanto, hay una transformación natural

$$\tau : H_{\mathfrak{N}} \longrightarrow U$$

Recuérdese, por otra parte, que $\mathfrak{N}$ es libre sobre $\{1\}$; esto quiere decir que para todo monoide $A = (X, (\cdot, e))$ y para toda función

$$f_0 = \{1\} \to X$$

existe un único homomorfismo f de $\mathfrak{N}$ en A que extiende a f_0. Desde luego, de $\{1\}$ en X pueden definirse tantas funciones como elementos distintos tenga X. Esto implica la existencia de una biyección entre los conjuntos $\mathfrak{Mon}(\mathfrak{N}, A)$ y X, para todo monoide A; y en efecto, precisamente cada función τ_A define una biyección entre estos conjuntos. Por lo tanto, como consecuencia del resultado de la proposición anterior, se tiene que

$$\tau : H_{\mathfrak{N}} \longrightarrow U$$

es un isomorfismo natural.$_{[\checkmark]}$

Ejemplo 9.6 *Ya se habrá advertido que la situación presentada en el ejemplo anterior no es exclusiva de $\mathfrak{Mon}$. En efecto, si en una categoría concreta $\underline{K}$, un $\underline{K}$-objeto D es libre sobre un solo generador, entonces el hom-funtor H_D correspondiente y U, el funtor que olvida, son naturalmente isomorfos. En tal caso, siendo d el generador libre de D, la transformación natural*

$$\tau : H_D \longrightarrow U$$

definida por

$$\tau_A (f) = f(d)$$

es un isomorfismo natural.$_{[\checkmark]}$

Esta situación en la que un hom-funtor resulta naturalmente isomorfo al funtor que olvida, es propia de aquellas categorías concretas con objetos libres en un solo generador; es decir, es válido el resultado recíproco al planteado en el ejemplo anterior.

Proposición 9.2 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Si el funtor que olvida*

$$U : \underline{K} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

es naturalmente isomorfo a un hom-funtor H_D, entonces el $\underline{K}$-objeto D es libre sobre un solo generador.

Demostración. Sea

$$\tau : H_D \longrightarrow U$$

un isomorfismo natural; entonces, para todo $\underline{K}$-objeto A, la función

$$\tau_A : H_D A \longrightarrow UA$$

es biyectiva. En consecuencia, para todo $a \in UA$ existe un único morfismo

$$f \in \underline{K}(D, A)$$

tal que

$$\tau_A (f) = a$$

Considérese, por otra parte, al morfismo identidad

$$1_D \in H_D D$$

y hágase

$$d = \tau_D(1_D)$$

Entonces

$$d \in UD$$

Se probará que D es libre sobre $\{d\}$.

En efecto, supóngase que para un $\underline{K}$-objeto A cualquiera se tiene definida una función

$$f_0 = \{d\} \to UA$$

Sea

$$a = f_0(d)$$

y sea

$$f \in \underline{K}(D, A)$$

el único $\underline{K}$-morfismo tal que

$$\tau_A(f) = a$$

Debido a la naturalidad de τ, se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \underline{K}(D,D) & \xrightarrow{\tau_D} & UD \\ H_D f \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow Uf \\ \underline{K}(D,A) & \xrightarrow[\tau_A]{} & UA \end{array}$$

Uno de los caminos en el diagrama lleva de $1_D \in \underline{K}(D,D)$ a

$$\tau_A H_D f(1_D) = \tau_A(f) = a$$

mientras que el otro camino conduce a

$$Uf\tau_D(1_D) = Uf(d) = f(d)$$

Puesto que el diagrama es conmutativo, se tiene

$$f(d) = a$$

Esto demuestra que el $\underline{K}$-morfismo f es extensión única de la función f_0. Por lo tanto, D es libre sobre $\{d\}$.$_{[\checkmark]}$

Este resultado y su recíproco constituyen un caso particular de una situación de más amplia caladura que será analizada a continuación.

Obsérvese que cuando en una categoría concreta $\underline{K}$ un punto d del conjunto subyacente de un $\underline{K}$-objeto D es un generador único en D, entonces, con relación al funtor que olvida

$$U : \underline{K} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

el punto d posee la propiedad de que para todo $\underline{K}$-objeto A y para todo punto $a \in UA$ existe un único $\underline{K}$-morfismo

$$f : D \longrightarrow A$$

tal que

$$Uf(d) = a$$

En la definición que sigue se dará un nombre a los puntos que, en general, son poseedores de esta propiedad.

Definición 9.6 *Sea $\mathfrak{R}$ una categoría arbitraria y supóngase que puede definirse un funtor*

$$F : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

Entonces, un ***punto universal del funtor*** *F es un elemento d del conjunto imagen FD, de algún $\mathfrak{R}$-objeto D bajo F, con la propiedad de que para todo $\mathfrak{R}$-objeto A y para todo punto $a \in FA$, existe un único $\mathfrak{R}$-morfismo*

$$f : D \longrightarrow A$$

tal que

$$Ff\,(d) = a$$

Ejercicio 9.4 *Sea $\mathfrak{R}$ una categoría cualquiera y sea*

$$H_D : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

un hom-funtor arbitrario. Probar que 1_D es un punto universal de H_D.

Pues bien, resulta que todo *funtor en* $\mathfrak{Set}$ (i.e. todo funtor de codominio $\mathfrak{Set}$) con al menos un punto universal, es naturalmente isomorfo a un hom-funtor, y recíprocamente. Para probar esto[5], se abordará el estudio de las transformaciones naturales de que son suceptibles los hom-funtores de cualquier categoría, lo cual llevará al establecimiento de un lema (por sí mismo importante) del que hay que valerse para probar que un isomorfismo natural entre un hom-funtor y un funtor en $\mathfrak{Set}$ implica la existencia de un punto universal del funtor en $\mathfrak{Set}$.

Para empezar obsérvese que siempre que desde una categoría $\mathfrak{R}$ arbitraria se tiene un funtor

$$F : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

es posible, cualquiera que sea un $\mathfrak{R}$-objeto D, definir transformaciones naturales del hom-funtor H_D en F.

En efecto, sea $d \in FD$ un punto arbitrario, y defínase, para todo $\mathfrak{R}$-objeto A, la función

$$\begin{array}{rccc} \tau_A^d : & H_D A & \longrightarrow & FA \\ & f & \longmapsto & Ff\,(d) \end{array}$$

Se verá que, cualquiera que sea $h \in \mathfrak{R}\,(A, B)$, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{R}\,(D, A) \arrow[r, "\tau_A^d"] \arrow[d, "H_D h"'] & FA \arrow[d, "Fh"] \\ \mathfrak{R}\,(D, B) \arrow[r, "\tau_B^d"'] & FB \end{tikzcd}$$

En efecto, si $f \in \mathfrak{R}\,(D, A)$, entonces, por un lado se tiene

$$(Fh)\,\tau_A^d\,(f) = Fh\,(Ff\,(d)) = F\,(hf\,(d))$$

y también por el otro lado:

$$\tau_B^d H_D h\,(f) = \tau_B^d\,(hf) = F\,(hf\,(d))$$

Por lo tanto, se tiene una transformación natural

$$\tau^d : H_D \longrightarrow F \qquad [\checkmark]$$

Ahora considérese a la familia de transformaciones naturales

$$\left(\tau^d\right)_{FD}$$

[5] ..., es decir, lo recíproco; porque lo enunciado ya es demostrable desde ahorita.
En términos de esta definición, el ejemplo 4 anterior viene a ser caso particular (cuando $\mathfrak{R}$ es concreta) de lo que sigue:
Prop. Si de una categoría $\mathfrak{R}$ arbitraria sale un funtor $F : \mathfrak{R} \to \mathfrak{Set}$ con un punto universal, entonces, para algún $\mathfrak{R}$-objeto D, resulta ser F naturalmente isomorfo al hom-funtor H_D.

y obsérvese que en ella se encuentran todas las posibles transformaciones naturales de H_D en F.

En efecto, si

$$\eta : H_D \longrightarrow F$$

es cualquier transformación natural, hágase

$$d = \eta_D (1_D)$$

Entonces

$$d \in FD$$

y si A es cualquier $\Re$-objeto y $f \in \Re(D, A)$ es cualquier morfismo, entonces debido a la naturalidad de η se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Re(D,D) & \xrightarrow{\eta_D} & FD \\ H_D f \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow Ff \\ \Re(D,A) & \xrightarrow[\eta_A]{} & FA \end{array}$$

cuyos caminos llevan de $1_D \in \Re(D, D)$, por un lado, a

$$Ff\eta_D (1_D) = Ff (d)$$

y, por el otro lado, a

$$\eta_A H_D f (1_D) = \eta_A (f)$$

Puesto que el diagrama es conmutativo, se tiene

$$\eta_A (f) = Ff (d)$$

lo cual significa que

$$\eta = \tau^d$$

También es de observar que, considerando al conjunto FD y a la familia $\left(\tau^d\right)_{FD}$, la correspondencia

$$d \mapsto \tau^d$$

es inyectiva, porque si d_1 y d_2 son distintos elementos de FD, entonces

$$\tau_D^{d_1} (1_D) = F1_D (d_1) = 1_{FD} (d_1) = d_1 \neq d_2 = 1_{FD} (d_2) = F1_D (d_2) = \tau_D^{d_2} (1_D)$$

lo cual implica que también τ^{d_1} y τ^{d_2} son elementos distintos de $\left(\tau^d\right)_{FD}$.

El resumen de estos resultados constituye el lema de que se habló antes.

Lema de Yoneda. Sea $\Re$ una categoría arbitraria y supóngase que se tiene un funtor

$$F : \Re \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

arbitrario. Entonces, cualquiera que sea $D \in \Re$, la aplicación

$$d \mapsto \tau^d$$

define una biyección del conjunto FD en el conjunto de transformaciones naturales de H_D en F.$_{[\checkmark]}$

Ejercicio 9.5 *Sea $\Re$ cualquier categoría y considere cualquier $\Re$-objeto C. Demuestre que para todo $\Re$-objeto D existe una biyección entre el conjunto de $\Re$-morfismos de C en D y el conjunto de transformaciones naturales de H_D en H_C.*

Ejercicio 9.6 *Demuestre que existen exactamente cuatro transformaciones naturales de Q_2 en Pot y exhíbalas todas. (*Sugerencia*: Aplique el resultado del ejercicio 2 y el lema de Yoneda.)*

El lema de Yoneda pone las condiciones para dar la demostración que pendiente.

Proposición 9.3 *Sea $\Re$ cualquier categoría desde la cual haya un funtor*

$$F : \Re \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

Entonces son equivalentes:

a) F tiene un punto universal.
b) F es naturalmente isomorfo a un hom-funtor.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $D \in \Re$ tal que $d \in FD$ es punto universal de F. Se asegura que la transformación

$$\tau^d : H_D \longrightarrow F$$

es un isomorfismo natural. Para probarlo basta demostrar que para todo $\Re$-objeto A la función

$$\tau_A^d : \Re(D, A) \longrightarrow FA$$

es biyectiva.

τ_A^d es inyectiva. En efecto, sean $f_1, f_2 \in \Re(D, A)$ dos morfismos con la misma imagen $a \in FA$ bajo τ_A^d. Debido a la universalidad del punto d se tiene que en $\Re(D, A)$ existe un único morfismo f tal que

$$Ff(d) = a$$

Luego, puesto que

$$a = \begin{cases} \tau_A^d(f_1) = Ff_1(d) \\ \tau_A^d(f_2) = Ff_2(d) \end{cases}$$

se tiene

$$f_1 = f = f_2$$

τ_A^d es suprayectiva pues, por la definición de punto universal, para todo $a \in FA$ existe un morfismo (único) $f \in \Re(D, A)$ tal que $Ff(d) = a$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supóngase que

$$\tau : H_D \longrightarrow F$$

es un isomorfismo natural. Por el lema de Yoneda se sabe que

$$\left(\tau^d\right)_{FD}$$

es el conjunto de transformaciones naturales de H_D en F. En consecuencia, existe $d \in FD$ tal que $\tau = \tau^d$. Se probará que d es un punto universal para F. Sean, A cualquier $\Re$-objeto y a cualquier elemento en FA; debido a la isomorfía de τ^d, la función

$$\tau_A^d : \Re(D, A) \longrightarrow FA$$

es biyectiva; por lo tanto, existe un único $f \in \Re(D, A)$ tal que

$$\tau_A^d(f) = Ff(d) = a$$

y esto es a lo que se quería llegar.$_{[\checkmark]}$

Ejercicio 9.7 *Piénsense dos copos*

$$\mathfrak{X} = (X, \leq) \quad y \quad \mathfrak{Y} = (Y, \preceq)$$

y tómense dos funciones monótonas

$$f_1, f_2 : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$$

cualesquiera. Demuéstrense:

a) De f_1 a f_2, cuanto más, existe una transformación natural.
b) De f_1 a f_2 existe una transformación natural si, y sólo si, para todo $x \in X$

$$f_1(x) \preceq f_2(x)$$

Descríbase a la categoría $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$.

Capítulo 10

Funtores Adjuntos

Supóngase que un funtor

$$F : \mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

tiene un punto universal $d \in FD$. Considérese el conjunto

$$1 = \{0\}$$

y defínase

$$\begin{array}{rccc} \ell : & 1 & \to & FD \\ & 0 & \mapsto & d \end{array}$$

Si $A \in \mathfrak{K}$ y

$$f : 1 \to FA$$

es cualquier función, entonces, debido a la universalidad de d, existe un único $\mathfrak{K}$-morfismo

$$f^* : D \to A$$

que hace conmutar al diagrama

$$\begin{array}{ccc} 1 & \stackrel{\ell}{\longrightarrow} & FD \\ f \searrow & & \swarrow Ff^* \\ & FA & \end{array}$$

Se hablará de la pareja (D, ℓ) como de una *flecha universal del funtor F desde el $\mathfrak{Set}$-objeto 1*, en conformidad con la definición que sigue.

Definición 10.1 *Sean $\mathfrak{K}$ y $\wp$ categorías arbitrarias, y sea $F : \mathfrak{K} \to \wp$ cualquier funtor entre ellas.*

a) Una **flecha del funtor F desde un $\wp$-objeto** M es toda pareja (A, f) en la que

$$A \in \mathfrak{K} \quad \text{y} \quad f \in \wp(M, FA)$$

Se hará referencia a esta flecha escribiendo

$$M \xrightarrow{f} FA$$

b) Una flecha de F, (D_M, ℓ_M), desde un $\wp$-objeto M es **universal** si para toda flecha de F desde M

$$M \xrightarrow{f} FA$$

existe un único $\mathfrak{K}$-morfismo

$$f^* : D_M \to A$$

que hace conmutar al diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \stackrel{\ell_M}{\longrightarrow} & FD_M \\ f \searrow & & \swarrow Ff^* \\ & FA & \end{array}$$

Ejemplo 10.1 *Si $\underline{K}$ es concreta y D_M es un $\underline{K}$-objeto libre sobre un conjunto M entonces, con relación al funtor que olvida*

$$U : \underline{K} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

la inclusión

$$\iota_M : M \hookrightarrow UD_M$$

es una flecha universal.

En efecto, para cualquier $\underline{K}$-objeto $A = (X, \xi)$, cualquier función $f : M \to X$ puede pensarse como una flecha del funtor U desde el $\mathfrak{Set}$-objeto M. Por la libertad de D_M sobre M, existe un único $\underline{K}$-morfismo

$$f^* : D_M \to A$$

que es extensión de f, y esto es precisamente lo que significa la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \overset{\iota_M}{\hookrightarrow} & UD_M \\ f \searrow & & \swarrow Uf^* \\ & UA & \end{array}$$

[✓]

Según puede verse, esta noción de flecha universal da la pauta para que la idea de objeto libre (definida sólo para categorías concretas) pueda ser pensada para categorías arbitrarias.

Como quedó convenido, cuando un $\underline{K}$-objeto D es libre sobre un conjunto M, se dice que M genera a D. Al convenir esto se hizo uso de un lema que puede reescribirse como sigue:

Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta, (X, ξ) un $\underline{K}$-objeto libre sobre un conjunto M y considérese la inclusión

$$\iota : M \hookrightarrow X$$

Si dos $\underline{K}$-morfismos cualesquiera

$$h, k : (X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$$

son tales que

$$Uh \circ \iota = Uk \circ \iota$$

entonces $h = k$.

Este lema concentra la idea de lo que se quiere expresar cuando se dice que M genera a D. En igual sentido, pero de un modo más general, se puede decir que una flecha universal (D_M, ℓ_M) de un funtor F *genera a* D_M.

Lema 10.1 *Sea $F : \mathfrak{R} \longrightarrow \wp$ un funtor cualquiera entre categorías cualesquiera y sea*

$$M \xrightarrow{\ell_M} FD_M \qquad (M \in \wp)$$

una flecha universal de F. Si dos $\mathfrak{R}$-morfismos

$$h, k : D_M \longrightarrow A$$

son tales que

$$Fh \circ \ell_M = Fk \circ \ell_M$$

entonces $h = k$.

Demostración. Haciendo $f = Fh \circ \ell_M$ se tienen para la flecha

$$M \xrightarrow{f} FA$$

los diagramas

$$\begin{array}{ccc} M & \overset{\ell_M}{\longrightarrow} & FD_M \\ f \searrow & \circlearrowleft & \swarrow Fh \\ & FA & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M & \overset{\ell_M}{\longrightarrow} & FD_M \\ f \searrow & \circlearrowleft & \swarrow Fk \\ & FA & \end{array}$$

de los cuales se infiere, debido a la universalidad de la flecha (D_M, ℓ_M), que $h = k$.[✓]

La lectura que puede hacerse de este resultado es que los $\Re$-morfismos de dominio D_M están determinados por la flecha universal (D_M, ℓ_M). Esta lectura hace sospechar que toda flecha universal es única, salvo isomorfismo. Y en efecto, tiene lugar un resultado que generaliza a la proposición correspondiente.

Proposición 10.1 *Sea $F : \Re \to \wp$ un funtor cualquiera entre categorías cualesquiera.*

(1) Si (D_M, ℓ_M) y $(D_{M'}, \ell_{M'})$ son flechas universales del funtor F y los $\wp$-objetos M y M' son $\wp$-isomorfos, entonces los $\Re$-objetos D_M y $D_{M'}$ son $\Re$-isomorfos.

(2) Si (D_M, ℓ_M) es una flecha universal de F y $D \in \Re$ es $\Re$-isomorfo a D_M, entonces existe un $\wp$-objeto M' $\wp$-isomorfo a M y un $\wp$-morfismo

$$\ell : M' \longrightarrow FD$$

que es una flecha universal de F.

Demostración. (1) Sea $f_0 : M \to M'$ un $\wp$-isomorfismo. Entonces, para las flechas

$$M \xrightarrow{\ell_{M'} f_0} FD_{M'} \qquad \text{y} \qquad M' \xrightarrow{\ell_M f_0^{-1}} FD_M$$

existen sendos $\Re$-morfismos únicos

$$f : D_M \to D_{M'} \qquad \text{y} \qquad f' : D_{M'} \to D_M$$

tales que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\ell_M"] \arrow[dr, "\ell_{M'} f_0"'] & \circlearrowleft & FD_M \arrow[dl, "Ff"] \\ & FD_{M'} & \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} M' \arrow[rr, "\ell_{M'}"] \arrow[dr, "\ell_M f_0^{-1}"'] & \circlearrowleft & FD_{M'} \arrow[dl, "Ff'"] \\ & FD_M & \end{tikzcd}$$

Para mostrar que f y f' son mutuamente inversos se recurrirá al lema anterior considerando la composición $F(f'f) \circ \ell_M$; se tiene:

$$F(f'f) \circ \ell_M = Ff'(Ff \circ \ell_M) = Ff'(\ell_{M'} f_0) = (Ff' \circ \ell_{M'}) f_0 = \left(\ell_M f_0^{-1}\right) f_0 = \ell_M$$

Por el lema, esto implica que $f'f = 1_{D_M}$. Análogamente, $ff' = 1_{D_{M'}}$. Por lo tanto, $f' = f^{-1}$ y f es un $\Re$-isomorfismo.

(2) Sea $g : D_M \to D$ un $\Re$-isomorfismo y considérese la flecha

$$M \xrightarrow{Fg \circ \ell_M} FD$$

Se probará que se trata de una flecha universal. Sea $A \in \Re$ y sea

$$M \xrightarrow{f} FA$$

una flecha arbitraria desde M; por la universalidad de (D_M, ℓ_M) existe un único $\Re$-morfismo

$$f^* : D_M \longrightarrow A$$

tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\ell_M"] \arrow[dr, "f"'] & \circlearrowleft & FD_M \arrow[dl, "Ff^*"] \\ & FA & \end{tikzcd}$$

Considérese el $\Re$-morfismo

$$f^* g^{-1} : D \longrightarrow A$$

Se tiene:

$$F\left(f^* g^{-1}\right)(Fg \circ \ell_M) = Ff^*\left(Fg^{-1} Fg\right)\ell_M = Ff^*\left(1_{FD_M}\right)\ell_M = Ff^* \circ \ell_M = f$$

lo cual significa que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{Fg \circ \ell_M} & FD \\ f \searrow & & \swarrow F\left(f^* g^{-1}\right) \\ & FA & \end{array}$$

Además, si hubiera otro $\Re$-morfismo $h : D \to A$ tal que $Fh\left(Fg \circ \ell_M\right) = f$, entonces

$$hg : D_M \longrightarrow A$$

sería tal que

$$F\left(hg\right) \circ \ell_M = f$$

y por la unicidad de f^* se tendría

$$hg = f^*$$

de donde

$$h = f^* g^{-1}$$

Por lo tanto, $f^* g^{-1}$ es único. En consecuencia, haciendo $M' = M$ y $\ell = Fg \circ \ell_M$ se tiene que (D, ℓ) es una flecha universal.$_{[\checkmark]}$

También se convino en decir que una categoría concreta $\underline{K}$ *tiene objetos libres* cuando los tiene sobre conjuntos de toda cardinalidad. Lo análogo ahora sería decir que un funtor *tiene flechas universales* cuando desde todo objeto de su codominio se puede definir una flecha universal suya, pero se ha preferido asignar un nombre especial para los funtores con esta característica.

Definición 10.2 *Sea $F : \Re \to \wp$ un funtor cualquiera entre categorías cualesquiera. Se dice que F es un **funtor adjunto** (también **adjunto derecho**) si desde todo $\wp$-objeto M existe una flecha universal de F.*

Ejercicio 10.1 *Suponga que*

$$\Im \xrightarrow{F} \Re \qquad y \qquad \Re \xrightarrow{F} \wp$$

son funtores adjuntos. Probar que el funtor compuesto GF también es un adjunto.

Como primer ejemplo de esta situación se tiene, por supuesto, que si $\underline{K}$ es una categoría concreta con objetos libres, entonces el funtor que olvida

$$U : \underline{K} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

es un adjunto, ya que si M es un $\mathfrak{Set}$-objeto cualquiera y $D_M \in \underline{K}$ es libre sobre M, entonces la inclusión

$$\iota : M \hookrightarrow D_M$$

es una flecha universal de U según se ha visto anteriormente.

Qué será de lo recíproco: ¿Si el funtor que olvida

$$U : \underline{K} \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

es un funtor adjunto, entonces la categoría concreta $\underline{K}$ tiene objetos libres?

Para responder piénsese en la concreción $\overline{\mathfrak{Set}}$ de $\mathfrak{Set}$, vista en [REFERENCIA]$\underline{K}$.1.9.1, y considérese la subcategoría $\overline{\mathfrak{Set}}_0$ de $\overline{\mathfrak{Set}}$ cuya clase de objetos es

$$\left|\overline{\mathfrak{Set}}_0\right| = \left\{(X, X) \in \overline{\mathfrak{Set}} : \sharp\,(X) \leq 1\right\}$$

y cuyos conjuntos de morfismos son de la forma

$$\overline{\mathfrak{Set}}_0\left((X, X), (Y, Y)\right) = \left\{(f, (X, Y)) : f \in \mathfrak{Set}\,(X, Y)\right\}$$

cualesquiera que sean $(X, X), (Y, Y) \in \overline{\mathfrak{Set}}_0$.

$\overline{\mathfrak{Set}}_0$ es una categoría concreta porque es subcategoría de una concreción de $\mathfrak{Set}$. Aplíquesele el funtor que olvida

$$U : \overline{\mathfrak{Set}}_0 \longrightarrow \mathfrak{Set}$$

y considérese cualquier $\mathfrak{Set}$-objeto M. Hay dos casos por analizar:

1º Cuando $M \neq \emptyset$; entonces la constante desde M sobre cualquier singulete $\{x\} = U(\{x\}, \{x\})$

$$M \xrightarrow{\ell} \{x\}$$

es una flecha universal de U, ya que para cualquier otra flecha

$$M \xrightarrow{f} \{y\}$$

la única función f^* desde $\{x\}$ hacia $\{y\}$ da lugar al $\overline{\mathfrak{Set}}_0$-morfismo $(f^*, (\{x\}, \{y\}))$ tal que

$$\begin{array}{ccc} M & \overset{\ell}{\longrightarrow} & \{x\} \\ f\searrow & \circlearrowleft & \swarrow f^* \\ & \{y\} & \end{array}$$

2º Cuando $M = \emptyset$. Entonces la flecha vacía desde M sobre el conjunto vacío

$$\{\ \} = U(\{\ \}, \{\ \})$$

es flecha universal de U, ya que para cualquier otro $\overline{\mathfrak{Set}}_0$-objeto (X, X) sólo hay una flecha

$$M \xrightarrow{f} X$$

la flecha vacía. Pero entonces también es vacío el $\overline{\mathfrak{Set}}_0$-morfismo $(f^*, (\{\ \}, X))$, que es el único que puede dar conmutatividad al diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \overset{\phi}{\longrightarrow} & \{\ \} \\ f\searrow & & \swarrow f^* \\ & X & \end{array}$$

Esto prueba que U es un funtor adjunto. Sin embargo, $\overline{\mathfrak{Set}}_0$ no tiene objetos libres sobre conjuntos de cardinalidad mayor que 1 ya que la cardinalidad de los conjuntos subyacentes de sus objetos es 1 cuando más.$_{[\checkmark]}$

A resultas del ejemplo anterior se perfila como condición necesaria que los cojuntos subyacentes de los $\underline{K}$-objetos tengan cardinalidad tan grande como se quiera, para garantizar que $\underline{K}$ tiene objetos libres cuando su funtor que olvida es un adjunto. Esta condición aunada a la transportabilidad de $\underline{K}$ resulta suficiente para dar esa garantía.

Proposición 10.2 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta cuyo funtor que olvida es un adjunto. Si $\underline{K}$ es transportable y los conjuntos subyacentes de sus $\underline{K}$-objetos son de cardinalidad tan grande como se quiera, entonces $\underline{K}$ tiene objetos libres.*

Demostración. Sea M un conjunto arbitrario y sea

$$M \overset{\ell_M}{\to} UD_M$$

una flecha universal desde M del funtor que olvida. De acuerdo con las hipótesis, debe existir un $\underline{K}$-objeto $A = (X, \xi)$ tal que

$$\#(M) \leq \#(X)$$

En consecuencia, es posible definir una función inyectiva $f : M \to X$. Debido a la universalidad de (D_M, ℓ_M), para la flecha

$$M \overset{f}{\to} UA$$

existe un único $\underline{K}$-morfismo $f^* : D_M \to A$ tal que $Uf^* \circ \ell_M = f$; por la inyectividad de f se tiene que también ℓ_M es inyectiva. Sea

$$Y = M \cup (UD_M - \ell_M(M))$$

y sea

$$\iota^* : UD_M \to Y$$

definida por

$$\iota^*(d) = \begin{cases} d, \text{ si } d \notin \ell_M(M) \\ \ell_M^{-1}(d), \text{ si } d \in \ell_M(M) \end{cases} \quad {}^{1}$$

Entonces ι^* es biyectiva, como fácilmente se comprueba. Por la transportabilidad de $\underline{K}$, existe $\eta \in \underline{K}[Y]$ tal que

$$\iota^* : D_M \to (Y, \eta) \quad {}^{2}$$

es un $\underline{K}$-isomorfismo. Obsérvese además que, con relación a la flecha

$$\iota : M \hookrightarrow Y$$

ι^* es tal que

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ell_M} & UD_M \\ \iota \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \iota^* \\ & Y & \end{array}$$

Por lo tanto, el $\underline{K}$-morfismo ι^* es único. Se asegura que (Y, η) es libre sobre M.

En efecto, si $(Z, \zeta) \in \underline{K}$ y $g_0 : M \to Z$ es cualquier función entonces, debido a la universalidad de (D_M, ℓ_M), existe un único $\underline{K}$-morfismo

$$g_0^* : D_M \to (Z, \zeta)$$

tal que $g_0^* \ell_M = g_0$.[3] En consecuencia se tiene que el $\underline{K}$-morfismo

$$g_0^* (\iota^*)^{-1} : (Y, \eta) \to (Z, \zeta)$$

es tal que para toda $m \in M$

$$g_0^* (\iota^*)^{-1}(m) = g_0^* \ell_M(m) = g_0(m)$$

es decir, $g_0^* (\iota^*)^{-1}$ es una extensión de g_0. Y si

$$h \in \underline{K}((Y, \eta), (Z, \zeta))$$

también extiende a g_0, entonces el $\underline{K}$-morfismo

$$h\iota^* \in \underline{K}(D_M, (Z, \zeta))$$

es tal que para toda $m \in M$

$$(h\iota^*) \ell_M(m) = h(\iota^* \ell_M)(m) = h(\iota(m)) = h(m) = g_0(m)$$

y como g_0^* es el único $\underline{K}$-morfismo con esta propiedad se tiene que $h\iota^* = g_0^*$, de donde

$$h = g_0^* (\iota^*)^{-1}$$

lo que demuestra que esta extensión de g_0 es única. Por lo tanto, (Y, η) es libre sobre M. Por lo tanto, $\underline{K}$ tiene objetos libres. $_{[\checkmark]}$

Se verán dos ejemplos más de funtores adjuntos antes de pasar a otra cosa.

---

[1] Se entiende que al escribir ℓ_M^{-1} se hace referencia a la funcin inversa de la restriccin $\ell_M \mid^{\ell_M(M)}$, que es biyectiva.

[2] Que valga el abuso de notacin que se est cometiendo al denotar a la funcin y al $\underline{K}$-morfismo con el mismo smbolo ι^*.

[3] Idem con g_0^*.

1. Todo hom-funtor de dominio $\mathfrak{Set}$

$$H_D : \mathfrak{Set} \to \mathfrak{Set}$$

es un funtor adjunto.

En efecto, dado cualquier conjunto M hágase

$$D_M = M \times D$$

y defínase

$$\ell_M : M \to \mathfrak{Set}\,(D, M \times D)$$

como sigue: Para cada $m \in M$, $\ell_M\,(m)$ es la función

$$\begin{array}{rccc} \ell_M\,(m) : & D & \to & M \times D \\ & d & \mapsto & (m, d) \end{array}$$

Se probará que (D_M, ℓ_M) es una flecha universal de H_D. Sea A cualquier otro conjunto y sea

$$f : M \to \mathfrak{Set}\,(D, A)$$

una flecha arbitraria. Defínase

$$f^* : D_M \to A$$

mediante

$$f^*\,(m, d) = [f\,(m)]\,(d) \ \ , \forall\,(m, d) \in D_M$$

Se asegura que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \overset{\ell_M}{\longrightarrow} & \mathfrak{Set}\,(D, M \times D) \\ f \searrow & & \swarrow H_D f^* \\ & \mathfrak{Set}\,(D, A) & \end{array}$$

es conmutativo. En efecto, para toda $m \in M$, la función

$$[H_D f^* \circ \ell_M]\,(m) : D \to A$$

es tal que para toda $d \in D$

$$\begin{aligned} [H_D f^* \circ \ell_M]\,(m)\,(d) &= [H_D f^*\,(\ell_M\,(m))]\,(d) \\ &= [f^* \ell_M\,(m)]\,(d) \\ &= f^*\,([\ell_M\,(m)]\,(d)) \\ &= f^*\,(m, d) \\ &= [f\,(m)]\,(d) \end{aligned}$$

es decir, coincide con la función

$$f\,(m) : D \to A$$

lo cual es prueba de que el diagrama efectivamente conmuta. Finalmente, si

$$g : D_M \to A$$

es tal que

$$H_D g \circ \ell_M = f$$

entonces, para toda $m \in M$ se tiene que

$$[H_D g \circ \ell_M]\,(m) : D \to A$$

es la función que para toda $d \in D$

$$\begin{aligned}
\left[H_D g \circ \ell_M\right](m)(d) &= \left[H_D g\left(\ell_M(m)\right)\right](d) \\
&= \left[g \ell_M(m)\right](d) \\
&= g\left(\left[\ell_M(m)\right](d)\right) \\
&= g(m, d)
\end{aligned}$$

y en consecuencia la función g viene dada por

$$g(m, d) = [f(m)](d)$$

y coincide con f^*. Esto prueba que f^* es el único morfismo que hace conmutar al diagrama anterior. Por lo tanto, H_D es un adjunto.$_{[\checkmark]}$

Antes de mostrar un ejemplo más de funtor adjunto, se hablará de la *antisimetrización de un conjunto preordenado.*

Sea $A = (X, \leq)$ un copro arbitrario y considérese la relación

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \text{ y } x_2 \leq x_1$$

que es una relación de equivalencia en X, como se comprueba fácilmente. Sea $X \;/ \sim$ el conjunto de clases de equivalencia

$$[x] = \{t \in X : t \sim x\}$$

y defínase, para cualesquiera $[x_1], [x_2] \in X \;/ \sim$,

$$[x_1] \leqq [x_2] \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$$

Se verá que esta definición no depende de la elección de los representantes en las clases. En efecto, si

$$s \in [x_1] \quad \text{y} \quad t \in [x_2]$$

entonces

$$s \leq x_1 \;,\; x_1 \leq s \quad y \quad t \leq x_2 \;,\; x_2 \leq t$$

Si además se tiene $x_1 \leq x_2$, entonces

$$s \leq x_1 \leq x_2 \leq t$$

de lo cual, debido a la transitividad del preorden $\leq$, se sigue que también $s \leq t$.

Es claro que la relación $\leqq$ es reflexiva y transitiva. También es antisimétrica.

En efecto, si $[x_1], [x_2] \in X \;/ \sim$ son tales que

$$[x_1] \leqq [x_2] \quad \text{y} \quad [x_2] \leqq [x_1]$$

entonces se tiene

$$x_1 \leq x_2 \quad \text{y} \quad x_2 \leq x_1$$

es decir

$$x_1 \sim x_2$$

y por lo tanto

$$[x_1] = [x_2]$$

Al copo $A^* = (X/ \sim, \leqq)$ se lo llama **antisimetrización de** A.

Ejercicio 10.2 *Encuentre la antisimetrización del preorden que es toda relación de equivalencia.*

Definición 10.3 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sea $\underline{H}$ una subcategoría de $\underline{K}$. Entonces*

$$\mathcal{V} : \underline{H} \to \underline{K}$$

definido mediante

$$\mathcal{V}A = A \quad y \quad \mathcal{V}f = f$$

para todo $\underline{H}$-objeto A y para todo $\underline{H}$-morfismo f, es el ***funtor inclusión.***

Se omite la rutina de verificar que $\mathcal{V}$ preserva composiciones e identidades.

Ejemplo 10.2 *El funtor inclusión*

$$\mathcal{V} : \mathfrak{Pos} \to \mathfrak{Pros}$$

es un adjunto.

En efecto, para todo copro $M = (X, \leq)$ considérese su antisimetrización $M^* = (X/\sim, \leqq)$ y la aplicación canónica

$$\begin{array}{rccc} \varphi_M : & M & \to & M^* \\ & m & \mapsto & [m] \end{array}$$

Puesto que M^* es un copo, se tiene que $\mathcal{V}M^* = M^*$ y, por consiguiente, (M^*, φ_M) es una flecha de $\mathcal{V}$ desde M. Se probará que es universal.

En efecto, si $A = (Y, \preceq)$ es un copo y

$$M \xrightarrow{f} \mathcal{V}A$$

es una flecha (i.e. una aplicación monótona) se define, para toda $[m] \in M^*$,

$$\begin{array}{rccc} f^* : & M^* & \to & A \\ & [m] & \mapsto & f(m) \end{array}$$

Se verá que f^* está bien definida: Si $m' \in [m]$, entonces

$$m' \leq m \quad \text{y} \quad m \leq m'$$

Como f es monótona, se tiene

$$f(m') \preceq f(m) \quad \text{y} \quad f(m) \preceq f(m')$$

y por la antisimetría de $\preceq$, resulta

$$f(m') = f(m)$$

lo que significa que, efectivamente, f^* está bien definida. Además f^* es monótona pues, por la monotonía de f, se tiene que

$$[m] \leqq [n] \Rightarrow m \leq n \Rightarrow f(m) \preceq f(n) \Rightarrow f^*([m]) \preceq f^*([n])$$

Por otra parte, para toda $m \in M$ se tiene

$$f^*\varphi_M(m) = f^*([m]) = f(m)$$

lo cual significa que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi_M"] \arrow[dr, "f"'] & & M^* \arrow[dl, "f^*"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Si hubiese otra función monótona

$$h : M^* \to A$$

tal que

$$h\varphi_M(m) = h[m] = f(m)$$

lo que significa que $h = f^*$. Por lo tanto, (M^*, φ_M) es una flecha universal de $\mathcal{V}$, como se quería demostrar. [✓]

Definición 10.4 *Sean* $\Re \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \wp$ *funtores cualesquiera entre categorías cualesquiera. Se dice que G es un* ***funtor coadjunto*** *(también* ***adjunto izquierdo****) del funtor F si existe una transformación natural*

$$\lambda : 1_\wp \to FG$$

tal que para todo $\wp$-objeto M el $\wp$-morfismo

$$\lambda_M : M \to FGM$$

es una flecha universal del funtor F.

Observación 10.1 *De acuerdo con esta definición, cuando un funtor F tiene un coadjunto, desde todo $\wp$-objeto M existen flechas universales de F y, por consiguiente, F es un adjunto.*

El nombre de *funtor coadjunto* deriva, por de pronto, en un equívoco, porque hace pensar en que se trata del coconcepto correspondiente al de *funtor adjunto*, pero no es así. Obsérvese que de un funtor adjunto se habla a secas (sin requerir refererencia a ningún otro funtor), en tanto que aquí se está definiendo al *coadjunto de* otro funtor (cuyo concepto dual será el *adjunto de* otro funtor). Para tratar de comprender el por qué haber denominado así a este concepto se verá, primero, que todo funtor adjunto (a secas) tiene un coadjunto, y después, que el funtor F del cual es coadjunto G es, a su vez, *adjunto de* G. Adviértase que esto trae consigo la consecuencia de que todo funtor adjunto es un *adjunto de* otro funtor, y en este sentido viene a ser dual de su funtor coadjunto. Pero entonces, ya se ve, no es que sean duales *funtor adjunto* (a secas) y *funtor coadjunto de...* sino que el coconcepto correspondiente a este último siempre es satisfecho por todo funtor adjunto. Cabe preguntarse entonces: ¿Cuál es el coconcepto correspondiente al de funtor adjunto (a secas)? Quede pendiente, de momento, esta cuestión; será retomada después de desarrollar en detalle los resultadoes e ideas de que hasta ahorita se ha hablado.

Se empezará haciendo ver que, efectivamente, todo funtor adjunto tiene un coadjunto.

Siendo $F : \Re \to \wp$ un funtor adjunto, para todo $\wp$-objeto M puede escogerse una flecha universal

$$\ell_M : M \to FD_M$$

Esto permite establecer una correspondencia

$$G_* : |\wp| \to |\Re|$$

haciendo

$$G_* (M) = D_M$$

Por otra parte, para todo $\wp$-morfismo $p : M \to M'$ considérese la composición

$$M \xrightarrow{\ell_{M'} p} FD_{M'}$$

Debido a la universalidad de (D_M, ℓ_M), existe un único $\Re$-morfismo

$$\kappa_p : D_M \to D_{M'}$$

tal que

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ell_M} & FD_M \\ \ell_{M'} p \searrow & \circlearrowleft & \swarrow F\kappa_p \\ & FD_{M'} & \end{array}$$

En consecuencia, también se puede establecer la correspondencia

$$G_{(M,M')} : \wp (M, M') \to \Re (D_M, D_{M'})$$

mediante

$$G_{(M,M')} (p) = \kappa_p$$

cualesquiera que sean los $\wp$-objetos M y M'. Se verá que esto define a un funtor

$$G : \wp \to \Re$$

[a] G preserva composiciones.

En efecto, sean

$$p : M \to M' \quad \text{y} \quad q : M' \to M''$$

dos $\wp$-morfismos cualesquiera. Debido a la universalidad de (D_M, ℓ_M), para la flecha

$$M \xrightarrow{\ell_{M''} qp} FD_{M''}$$

existe un único $\Re$-morfismo

$$\kappa_{qp} : D_M \to D_{M''}$$

tal que

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ell_M} & FD_M \\ \ell_{M''}qp \searrow & \circlearrowleft & \swarrow F\kappa_{qp} \\ & FD_{M''} & \end{array}$$

y es precisamente $G(qp) = \kappa_{qp}$. Del mismo modo se tienen los $\Re$-morfismos

$$\kappa_p : D_M \to D_{M'} \quad \text{y} \quad \kappa_q : D_{M'} \to D_{M''}$$

tales que

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ell_M} & FD_M \\ \ell_{M'}p \searrow & \circlearrowleft & \swarrow F\kappa_p \\ & FD_{M'} & \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{\ell_{M'}} & FD_{M'} \\ \ell_{M''}q \searrow & \circlearrowleft & \swarrow F\kappa_q \\ & FD_{M''} & \end{array}$$

Se verá que el $\Re$-morfismo compuesto

$$\kappa_q\kappa_p : D_M \to D_{M''}$$

es tal que

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ell_M} & FD_M \\ \ell_{M''}qp \searrow & \circlearrowleft & \swarrow F(\kappa_q\kappa_p) \\ & FD_{M''} & \end{array}$$

En efecto, en conformidad con los diagramas anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} \ell_{M''}qp &= (\ell_{M''}q)\, p \\ &= (F\kappa_q\ell_{M'})\, p \\ &= F\kappa_q(\ell_{M'}p) \\ &= F\kappa_q F\kappa_p \ell_M \\ &= F(\kappa_q\kappa_p)\, \ell_M \end{aligned}$$

Puesto que κ_{qp} es el único morfismo que hace conmutar el triángulo anterior, hay que aceptar que

$$\kappa_{qp} = \kappa_q\kappa_p$$

o, lo que es lo mismo, que

$$G(qp) = GqGp$$

[b] G preserva identidades.

En efecto, al igual que antes, se tiene que

$$\kappa_{1_M} : D_M \to D_M$$

es el único $\Re$-morfismo para el cual

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ell_M} & FD_M \\ \ell_M 1_M \searrow & \circlearrowleft & \swarrow F\kappa_{1_M} \\ & FD_M & \end{array}$$

y es obvio que con 1_{D_M} el triángulo sigue conmutando; en consecuencia

$$G1_M = \kappa_{1_M} = 1_{D_M} = 1_{GM}$$

que es a lo que se quería llegar.

Finalmente, se probará que G satisface la definición anterior con respecto al funtor adjunto F. Considérense a los funtores

$$1_{\wp} : \wp \to \wp \quad \text{y} \quad FG : \wp \to \wp$$

Obsérvese que definiendo para todo $\wp$-objeto M al $\wp$-morfismo λ_M mediante la flecha universal

$$\lambda_M = \ell_M : M \to FD_M$$

se obtiene un morfismo

$$\lambda_M : 1_{\wp} M \to FGM$$

que, de acuerdo con la construcción de G, son tales que, para todo $\wp$-morfismo $p : M \to M'$, debe conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\lambda_{M'}} & (FG)\, M \\ p\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow (FG)\, p \\ M' & \xrightarrow[\lambda_{M'}]{} & (FG)\, M' \end{array}$$

En efecto, puesto que $GM = D_M$, $GM' = D_{M'}$ y $Gp = \kappa_p$, al componer $\lambda_{M'} p$ en una sola flecha, el cuadrado anterior se convierte en el triángulo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ell_M} & FD_M \\ \ell_{M'} p \searrow & \circlearrowleft & \swarrow F\kappa_p \\ & FD_{M'} & \end{array}$$

que, como se sabe, es conmutativo. Esto significa que se tiene una transformación natural

$$\lambda : 1_{\wp} \to FG$$

formada por flechas universales del funtor F. Por lo tanto, G es un funtor coadjunto del funtor F. [✓]

Ejercicio 10.3 *Sea $F : \Re \to \wp$ un funtor arbitrario entre categorías arbitrarias. Demuestre que:*

(a) Si

$$G : \wp \to \Re \quad \text{y} \quad G' : \wp \to \Re$$

son funtores coadjuntos de F, entonces existe un isomorfismo natural

$$\tau : G \to G'$$

(b) Si G es un coadjunto de F y existe un isomorfismo natural entre G y otro funtor $G' : \wp \to \Re$, entonces también G' es coadjunto de F.

Antes de seguir adelante, se aprovechará la construcción hecha del funtor coadjunto G de un funtor adjunto F para mostrar ejemplos de funtores coadjuntos.

Ejemplo 10.3 *Se sabe que si $\underline{K}$ es una categoría concreta con objetos libres, entonces el funtor que olvida $U : \underline{K} \to \mathfrak{Set}$ es un adjunto. En este caso,*

$$G : \mathfrak{Set} \to \underline{K}$$

es tal que para todo conjunto M

$$GM = D_M$$

es un $\underline{K}$-objeto libre sobre M, y para toda función $p : M \to M'$ entre conjuntos cualesquiera,

$$Gp : D_M \to D_{M'}$$

es el único $\underline{K}$-morfismo que extiende a la flecha compuesta

$$M \xrightarrow{p} M' \xhookrightarrow{\iota_{M'}} UD_{M'}$$

Aquí, las flechas universales de que está formada la transformación natural

$$\lambda : 1_{\mathfrak{Set}} \to UG$$

son las inclusiones

$$\lambda_M = \iota_M : M \to UD_M$$

Ejemplo 10.4 *También se sabe que todo hom-funtor $H_D : \mathfrak{Set} \to \mathfrak{Set}$ es un adjunto. Recuérdese que para todo conjunto M, una flecha universal (D_M, ℓ_M) de H_D viene dada por $D_M = M \times D$ y, para toda $m \in M$, por*

$$\begin{array}{rccc} \ell_M(m) : & D & \to & M \times D \\ & d & \mapsto & (m, d) \end{array}$$

Si A es cualquier conjunto y $f : M \to H_D A$ es cualquier función, entonces

$$\begin{array}{rccc} f^* : & M \times D & \to & A \\ & (m, d) & \mapsto & [f(m)](d) \end{array}$$

es el único $\mathfrak{Set}$-morfismo tal que

$$(H_D f^*) \ell_M = f$$

En consecuencia, el funtor coadjunto de H_D que surge de la construcción anterior (al cual se denotará como K_D) es tal que para todo conjunto M

$$K_D M = M \times D$$

y para toda función $p : M \to M'$, hay que considerar a la composición

$$\ell_{M'} p : M \to H_D(M' \times D)$$

para dar con el $\mathfrak{Set}$-morfismo

$$\begin{array}{rccc} (\ell_{M'} p)^* : & M \times D & \to & M' \times D \\ & (m, d) & \mapsto & [\ell_{M'} p(m)](d) \end{array}$$

que es el único con la propiedad de que $\left[H_D (\ell_{M'} p)^*\right] \ell_M = \ell_{M'} p$. Para ver qué morfismo es éste, hay que simplificar la imagen que bajo él tiene cualquier $(m, d) \in M \times D$. Puesto que $p(m)$ es un punto en M', de acuerdo con la regla de correspondencia de la flecha universal $(D_{M'}, \ell_{M'})$ se tiene que $\ell_{M'}(p(m))$ es la función

$$\begin{array}{rccc} \ell_{M'}(p(m)) : & D & \to & M' \times D \\ & d & \mapsto & (p(m), d) \end{array}$$

En consecuencia, puesto que $K_D p = (\ell_{M'} p)^*$, se tiene que $K_D p$ es la función

$$\begin{array}{rccc} K_D p : & M \times D & \to & M' \times D \\ & (m, d) & \mapsto & (p(m), d) \end{array}$$

es decir, $K_D p = p \times 1_D$. Aquí, para todo $M \in \mathfrak{Set}$, las flechas universales

$$\ell_M : M \to H_D K_D M$$

son las que conforman a la transformación natural

$$\lambda : 1_{\mathfrak{Set}} \to H_D K_D$$

Ejemplo 10.5 *Otro funtor desde el cual aplica la construcción del funtor coadjunto es el funtor inclusión*

$$\mathcal{V} : \mathfrak{Pos} \to \mathfrak{Pros}$$

Cualquiera que sea el copro $M = (X, \leq)$, una flecha universal de $\mathcal{V}$ desde M viene dada por la aplicación canónica φ_M de M en la antisimetrización de M, $M^* = (X/\sim, \leqq)$, que resulta identificando, cualesquiera que sean $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \text{ y } x_2 \leq x_1$$

y dando a $X/\sim$ la relación $\leqq$ dada por

$$[x_1] \leqq [x_2] \quad y \quad [x_2] \leqq [x_1]$$

que resulta un orden parcial. Recuérdese que si desde M en algún copo $\mathcal{V}A = A = (Y, \preceq)$ se tiene definida una función monótona f, entonces

$$\begin{array}{rccc} f^* : & M^* & \to & A \\ & [x] & \mapsto & f(x) \end{array}$$

es la única función monótona tal que

$$(\mathcal{V}f^*)\,\varphi_M = f$$

Por consiguiente, el funtor coadjunto de $\mathcal{V}$

$$\mathcal{A} : \mathfrak{Pros} \to \mathfrak{Pos}$$

está definido para todo copro M como

$$\mathcal{A}M = M^*$$

y por esto recibe el nombre de ***funtor antisimetrización****; si $f : M \to M'$ es monótona, entonces*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}f = (\varphi_{M'} f)^* : & M^* & \to & (M')^* \\ & [x] & \mapsto & \varphi_{M'} f(x) \end{array}$$

es decir, para toda $[x] \in M^*$, $\mathcal{A}f[x] = [f(x)]$. Las flechas universales de $\mathcal{V}$, (M^*, φ_M), conforman aquí una transformación natural

$$\varphi : 1_{\mathfrak{Pros}} \to \mathcal{V}\mathcal{A}$$

Ahora toca presentar formalmente al coconcepto correspondiente al de *funtor coadjunto de*.

Definición 10.5 *Sean $\Re$ y $\wp$ categorías arbitrarias y sea $F : \Re \to \wp$ cualquier funtor entre ellas.*

(a) Una **flecha del funtor F hacia un $\wp$-objeto** M es toda pareja (g, A) en la que

$$A \in \Re \quad \text{y} \quad g \in \wp(FA, M)$$

(b) Sea (μ_M, E_M) una flecha de F hacia un $\wp$-objeto M; se dice que (μ_M, E_M)es **couniversal** si para toda flecha de F hacia M

$$FA \xrightarrow{g} M$$

existe un único $\Re$-morfismo

$$g_* : A \to E_M$$

que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} M & & FE_M \arrow[ll, "\mu_M"'] \\ & FA \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "Fg_*"'] & \end{tikzcd}$$

(c) Se dice que un funtor $G : \wp \to \Re$ es un **adjunto de** F si existe una transformación natural

$$\mu : FG \to 1_\wp$$

tal que para todo $\wp$-objeto M, el $\wp$-morfismo

$$\mu_M : F(GM) \to M$$

es una flecha couniversal del funtor F.

Lo que sigue es demostrar que cuando G es un funtor coadjunto de un funtor F, a su vez F es un funtor adjunto de G. Por razones didácticas, se partirá de la hipótesis de que F es un funtor coadjunto del funtor G y se probará que G es funtor adjunto de F. La familiaridad adquirida con la noción de funtor *coadjunto de* permite intercambiar los papeles que en la definición de este concepto desempeñan F y G sin ocasionar con ello demasiadas confusiones.

Teorema 10.1 *Sean* $\wp \overset{G}{\underset{F}{\rightleftarrows}} \Re$ *funtores tales que* F *es un coadjunto de* G*. Entonces,* G *es un adjunto de* F*.*

Demostración. Siendo F un coadjunto de G, existe una transformación natural

$$\lambda : 1_{\Re} \to GF$$

tal que para todo $\Re$-objeto A, los $\Re$-morfismos

$$\lambda_A : A \to GFA$$

son flechas universales de G. Téngase presente que el que la flecha (FA, λ_A) sea universal para G significa que para cualquier otra flecha (M, f) de G desde A exista un único $\wp$-morfismo $f^* : FA \to M$ tal que

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\lambda_A}{\longrightarrow} & GFA \\ f \searrow & \circlearrowleft & \swarrow Gf^* \\ & GM & \end{array}$$

De acuerdo con la definición anterior, cualquiera que sea el $\wp$-objeto M, hay que definir un $\wp$-morfismo

$$\mu_M : (FG)\, M \to M$$

que sean flechas couniversales de F y que constituyan una transformación natural $\mu : FG \to 1_{\wp}$.

Obsérvese lo siguiente: Puesto que para todo $\Re$-objeto A la flecha (FA, λ_A) es universal para G, en particular, para todo $\wp$-objeto M, la flecha $(F\,(GM)\,, \lambda_{GM})$ de G desde GM es una flecha universal de G. Entonces, al considerar la flecha $(M, 1_{GM})$ de G desde GM, se tiene que existe un único $\wp$-morfismo

$$1^*_{GM} : (FG)\, M \to M$$

tal que

$$\begin{array}{ccc} GM & \overset{\lambda_{GM}}{\longrightarrow} & G\,(FGM) \\ 1_{GM} \searrow & \circlearrowleft & \swarrow G1^*_{GM} \\ & GM & \end{array} \qquad \ldots (*)$$

Por lo tanto, $G1^*_{GM}$ es retracción de λ_{GM}. Para todo $\wp$-objeto M, hágase

$$\mu_M = 1^*_{GM} \qquad \ldots (**)$$

Hay que ver que se satisfacen las condiciones de la definición anterior. Primero se verá que las flechas (μ_M, GM) de F hacia M satisfacen la definición de ser couniversales para F.

En efecto, si $FA \overset{g}{\to} M$ es cualquier otra flecha de F hacia M, entonces para A se tiene la flecha universal de G

$$\lambda_A : A \to G\,(FA)$$

que puede componerse con el $\Re$-morfismo Gg para obtener otro $\Re$-morfismo

$$g_* : A \overset{\lambda_A}{\to} G\,(FA) \overset{Gg}{\to} GM$$

para el cual se asegura que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \overset{\mu_M}{\longleftarrow} & F\,(GM) \\ g \nwarrow & & \nearrow Fg_* \\ & FA & \end{array}$$

Efectivamente, dado que $(GF)\,A$ es un $\Re$-objeto, puede considerarse la correspondiente flecha universal de G

$$\lambda_{(GF)A} : (GF)\,A \to GF\,[(GF)\,A]$$

Puesto que λ es una transformación natural, al considerar a los $\Re$-morfismos λ_A y Gg, se tiene que conmutan los cuadrados

$$
\begin{array}{ccc}
A & \overset{\lambda_A}{\rightarrow} & (GF)\,A \\
\lambda_A \downarrow & & \downarrow (GF)\,\lambda_A \\
(GF)\,A & \underset{\lambda_{(GF)A}}{\longrightarrow} & GF\,[(GF)\,A]
\end{array}
\quad \text{y} \quad
\begin{array}{ccc}
(GF)\,A & \overset{\lambda_{(GF)A}}{\longrightarrow} & GF\,[(GF)\,A] \\
Gg \downarrow & & \downarrow (GF)\,Gg \\
GM & \underset{\lambda_{GM}}{\longrightarrow} & GF\,(GM)
\end{array}
$$

Ensamblándolos a través de la flecha que tienen en común y añadiendo el triángulo $(*)$ se obtiene:

$$
\begin{array}{ccc}
A & \overset{\lambda_A}{\rightarrow} & (GF)\,A \\
\lambda_A \downarrow & \circlearrowright & \downarrow (GF)\,\lambda_A \\
(GF)\,A & \overset{\lambda_{(GF)A}}{\longrightarrow} & GF\,[(GF)\,A] \\
Gg \downarrow & \circlearrowright & \downarrow (GF)\,Gg \\
GM & \overset{\lambda_{GM}}{\longrightarrow} & GF\,(GM) \\
1_{GM} \searrow & \circlearrowright & \swarrow G\mu_M \\
 & GM &
\end{array}
$$

En consecuencia se tiene que

$$1_{GM} Gg\lambda_A = G\mu_M\,[(GF)\,Gg]\,[(GF)\,\lambda_A]\,\lambda_A$$

pero

$$1_{GM} Gg\lambda_A = Gg\lambda_A$$

en tanto que

$$G\mu_M\,[(GF)\,Gg]\,[(GF)\,\lambda_A]\,\lambda_A = G\,[\mu_M F\,(Gg\lambda_A)]\,\lambda_A = G\,(\mu_M F g_*)\,\lambda_A$$

de manera que

$$Gg\lambda_A = G\,(\mu_M F g_*)\,\lambda_A$$

Como consecuencia del lema anterior, esto implica que

$$g = \mu_M F g_*$$

como había que probar. En cuanto a la unicidad de g_*, supóngase que $h : A \to GM$ es otro $\Re$-morfismo tal que

$$g = \mu_M F h$$

Entonces se puede sustituir esta expresión de g en la definición de g_*, y resulta:

$$g_* = Gg\lambda_A = G\,(\mu_M F h)\,\lambda_A = (G\mu_M)\,(GFh)\,\lambda_A$$

Puesto que λ es una transformación natural y h es un $\Re$-morfismo, se tiene que

$$
\begin{array}{ccc}
A & \overset{\lambda_A}{\rightarrow} & (GF)\,A \\
h \downarrow & \circlearrowright & \downarrow (GF)\,h \\
GM & \underset{\lambda_{GM}}{\longrightarrow} & (GF)\,GM
\end{array}
$$

de modo que al retomar el último miembro de la igualdad anterior se obtiene:

$$G\mu_M\,(GFh)\,\lambda_A = G\mu_M \lambda_{GM} h = (G\mu_M \lambda_{GM})\,h = h$$

en vista del cuadrado anterior y del triángulo $(*)$.

Sólo falta mostrar que los $\wp$-morfismos μ_M dan lugar a una transformación natural

$$\mu : FG \to 1_\wp$$

Para ello basta probar que, cualquiera que sea el $\wp$-morfismo $p : M \to M'$, conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (FG)\,M & \xrightarrow{\mu_M} & M \\ (FG)\,p\downarrow & & \downarrow p \\ (FG)\,M' & \xrightarrow[\mu_{M'}]{} & M' \end{array}$$

Por el triángulo $(*)$ se tiene:

$$Gp = Gp\,(G\mu_M \lambda_{GM}) = G\,(p\mu_M)\,\lambda_{GM}$$

Por otra parte, puesto que λ es una transformación natural, se tiene que

$$\begin{array}{ccc} GM & \xrightarrow{\lambda_{GM}} & (GF)\,GM \\ Gp\downarrow & \circlearrowright & \downarrow GFGp \\ GM' & \xrightarrow[\lambda_{GM'}]{} & (GF)\,GM' \end{array}$$

lo cual permite escribir

$$G\mu_{M'}\,[(GFGp)\,\lambda_{GM}] = G\mu_{M'}\,(\lambda_{GM'}Gp)$$

Pero un triángulo conmutativo como $(*)$ también tiene lugar para M' que es un $\wp$-objeto arbitrario; por consiguiente, puede reasociarse el último miembro de la igualdad anterior escribiendo

$$(G\mu_{M'}\lambda_{GM'})\,Gp = 1_{GM'}Gp = Gp$$

Comparando con el último miembro de la primera igualdad, resulta:

$$G\,(\mu_{M'}FGp)\,\lambda_{GM} = G\,(p\mu_M)\,\lambda_{GM}$$

A consecuencia del lema anterior, esto implica que

$$\mu_{M'}FGp = p\mu_M$$

que es lo que había que probar. [✓]

Corolario 10.1 *Todo funtor adjunto es adjunto de su funtor coadjunto.* [✓]

Con el corolario anterior queda establecido que entre un funtor adjunto F y su coadjunto G existe una relación de dualidad mutua debida, precisamente, a que en tal caso F es un adjunto de G. Sin embargo, esto aún no explica el por qué haber dado a G el nombre de *coadjunto de* F, invitando a creer equivocadamente que *adjunto* y *coadjunto de* son conceptos mutuamente duales.

Es que todavía está pendiente la cuestión de cuál es el coconcepto correspondiente al de funtor adjunto. Pensando en ello puede surgir la duda de si todo funtor coadjunto de algún otro funtor satisfará la definición de tal coconcepto. Esto sí justificaría el equívoco surgido al emplear la palabra *coadjunto* en la denominación del concepto presentado con el nombre de *funtor coadjunto de* F, porque entonces resultaría no haber tal equívoco y que sí vale inducir la idea de que G *es dual de un adjunto* F *si es coadjunto suyo* no sólo porque en tal caso F viene a ser adjunto de G sino porque entonces G sería un funtor *coadjunto* (a secas). Ésta es justamente la justificación que tiene tal uso.

Definición 10.6 *Sea $\wp \xrightarrow{G} \Re$ un funtor cualquiera entre categorías cualesquiera. G es un* ***funtor coadjunto*** *si existen flechas couniversales (m_A, E_A) de G hacia todo objeto A de su codominio; es decir, si para todo $\Re$-objeto A existen, un $\wp$-objeto E_A y un $\Re$-morfismo*

$$m_A : GE_A \to A$$

tal que si

$$g : GM \to A$$

es cualquier otra flecha de G hacia A, entonces existe un único $\wp$-morfismo

$$g_* : M \to E_A$$

tal que

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{m_A}{\longleftarrow} & GE_A \\ g \nwarrow & \circlearrowleft & \nearrow Gg_* \\ & GM & \end{array}$$

Ejercicio 10.4 *Demuestre que todo funtor coadjunto tiene un adjunto.*

Proposición 10.3 *Si de los funtores $\Re \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \wp$, F es un adjunto y G es coadjunto de F, entonces G es un coadjunto.*

Demostración. Por el teorema anterior, las hipótesis en esta proposición implican que F es un adjunto de G, lo cual quiere decir que existe una transformación natural

$$\mu : GF \to 1_{\Re}$$

tal que para todo $\Re$-objeto A, el $\Re$-morfismo μ_A es una flecha couniversal de G hacia A. Por lo tanto, G tiene flechas couniversales hacia todo $\Re$-objeto A; es decir, G es un funtor coadjunto. [✓]

Ahora se recurrirá al Principio de Dualidad para extraer más consecuencias de esto.

Debido a la validez del teorema anterior se sabe que si de los funtores

$$\wp^{\text{op}} \underset{F^{\text{op}}}{\overset{G^{\text{op}}}{\rightleftarrows}} \Re^{\text{op}}$$

F^{op} es coadjunto de G^{op}, entonces G^{op} es adjunto de F^{op}. Aplicando el Principio de Dualidad, se obtiene (ya demostrado:) el teorema dual:

Teorema 10.2 *Si de los funtores $\wp \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} \Re$, F es un adjunto de G, entonces, G es coadjunto de F.* [✓]

Como consecuencia del ejercicio 10 y del resultado anterior, se tiene el siguiente:

Corolario 10.2 *Todo funtor coadjunto es coadjunto de su funtor adjunto.* [✓]

Otra consecuencia del $^{\text{co}}$teorema anterior es la $^{\text{co}}$proposición correspondiente a la que se acaba de demostrar:

Proposición 10.4 *Si F es un coadjunto y G es adjunto de F, entonces G es un adjunto.* [✓]

La suma de los resultados mutuamente duales anteriores se puede resumir como sigue:

Corolario 10.3 *Si $\Re \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \wp$ son funtores cualesquiera entre categorías cualesquiera, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) F es un adjunto y G es coadjunto de F.

(b) G es un coadjunto y F es adjunto de G. [✓]

De acuerdo con este corolario, los funtores adjuntos y coadjuntos se dan en parejas. Es debido a ello que se habla de la pareja ordenada (F, G) como de **un par adjunto de funtores** siempre que G es un coadjunto de F o que F es un adjunto de G.

Observación 10.2 *Supóngase que (F, G) es un par adjunto de funtores;entonces G es un coadjunto de F y F es un adjunto de G, por lo que existen dos transformaciones naturales*

$$\lambda : 1_\wp \to FG \quad y \quad \mu : GF \to 1_\Re$$

tales que, para cualesquiera $M \in \wp$ y $A \in \Re$, los morfimos

$$\lambda_M : M \to FGM \quad y \quad \mu_A : GFA \to A$$

son flechas universales y couniversales de F y G, respectivamente. En particular, cualesquiera que sean $A \in \Re$ y $M \in \wp$, las flechas

$$\lambda_{FA} : FA \to FGFA \quad y \quad \mu_{GM} : GFGM \to GM$$

son respectivamente universales y couniversales. Debido a la esencial unicidad de G para F y de F para G (en conformidad con los resultados enunciados en el ejercicio 9 y con sus duales), para las flechas

$$1_{FA} : FA \to FA \quad y \quad 1_{GM} : GM \to GM$$

se tienen los diagramas

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[rr, "\lambda_{FA}"] \arrow[dr, "1_{FA}"'] & \circlearrowright & FGFA \arrow[dl, "F\mu_A"] \\ & FA & \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} GM & \circlearrowright & GFGM \arrow[ll, "\mu_{GM}"'] \\ & GM \arrow[ul, "1_{GM}"] \arrow[ur, "G\lambda_M"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, las flechas 1_{FA} y 1_{GM} son los morfismos respectivamente correspondientes a los objetos $A \in \Re$ y $M \in \wp$ según las transformaciones naturales

$$1_F : F \to F \quad y \quad 1_G : G \to G$$

Por su parte, las flechas λ_{FA} y μ_{GM} son los morfismos $(\lambda F)_A$ y $(\mu G)_M$, respectivamente, correspondientes a los objetos $A \in \Re$ y $M \in \wp$ según las transformaciones naturales

$$\lambda F : 1_\wp F \to FGF \quad y \quad \mu G : GFG \to 1_\Re G$$

Así mismo, $F\mu_A$ y $G\lambda_M$ son los morfismos $(F\mu)_A$ y $(G\lambda)_M$, respectivamente, correspondientes a los objetos $A \in \Re$ y $M \in \wp$ según las transformaciones naturales

$$F\mu : FGF \to F1_\Re \quad y \quad G\lambda : G1_\wp \to GFG$$

Puesto que los triángulos anteriores conmutan cualesquiera que sean $A \in \Re$ y $M \in \wp$, resulta entonces que

$$1_F = (F\mu)(\lambda F) \quad y \quad 1_G = (\mu G)(G\lambda)$$

Para demostrar que esta es una propiedad característica de los pares adjuntos de funtores, se probará lo recíproco: Supóngase que $\Re \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \wp$ son tales que existen dos transformaciones naturales

$$\lambda : 1_\wp \to FG \quad y \quad \mu : GF \to 1_\Re$$

según las cuales

$$(F\mu)(\lambda F) = 1_F \quad y \quad (\mu G)(G\lambda) = 1_G$$

De acuerdo con el corolario anterior, basta demostrar que para todo $\wp$-objeto M, el $\wp$-morfismo

$$\lambda_M : M \to FGM$$

es una flecha universal de F. Para ello tómese cualquier otra flecha (A, f) de F desde M

$$f : M \to FA$$

Hay que definir un $\Re$-morfismo

$$f^*: GM \to A$$

que sea único y satisfaga que $(Ff^*)\,\lambda_M = f$. *Obsérvese que* Gf *ya es un* $\Re$*-morfismo dedominio* GM*; como su codominio es* GFA*, se lo puede componer con* μ_A *y definir*

$$f^*: GM \xrightarrow{Gf} GFA \xrightarrow{\mu_A} A$$

Debido a la primera de las dos igualdades anteriores, se tiene que

$$1_{FA} = (F\mu_A)\,\lambda_{FA}$$

Por otra parte, puesto que λ *es una transformación natural, se tiene*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\lambda_M} & FGM \\ f\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow FGf \\ FA & \underset{\lambda_{FA}}{\longrightarrow} & FGFA \end{array}$$

En consecuencia:

$$f = F\mu_A\,(\lambda_{FA}f) = F\mu_A\,(FGf)\,\lambda_M = F\,(\mu_A Gf)\,\lambda_M = (Ff^*)\,\lambda_M$$

como se quería probar. En cuanto a la unicidad de f^*, *supóngase que*

$$h: GM \to A$$

es otro $\Re$*-morfismo tal que* $(Fh)\,\lambda_M = f$. *Por la segunda de las dos igualdades anteriores se tiene:*

$$1_{GM} = \mu_{GM}\,(G\lambda_M)$$

Además, puesto que μ *es una transformación natural y* f^* *y* h *son* $\Re$*-morfismos dados, se tiene*

$$\begin{array}{ccc} GFGM & \xrightarrow{\mu_{GM}} & GM \\ GFf^*\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f^* \\ GFA & \underset{\mu_A}{\longrightarrow} & A \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} GFGM & \xrightarrow{\mu_{GM}} & GM \\ GFh\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow h \\ GFA & \underset{\mu_A}{\longrightarrow} & A \end{array}$$

Por consiguiente:

$$f^* = (f^*\mu_{GM})\,G\lambda_M = \mu_A\,(GFf^*)\,G\lambda_M = \mu_A G\,(Ff^*\lambda_M) = \mu_A Gf$$

lo cual, según se ha supuesto, puede reescribirse como

$$\mu_A Gf = \mu_A G\,[(Fh)\,\lambda_M] = \mu_A\,(GFh)\,G\lambda_M = h\mu_{GM}G\lambda_M = h$$

con lo cual la unicidad de f^* *queda demostrada.* [✓]

Ejercicio 10.5 *Piénsense los copos* $\mathcal{X} = (X, \leq)$ *y* $\mathcal{Y} = (Y, \preceq)$ *como categorías y considérense dos funciones monótonas* $\mathcal{X} \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathcal{Y}$ *tales que para cualesquiera* $x \in X$ *y* $y \in Y$,

$$f(x) \preceq y \Leftrightarrow x \leq g(y)$$

Probar que (f, g) *es un par adjunto de funtores.*

10.1. Estudio ulterior de los funtores adjuntos.

En esta sección se estudiará otra propiedad característica de los pares adjuntos de funtores; esta propiedad les es fundamental porque, ciertamente, dio fundamento a su existencia. Se comenzará con un ejemplo que la ilustre.

Según se ha visto, para todo conjunto D, los $\mathfrak{Set}$-funtores H_D y K_D constituyen un par adjunto (H_D, K_D). En consecuencia, existen dos transformaciones naturales

$$\lambda : 1_{\mathfrak{Set}} \to H_D K_D \quad \text{y} \quad \mu : K_D H_D \to 1_{\mathfrak{Set}}$$

tales que

$$(H_D\mu)(\lambda H_D) = 1_{H_D} \quad \text{y} \quad (\mu K_D)(K_D\lambda) = 1_{K_D}$$

Sea A un conjunto arbitrario y considérese la flecha couniversal de K_D hacia A

$$\mu_A : K_D H_D A \to A$$

que es la única función que hace conmutar al diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_D A & \overset{\lambda_{H_D A}}{\longrightarrow} & (H_D K_D) H_D A \\ 1_{H_D A} \searrow & \circlearrowleft & \swarrow H_D \mu_A \\ & H_D A & \end{array}$$

De acuerdo con su couniversalidad, si

$$g \in \mathfrak{Set}(K_D M, A)$$

es cualquier otra flecha de K_D hacia A, existe una única

$$g_* \in \mathfrak{Set}(M, H_D A)$$

tal que

$$\mu_A (K_D g_*) = g$$

Se ha visto que este morfismo g_* viene dado por la composición

$$g_* : M \overset{\lambda_M}{\to} H_D K_D M \overset{H_D g}{\to} H_D A$$

de modo que, para toda $m \in M$,

$$g_*(m) = (H_D g \circ \lambda_M)(m) = H_D g[\lambda_M(m)] = g[\lambda_M(m)] : D \to A$$

es la función que, para todo $d \in D$,

$$g[\lambda_M(m)](d) = g(m, d)$$

Por otro lado, puesto que

$$\lambda_M : M \to H_D K_D M$$

es una flecha universal de H_D, para cualquier otra flecha de H_D desde M

$$f \in \mathfrak{Set}(M, H_D A)$$

existe una única

$$f^* \in \mathfrak{Set}(K_D M, A)$$

tal que

$$(H_D f^*) \lambda_M = f$$

Por razones análogas a las expuestas antes, f^* viene dado por la composición

$$f^* : K_D M \overset{K_D f}{\to} K_D H_D A \overset{\mu_A}{\to} A$$

Es fácil comprobar (valiéndose del diagrama anterior) que μ_A está definida, para todo $(f,d) \in K_D H_D A$, por

$$\mu_A(f,d) = f(d)$$

Por lo tanto, para todo $(m,d) \in K_D M$,

$$f^*(m,d) = [\mu_A K_D f](m,d) = \mu_A(f(m),d) = [f(m)](d)$$

en conformidad con la regla de correspondencia que tiene K_D para morfismos.

Al confrontar esto con lo expuesto al presentar la Ley Exponencial de los Conjuntos se ve que esencialmente se han redefinido las funciones φ y ψ de que se habló entonces; por lo tanto, si para dos conjuntos cualesquiera M y A se define

$$\eta_{(M,A)} : \mathfrak{Set}(M, H_D A) \to \mathfrak{Set}(K_D M, A)$$

haciendo, para toda $f \in \mathfrak{Set}(M, H_D A)$,

$$\eta_{(M,A)}(f) = f^*$$

se puede estar seguro de que $\eta_{(M,A)}$ es una función biyectiva bien definida y que para toda $g \in \mathfrak{Set}(K_D M, A)$

$$\eta^{-1}_{(M,A)}(g) = g_*$$

con lo cual queda sentada (una vez más) la Ley Exponencial de los Conjuntos. Y puede irse más lejos todavía, porque es de esperar que con estas funciones $\eta_{(M,A)}$ se halle involucrado un isomorfismo natural entre funtores.

Fue D. M. Kan quien introdujo la noción de funtor adjunto en la Teoría de las Categorías persiguiendo el propósito de conseguir una generalización de la Ley Exponencial de los Conjuntos. Esta generalización es precisamente la que caracteriza a todo par adjunto de funtores, como se demostrará a continuación.

Supóngase que los funtores $\Re \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \wp$ constituyen un par adjunto (F,G); entonces existen dos transformaciones naturales

$$\lambda : 1_\wp \to FG \quad \text{y} \quad \mu : GF \to 1_\Re$$

tales que

$$(F\mu)(\lambda F) = 1_F \quad \text{y} \quad (\mu G)(G\lambda) = 1_G$$

Cualesquiera que sean los objetos $M \in \wp$ y $A \in \Re$, a cada elemento

$$f \in \wp(M, FA)$$

se lo puede poner en correspondencia con un elemento

$$f^* \in \Re(GM, A)$$

definido mediante la composición

$$f^* : GM \overset{Gf}{\to} GFA \overset{\mu_A}{\to} A$$

que, como se sabe, es el único $\Re$-morfismo tal que

$$(Ff^*)\lambda_M = f$$

y a cada elemento

$$g \in \Re(GM, A)$$

se lo puede poner en correspondencia con un elemento

$$g_* \in \wp(M, FA)$$

definido por

$$g_* : M \overset{\lambda_M}{\to} FGM \overset{Fg}{\to} FA$$

que es el único $\wp$-morfismo para el cual
$$\mu_A (Gg_*) = g$$
En consecuencia se tiene que
$$(f^*)_* = (Ff^*)\,\lambda_M = f \quad \text{y} \quad (g_*)^* = \mu_A (Gg_*) = g$$
Por lo tanto, al definir
$$\eta_{(M,A)} : \wp(M, FA) \to \Re(GM, A)$$
mediante
$$\eta_{(M,A)}(f) = f^*$$
se obtiene una función biyectiva bien definida cuya inversa
$$\eta^{-1}_{(M,A)} : \Re(GM, A) \to \wp(M, FA)$$
viene dada por
$$\eta^{-1}_{(M,A)}(g) = g_*$$
Para mostrar que al introducir estas funciones $\eta_{(M,A)}$ ($M \in \wp$ y $A \in \Re$) va de por medio una transformación (y por lo tanto un isomorfismo) natural, tiene que hablarse del *producto cartesiano de dos categorías.*

Definición 10.7 *El* ***producto cartesiano*** $\Im_1 \times \Im_2$ ***de dos categorías*** $\Im_1, \Im_2$ *es una colección que consta, por un lado, de objetos que son todas las parejas ordenadas* (A_1, A_2) *en las que* $A_1 \in \Im_1$ *y* $A_2 \in \Im_2$*, y, por otro lado, de morfismos que son todas las parejas ordenadas* (f_1, f_2) *en las que* $f_1 \in \Im_1(A_1, B_1)$ *y* $f_2 \in \Im_2(A_2, B_2)$*; en tal caso se dice que el dominio del morfismo* (f_1, f_2) *es el* $(\Im_1 \times \Im_2)$*-objeto* (A_1, A_2) *y que el* $(\Im_1 \times \Im_2)$*-objeto* (B_1, B_2) *es su codominio. La ley de composición para estos morfismos se define coordenada a coordenada, así como la existencia de identidades. Es fácil comprobar que esta colección* $\Im_1 \times \Im_2$ *satisface los axiomas que definen a una categoría.*

Con respecto a las categorías $\Re$ y $\wp$ de las que se venía hablando, considérese el producto cartesiano
$$\wp^{\mathrm{op}} \times \Re$$
y las reglas
$$\hom\left(\underline{\quad}, F\underline{\quad}\right) : \wp^{\mathrm{op}} \times \Re \longrightarrow \mathfrak{Set} \quad \text{y} \quad \hom\left(G\underline{\quad}, \underline{\quad}\right) : \wp^{\mathrm{op}} \times \Re \longrightarrow \mathfrak{Set}$$
tales que, para cualquier $(M, A) \in \wp^{\mathrm{op}} \times \Re$,
$$\hom\left(\underline{\quad}, F\underline{\quad}\right)(M, A) = \wp(M, FA) \quad \text{y} \quad \hom\left(G\underline{\quad}, \underline{\quad}\right)(M, A) = \Re(GM, A)$$
y para cualquier $(f, g) \in \wp^{\mathrm{op}} \times \Re((M_1, A_1), (M_2, A_2))$ o, lo que es lo mismo, para cualesquiera
$$f \in \wp^{\mathrm{op}}(M_1, M_2) \quad \text{y} \quad g \in \Re(A_1, A_2)$$
$$\hom\left(\underline{\quad}, F\underline{\quad}\right)(f, g) \in \mathfrak{Set}(\wp(M_1, FA_1), \wp(M_2, FA_2)) \quad \text{y} \quad \hom\left(G\underline{\quad}, \underline{\quad}\right)(f, g) \in \mathfrak{Set}(\Re(GM_1, A_1), \Re(GM_2, A_2$$
son funciones tales que, para cualesquiera $h \in \wp(M_1, FA_1)$ y $k \in \Re(GM_1, A_1)$,
$$\left[\hom\left(\underline{\quad}, F\underline{\quad}\right)(f, g)\right](h) = (Fg)\,hf \quad \text{y} \quad \left[\hom\left(G\underline{\quad}, \underline{\quad}\right)(f, g)\right](k) = gk\,(Gf)$$

Ejercicio 10.6 *Demuestre que* $\hom\left(\underline{\quad}, F\underline{\quad}\right)$ *y* $\hom\left(G\underline{\quad}, \underline{\quad}\right)$ *son funtores bien definidos.*

Se probará que las funciones $\eta_{(M,A)}$ inducen una transformación natural

$$\eta : \hom\left(\_\_, F\_\_\right) \longrightarrow \hom\left(G\_\_, \_\_\right)$$

Para ello basta demostrar que, cualquiera que sea $(f, g) \in \wp^{\mathrm{op}} \times \Re\left((M_1, A_1), (M_2, A_2)\right)$ conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \wp(M_1, FA_1) & \xrightarrow{\eta_{(M_1,A_1)}} & \Re(GM_1, A_1) \\ \hom\left(\_\_, F\_\_\right)(f,g)\downarrow & & \downarrow \hom\left(G\_\_, \_\_\right)(f,g) \\ \wp(M_2, FA_2) & \xrightarrow[\eta_{(M_2,A_2)}]{} & \Re(GM_2, A_2) \end{array}$$

Sea $h \in \wp(M_1, FA_1)$ un morfismo arbitrario; por un lado se tiene:

$$\left[\eta_{(M_2,A_2)} \hom\left(\_\_, F\_\_\right)(f,g)\right](h) = \eta_{(M_2,A_2)}\left[(Fg)\, hf\right] = \left[(Fg)\, hf\right]^* = \mu_{A_2} G\left[(Fg)\, hf\right] = \left(\mu_{A_2} GFg\right) G(hf)$$

en tanto, por el otro lado:

$$\left[\hom\left(G\_\_, \_\_\right)(f,g)\right] \eta_{(M_1,A_1)}(h) = \left[\hom\left(G\_\_, \_\_\right)(f,g)\right](h^*) = gh^*Gf = g\left(\mu_{A_1} Gh\right) Gf = \left(g\mu_{A_1}\right) G(hf)$$

Como $g : A_1 \to A_2$ es un $\Re$-morfismo arbitrario, debido a la naturalidad de μ se tiene:

$$\begin{array}{ccc} GFA_1 & \xrightarrow{\mu_{A_1}} & A_1 \\ GFg\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow g \\ GFA_2 & \xrightarrow[\mu_{A_2}]{} & A_2 \end{array}$$

lo cual implica la coincidencia entre los últimos miembros de las igualdades anteriores y, por lo tanto, la conmutatividad del diagrama. [✓]

A consecuencia de este resultado y del hecho de que para todo $(\wp^{\mathrm{op}} \times \Re)$-objeto (M, A), $\eta_{(M,A)}$ es un $\mathfrak{Set}$-isomorfismo, se tiene que η es un isomorfismo natural.

Capítulo 11

Productos y Coproductos

Tanto en este capítulo como en los dos que le siguen, se estudiarán algunos métodos que implican el hallazgo de *objetos nuevos* en una categoría a partir de los elementos dados en ésta, que pueden ser objetos o morfismos. Para avanzar gradualmente en los niveles de abstracción que impondrá este estudio, se empezará analizando el primero de estos métodos en el ámbito de las categorías concretas.

11.1. $\underline{K}$-Productos Cartesianos

De acuerdo con la Teoría de los Conjuntos, el *producto cartesiano* de una familia arbitraria de conjuntos $(X_\lambda)_\Lambda$ es el conjunto de todas las funciones

$$f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

tales que para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $f(\lambda) \in X_\lambda$. La notación usual para designar al producto de $(X_\lambda)_\Lambda$ es

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Por otra parte, para toda $\lambda \in \Lambda$ se llama λ-*proyección* a la función

$$\pi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$$

definida para toda $f \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ mediante

$$\pi_\lambda(f) = f(\lambda)$$

Por los cursos de Topología General se sabe que cuando cada conjunto X_λ está topologizado, entonces el *producto topológico* de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es el espacio topológico

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \tau\right)$$

cuya topología τ está generada por la familia

$$\gamma = \left\{\pi_\lambda^{-1}(U) : \lambda \in \Lambda, U \in \tau_\lambda\right\}$$

Se sabe que τ es la topología débil para $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ correspondiente a $(\pi_\lambda)_\Lambda$ y a $(\tau_\lambda)_\Lambda$, la cual es una $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ con respecto a la fuente de λ-proyecciones

$$\left(\pi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to (X_\lambda, \tau_\lambda)\right)_\Lambda$$

Algo similar ocurre con las estructuras algebraicas. Por ejemplo, si a cada conjunto X_λ se lo dota con una estructura de grupo

$$(\cdot_\lambda, e_\lambda) \in \mathfrak{Grp}(X_\lambda), \lambda \in \Lambda$$

por la Teoría de los Gupos se sabe que el *producto directo* de la familia $(G_\lambda)_\Lambda$ de los grupos

$$G_\lambda = (X_\lambda, (\cdot_\lambda, e_\lambda))$$

es el grupo

$$G = \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, (\cdot, e)\right)$$

en el cual la operación $\cdot$ está definida para cualesquiera $f, f' \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ y para toda $\lambda \in \Lambda$ mediante

$$(f \cdot f')(\lambda) = f(\lambda) \cdot_\lambda f'(\lambda)$$

y en el que $e \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$e(\lambda) = e_\lambda$$

Entonces se demuestra con facilidad que la asociatividad de $\cdot$ depende de la asociatividad de cada $\cdot_\lambda$y que el elemento inverso f^{-1} de cualquier $f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ está definido, para toda $\lambda \in \Lambda$, mediante

$$f^{-1}(\lambda) = (f(\lambda))^{-1}$$

Además de esto, se tiene lo siguiente:

(i) Sean, $f, f' \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ y $\lambda \in \Lambda$; entonces

$$\pi_\lambda(f \cdot f') = (f \cdot f')(\lambda) = f(\lambda) \cdot_\lambda f'(\lambda) = \pi_\lambda(f) \cdot_\lambda \pi_\lambda(f')$$

lo cual significa que la λ-proyección π_λ es un homomorfismo de grupos.

(ii) Sea $H = (Y, (\circ, \varepsilon))$ un grupo y sea $h : Y \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ una función tal que para toda $\lambda \in \Lambda$

$$\pi_\lambda h \in \mathfrak{Grp}(H, G_\lambda)$$

Sean $y_1, y_2 \in Y$ y supóngase

$$\text{que } h(y_1) = f_1, \quad \text{que } h(y_2) = f_2 \quad \text{y que } h(y_1 \circ y_2) = f$$

Se quisiera ver que f y $f_1 \cdot f_2$ son el mismo elemento de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$; para ello tómese cualquier $\lambda \in \Lambda$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \pi_\lambda(f) \\
&= \pi_\lambda(h(y_1 \circ y_2)) \\
&= \pi_\lambda h(y_1 \circ y_2) \\
&= \pi_\lambda h(y_1) \cdot_\lambda \pi_\lambda h(y_2) \\
&= \pi_\lambda(h(y_1)) \cdot_\lambda \pi_\lambda(h(y_2)) \\
&= \pi_\lambda(f_1) \cdot_\lambda \pi_\lambda(f_2) \\
&= f_1(\lambda) \cdot_\lambda f_2(\lambda) \\
&= (f_1 \cdot f_2)(\lambda)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f = f_1 \cdot f_2$ o, lo que es lo mismo,

$$h(y_1 \circ y_2) = h(y_1) \cdot h(y_2)$$

Puesto que y_1 y y_2 se escogieron arbitrariamente en Y, esto significa que

$$h : H \to G$$

es un homomorfismo de grupos.

Como consecuencia de (i) y (ii) resulta que la $\mathfrak{Grp}$-estructura $(\cdot, e)$ es inicial para $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ con respecto a la fuente de λ-proyecciones

$$\left(\pi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to G_\lambda\right)_\Lambda$$

El par de ejemplos anteriores justifican sobradamente la siguiente definición de *producto* para objetos de cualquier categoría concreta $\underline{K}$. Puesto que no habrá un nombre especial para distinguir al producto en cada categoría específica, y puesto que en todas ellas el objeto producto de cualquier familia de objetos $(A_\lambda)_\Lambda$ (en caso de existir) tiene como conjunto subyacente al producto cartesiano de los conjuntos subyacentes de los objetos A_λ, se hablará en general de $\underline{K}$*-productos cartesianos en categorías concretas.*

Definición 11.1 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta arbitraria y sea $(A_\lambda)_\Lambda$ una familia cualquiera de $\underline{K}$-objetos $A_\lambda = (X_\lambda, \xi_\lambda)$. Entonces, un* ***$\underline{K}$-producto cartesiano*** *de la familia $(A_\lambda)_\Lambda$ es un $\underline{K}$-objeto*

$$A = \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \xi\right)$$

cuya $\underline{K}$-estructura subyacente ξ sea inicial para $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ con respecto a la fuente de λ-proyecciones

$$\left(\pi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to A_\lambda\right)_\Lambda$$

En tal caso se empleará la notación $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ para designar al objeto A. Cuando para toda familia de objetos de $\underline{K}$ haya un $\underline{K}$-producto cartesiano se dirá que $\underline{K}$ ***tiene $\underline{K}$-productos cartesianos*** *o, simplemente, que* ***tiene productos cartesianos****, en tanto esté suficientemente claro de qué categoría $\underline{K}$ se hable.*

Observación 11.1 *Puesto que el concepto de $\underline{K}$-producto cartesiano ha quedado definido a través de la noción de $\underline{K}$-estructura inicial y ésta es única salvo isomorfismo entonces, también un $\underline{K}$-producto $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \xi\right)$ de una familia $(X_\lambda, \xi_\lambda)_\Lambda$ (cuando existe) es único salvo isomorfismo. Por lo tanto, se hablará de $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \xi\right)$ como de* <u>*el*</u> *$\underline{K}$-producto cartesiano de la familia $(X_\lambda, \xi_\lambda)_\Lambda$.*

Ejemplo 11.1 *Debido al par de ejemplos anteriores, se tiene que tanto $\mathfrak{Top}$ como $\mathfrak{Gra}$ son categorías concretas que tienen productos cartesianos.*

Ejemplo 11.2 *Toda categoría concreta topológica tiene productos cartesianos.*

En efecto, si $\underline{K}$ es topológica, entonces siempre existe una $\underline{K}$-estructura inicial para $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ con respecto a la fuente de λ-proyecciones $(\pi_\lambda)_\Lambda$ de cualquier familia de $\underline{K}$-objetos $(X_\lambda, \xi_\lambda)_\Lambda$.

Ejemplo 11.3 *En los cursos de Topología General se demuestra que productos arbitrarios de espacios T_0, T_1 y T_2 son, respectivamente, T_0, T_1 y T_2. Por consiguiente las categorías T_0, T_1 y T_2 tienen productos cartesianos.*

Ejemplo 11.4 *También es en esos cursos donde se demuestra el Teorema de Tychonoff que asegura que el producto topológico de espacios compactos es compacto. Consecuentemente, las categorías $\mathfrak{Topc}$ y $\mathfrak{Topc}_2$ tienen productos cartesianos.*

Ejemplo 11.5 $\mathfrak{Pos}$ *tiene productos cartesianos.*

En efecto, dada cualquier familia de copos $(X_\lambda, \leq_\lambda)_\Lambda$ puede definirse, cualesquiera que sean f y f' en $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, la relación $\leq$ haciendo, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$f \leq f' \Leftrightarrow f(\lambda) \leq_\lambda f'(\lambda)$$

lo cual es un orden parcial para $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, como se comprueba fácilmente. Además:

(i) Si $f \leq f'$, entonces para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene:

$$\pi_\lambda(f) = f(\lambda) \leq_\lambda f'(\lambda) = \pi_\lambda(f')$$

O sea que π_λ es monótona.

(ii) Si $(Y, \preceq)$ es un copo y $h : Y \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es una función tal que para toda $\lambda \in \Lambda$ la composición

$$\pi_\lambda h : (Y, \preceq) \to (X_\lambda, \leq_\lambda)$$

es monótona, y suponiendo que

$$h(y_1) = f_1 \quad \text{y} \quad h(y_2) = f_2$$

siendo y_1 y y_2 dos puntos de Y tales que $y_1 \preceq y_2$, entonces para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \pi_\lambda(f_1) \\ &= \pi_\lambda h(y_1) \\ &\leq {}_\lambda \pi_\lambda h(y_2) \\ &= \pi_\lambda(f_2) \\ &= f_2(\lambda) \end{aligned}$$

y por lo tanto, $f_1 \leq f_2$. Esto significa que también

$$h : (Y, \preceq) \to \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \leq\right)$$

es una función monótona.

Así, queda probado que $\leq$ es una $\mathfrak{Pos}$-estructura inicial para $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ con respecto a la fuente de λ-proyecciones

$$\left(\pi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to (X_\lambda, \leq_\lambda)\right)_\Lambda$$

Por lo tanto, $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \leq\right)$ es un producto cartesiano de la familia $(X_\lambda, \leq_\lambda)_\Lambda$. [✓]

Ejemplo 11.6 $\mathfrak{Lat}$ *tiene productos cartesianos.*

Sea $(X_\lambda, \leq_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de retículas y defínase, para cualesquiera dos elementos f_1 y f_2 del copo $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \leq\right)$ del ejemplo anterior,

$$f_1 \wedge f_2 \quad \text{y} \quad f_1 \vee f_2$$

como los elementos de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ tales que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$(f_1 \wedge f_2)(\lambda) = f_1(\lambda) \wedge_\lambda f_2(\lambda) \quad \text{y} \quad (f_1 \vee f_2)(\lambda) = f_1(\lambda) \vee_\lambda f_2(\lambda)$$

Puesto que para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene que

$$(f_1(\lambda) \wedge_\lambda f_2(\lambda)) \leq_\lambda f_1(\lambda) \quad \text{y} \quad (f_1(\lambda) \wedge_\lambda f_2(\lambda)) \leq_\lambda f_2(\lambda)$$

entonces

$$(f_1 \wedge f_2) \leq f_1 \quad \text{y} \quad (f_1 \wedge f_2) \leq f_2$$

Análogamente se tiene que

$$f_1 \leq (f_1 \vee f_2) \quad \text{y} \quad f_2 \leq (f_1 \vee f_2)$$

Por otra parte, si $g \in \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es tal que

$$g \leq f_1 \quad \text{y} \quad g \leq f_2$$

entonces para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene que

$$g(\lambda) \leq_\lambda f_1(\lambda) \quad \text{y} \quad g(\lambda) \leq_\lambda f_2(\lambda)$$

y como $(X_\lambda, \leq_\lambda)$ es una retícula, entonces también

$$g(\lambda) \leq_\lambda (f_1(\lambda) \wedge_\lambda f_2(\lambda))$$

de manera que $g \leq (f_1 \wedge f_2)$. Análogamente se prueba que si $g \in \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es tal que

$$f_1 \leq g \quad \text{y} \quad f_2 \leq g$$

entonces $(f_1 \vee f_2) \leq g$. Esto quiere decir que el copo $\left(\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \leq\right)$ es una retícula. Además:

(i) Para cualesquiera $f_1, f_2 \in \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ y para cualquier $\lambda \in \Lambda$

$$\begin{aligned} \pi_\lambda(f_1 \wedge f_2) &= (f_1 \wedge f_2)(\lambda) = f_1(\lambda) \wedge_\lambda f_2(\lambda) = \pi_\lambda(f_1) \wedge_\lambda \pi_\lambda(f_2) \\ \pi_\lambda(f_1 \vee f_2) &= (f_1 \vee f_2)(\lambda) = f_1(\lambda) \vee_\lambda f_2(\lambda) = \pi_\lambda(f_1) \vee_\lambda \pi_\lambda(f_2) \end{aligned}$$

O sea que π_λ es un homomorfismo reticular.

(ii) Si $(Y, \preceq)$ es una retícula y $h : Y \to \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es una función tal que para toda $\lambda \in \Lambda$ la composición

$$\pi_\lambda h : (Y, \preceq) \to (X_\lambda, \leq_\lambda)$$

es un homomorfismo reticular, y suponiendo

$$\text{que } h(y_1) = f_1, \quad \text{que } h(y_2) = f_2 \quad \text{y que } h(y_1 \wedge y_2) = f$$

entonces para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene:

$$\begin{aligned} (f_1 \wedge f_2)(\lambda) &= f_1(\lambda) \wedge_\lambda f_2(\lambda) \\ &= \pi_\lambda h(y_1) \wedge_\lambda \pi_\lambda h(y_2) \\ &= \pi_\lambda h(y_1 \wedge y_2) \\ &= \pi_\lambda(f) \\ &= f(\lambda) \end{aligned}$$

de modo que $f = f_1 \wedge f_2$ o, lo que es lo mismo,

$$h(y_1 \wedge y_2) = h(y_1) \wedge h(y_2)$$

Análogamente se prueba que

$$h(y_1 \vee y_2) = h(y_1) \vee h(y_2)$$

Por lo tanto

$$h : (Y, \preceq) \to \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \leq \right)$$

es un homomorfismo reticular.

Esto demuestra que la relación $\leq$ es una estructura reticular inicial para $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ con respecto a la fuente de λ-proyecciones

$$\left(\pi_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to (X_\lambda, \leq_\lambda) \right)_\Lambda$$

Por lo tanto, $\left(\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \leq \right)$ es un producto cartesiano de la familia de retículas $(X_\lambda, \leq_\lambda)_\Lambda$. [✓]

Ejercicio 11.1 *Demuestre que:*

(a) $\mathfrak{Clat}$ tiene productos cartesianos.

(b) $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$ tiene productos cartesianos. (Sugerencia: Pruebe que el producto directo de una familia de espacios vectoriales definido en los cursos de Álgebra Lineal es un producto cartesiano.)

En el par de ejemplos que siguen se exhiben categorías concretas carentes de productos cartesianos.

Ejemplo 11.7 $\mathfrak{Nor}$ *denota a la* ***categoría de los espacios vectoriales normados y de las contracciones normadas****.*

Recuérdese, de los cursos de Análisis Matemático, que si $V \in \mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$, $V = (X, (+, \cdot))$, entonces una **norma** en V es una función

$$\| \quad \| : X \to [0, \infty)$$

que para cualesquiera $x, x_1, x_2 \in X$ y $r \in \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

(n_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(n_2) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$

(n_3) $\|rx\| = |r| \, \|x\|$

En vista de esto se tiene que:

(i) Para todo $X \in \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Nor}[X]$ consta de ternas $\left(+, \cdot, \| \quad \|\right)$ tales que $V = (X, (+, \cdot))$ es un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) y $\| \quad \|$ es una norma en V.

(ii) Los $\mathfrak{Nor}$-objetos o **espacios vectoriales normados** son, por lo tanto, parejas $\left(X, \left(+, \cdot, \| \quad \|\right)\right)$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $\left(+, \cdot, \| \quad \|\right) \in \mathfrak{Nor}[X]$.

(iii) Los $\mathfrak{Nor}$-morfismos o **contracciones normadas** entre dos espacios vectoriales normados $N_1 = \left(X, \left(+_X, \cdot_X, \| \quad \|_X\right)\right)$ y $N_2 = \left(Y, \left(+_Y, \cdot_Y, \| \quad \|_Y\right)\right)$ son transformaciones lineales

$$f : (X, (+_X, \cdot_X)) \to (Y, (+_Y, \cdot_Y))$$

que para toda $x \in X$ satisfacen la condición:

$$\|f(x)\|_Y \leq \|x\|_X$$

Es fácil ver que $\mathfrak{Nor}$ satisface las condiciones (m_1) y (m_2) que definen a una categoría concreta.

Primeramente se mostrará que para todo par de $\mathfrak{Nor}$-objetos existe el producto cartesiano.

Sean $N_1 = \left(X, \left(+_X, \cdot_X, \| \quad \|_X\right)\right)$ y $N_2 = \left(Y, \left(+_Y, \cdot_Y, \| \quad \|_Y\right)\right)$ dos espacios vectoriales normados arbitrarios. Si son $V_1 = (X, (+_X, \cdot_X))$ y $V_2 = (Y, (+_Y, \cdot_Y))$, entonces, por (b) del ejercicio anterior, se sabe que definiendo para cualesquiera $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 +_X x_2, y_1 +_Y y_2)$$

y para cualesquiera $(x, y) \in X \times Y$ y $r \in \mathbb{R}$:

$$r \cdot (x, y) = (r \cdot_X x, r \cdot_Y y)$$

entonces

$$(X \times Y, (+, \cdot)) = \prod_{i=1}^{2} V_i$$

Ahora defínase, para cualquier $(x, y) \in X \times Y$

$$\|(x, y)\| = \text{máx}\left\{\|x\|_X, \|y\|_Y\right\}$$

Entonces:

(n_1) $\|(x, y)\| = 0 \Leftrightarrow \text{máx}\left\{\|x\|_X, \|y\|_Y\right\} = 0 \Leftrightarrow \|x\|_X = 0$ y $\|y\|_Y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ y $y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

(n_2) Supóngase que $\|z_1 +_Z z_2\|_Z = \text{máx}\left\{\|x_1 +_X x_2\|_X, \|y_1 +_Y y_2\|_Y\right\}$; entonces $Z \in \{X, Y\}$, $z_i \in \{x_i, y_i\}$ e $i \in \{1, 2\}$, y es claro que para toda $i \in \{1, 2\}$,

$$\|z_i\|_Z \leq \text{máx}\left\{\|x_i\|_X, \|y_i\|_Y\right\}$$

En consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} \|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\| &= \|(x_1 +_X x_2, y_1 +_Y y_2)\| \\ &= \text{máx}\left\{\|x_1 +_X x_2\|_X, \|y_1 +_Y y_2\|_Y\right\} \\ &= \|z_1 +_Z z_2\|_Z \\ &\leq \|z_1\|_Z + \|z_2\|_Z \\ &\leq \text{máx}\left\{\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\right\} + \text{máx}\left\{\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\right\} \\ &= \|(x_1, y_1)\| + \|(x_2, y_2)\| \end{aligned}$$

(n_3) Supóngase que $\|z\|_Z = \text{máx}\left\{\|x\|_X, \|y\|_Y\right\}$; entonces $Z \in \{X, Y\}$, $z \in \{x, y\}$ y se tiene que

$$\|x\|_X \leq \|z\|_Z \quad \text{y} \quad \|y\|_Y \leq \|z\|_Z$$

de manera que para toda $r \in \mathbb{R}$ resulta

$$|r| \|x\|_X \leq |r| \|z\|_Z \quad \text{y} \quad |r| \|y\|_Y \leq |r| \|z\|_Z$$

por lo que

$$|r| \|z\|_Z = \text{máx}\left\{|r| \|x\|_X, |r| \|y\|_Y\right\}$$

Recíprocamente, si

$$|r| \|z\|_Z = \text{máx}\left\{|r| \|x\|_X, |r| \|y\|_Y\right\}$$

entonces $Z \in \{X, Y\}$, $z \in \{x, y\}$ y se tiene que

$$|r| \|x\|_X \leq |r| \|z\|_Z \quad \text{y} \quad |r| \|y\|_Y \leq |r| \|z\|_Z$$

de modo que, si $r \neq 0$, entonces

$$\|x\|_X \leq \|z\|_Z \quad \text{y} \quad \|y\|_Y \leq \|z\|_Z$$

es decir

$$\|z\|_Z = \text{máx}\left\{\|x\|_X, \|y\|_Y\right\}$$

Como consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} \|r \cdot (x, y)\| &= \|(r \cdot_X x, r \cdot_Y y)\| \\ &= \text{máx}\left\{\|r \cdot_X x\|_X, \|r \cdot_Y y\|_Y\right\} \\ &= \text{máx}\left\{|r| \|x\|_X, |r| \|y\|_Y\right\} \\ &= |r| \|z\|_Z \\ &= |r| \,\text{máx}\left\{\|x\|_X, \|y\|_Y\right\} \\ &= |r| \|(x, y)\| \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\left(X\times Y,\left(+,\cdot,\|\quad\|\right)\right)$ es un espacio vectorial normado.

Por otra parte se tiene:

(i) Por (b) del ejercicio anterior, para toda $i\in\{1,2\}$,

$$\pi_i:(X\times Y,(+,\cdot))\to V_i$$

es una transformación lineal, por lo que también es lineal

$$\pi_i:\left(X\times Y,\left(+,\cdot,\|\quad\|\right)\right)\to N_i$$

Además, para cualquier $(x,y)\in X\times Y$ se tienen las desigualdades

$$\|x\|_X\leq \text{máx}\left\{\|x\|_X,\|y\|_Y\right\}\qquad\text{y}\qquad \|y\|_Y\leq \text{máx}\left\{\|x\|_X,\|y\|_Y\right\}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\|\pi_1(x,y)\|_X\leq\|(x,y)\|\qquad\text{y}\qquad\|\pi_2(x,y)\|_Y\leq\|(x,y)\|$$

lo cual significa que π_1 y π_2 son contracciones normadas.

(ii) Si $\left(W,\left(\oplus,\otimes,|\quad|\right)\right)\in\mathfrak{Nor}$ y $h:W\to X\times Y$ es una función tal que, para toda $i\in\{1,2\}$, la composición

$$\pi_i h:\left(W,\left(\oplus,\otimes,|\quad|\right)\right)\to N_i$$

es una contracción normada, entonces, suponiendo que para cierta $w\in W$ arbitraria $h(w)=(x,y)$, se tendrá

$$\|\pi_1 h(w)\|_X=\|x\|_X\leq|w|\qquad\text{y}\qquad\|\pi_2 h(w)\|_Y=\|y\|_Y\leq|w|$$

Como consecuencia resulta que

$$\|h(w)\|=\text{máx}\left\{\|x\|_X,\|y\|_Y\right\}\leq|w|$$

lo que significa que también

$$h:\left(W,\left(\oplus,\otimes,|\quad|\right)\right)\to(X\times Y,(+,\cdot))$$

es una contracción normada.

Con esto queda demostrado que

$$\left(X\times Y,\left(+,\cdot,\|\quad\|\right)\right)=\prod_{i=1}^{2}N_i$$

Por lo tanto, en $\mathfrak{Nor}$ existe el producto cartesiano de cualesquiera dos de sus objetos.

Pese a lo anterior, $\mathfrak{Nor}$ es una categoría concreta sin productos cartesianos porque, como enseguida se verá, ninguna familia infinita de espacios vectoriales normados tiene productos cartesianos. Para probarlo, obsérvese que de la condición (n_3) que debe satisfacer toda norma, se infiere que ninguna norma es una función acotada. En consecuencia, al tratar de extender la noción de norma para el producto de una familia infinita $(N_\lambda)_\Lambda$ de espacios normados $N_\lambda=\left(X_\lambda,\left(+_\lambda,\cdot_\lambda,\|\quad\|_\lambda\right)\right)$, definiendo, para cualquier $f\in\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$,

$$\|f\|=\sup\left\{\|f(\lambda)\|_\lambda:\lambda\in\Lambda\right\}$$

siempre será posible construir un vector $f_0\in\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ para el cual se tenga:

$$\|f_0\|=\infty$$

pues basta intercalar entre sus coordenadas una sucesión de vectores $\{f(\lambda_n)\}_n$ que satisfaga, para toda $n\in\mathbb{N}$, que

$$\|f(\lambda_n)\|_{\lambda_n}>n$$

Y si se supone que hay otra manera de normar al espacio vectorial $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, (+,\cdot)\right)$ a fin de obtener un $\mathfrak{Nor}$-producto cartesiano $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, (+,\cdot,|\quad|)\right)$ de la familia $(N_\lambda)_\Lambda$, entonces toda λ-proyección π_λ sería una contracción normada y, por lo tanto, para toda $f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, se debería tener que

$$\|f(\lambda)\|_\lambda = \|\pi_\lambda(f)\|_\lambda \leq |f|$$

Sin embargo, para el vector f_0 que se ha construido, las desigualdades

$$\|f_0(\lambda)\|_\lambda \leq |f_0|, (\lambda \in \Lambda)$$

contradicen el hecho de que la sucesión $\left\{\|f_0(\lambda_n)\|_{\lambda_n}\right\}_n$ diverge a ∞. Por lo tanto, falso suponer que $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, (+,\cdot)\right)$ sea normable. [✓]

Otra categoría concreta carente de productos cartesianos es $\mathfrak{Fld}$: la **categoría de campos y de homomorfismos de campos**.

Recuérdese que un *anillo con unitario* es un anillo que cuenta con un neutro multiplicativo. Un anillo en donde la multiplicación es conmutativa es un *anillo conmutativo*. Por otra parte, si R es un anillo con unitario, entonces un elemento x de R es una *unidad de* R si x tiene un inverso multiplicativo en R. Si en R todo elemento distinto de cero es una unidad, entonces R es un *anillo con división*. Un **campo** es un anillo conmutativo con división.

Tener esto en mente permite formalizar la presentación de esta categoría como sigue:

(i) Para todo conjunto X, $\mathfrak{Fld}[X]$ consta de cuartetas $(+,0,\cdot,1)$ para las cuales se tiene que

$$(X,(+,0)) \quad \text{y} \quad (X-\{0\},(\cdot,1))$$

son grupos abelianos, y que satisfacen las leyes distributivas izquierda y derecha de la multiplicación respecto de la suma.

(ii) En consecuencia, los $\mathfrak{Fld}$-objetos o **campos** son parejas $(X,(+,0,\cdot,1))$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $(+,0,\cdot,1) \in \mathfrak{Fld}[X]$.

(iii) Dados dos campos

$$(X,(+_X,0_X,\cdot_X,1_X)) \quad \text{y} \quad (Y,(+_Y,0_Y,\cdot_Y,1_Y))$$

una función $f: X \to Y$ tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ satisface:

$$f(x_1 +_X x_2) = f(x_1) +_Y f(x_2) \quad \text{y} \quad f(x_1 \cdot_X x_2) = f(x_1) \cdot_Y f(x_2)$$

es un **homomorfismo de campos**.

Las condiciones (m_1) y (m_2) que definen a una categoría concreta se verifican fácilmente.

Recuérdese, de los cursos de Álgebra Abstracta, que los homomorfismos de campos, salvo que sean constantes (lo cual ocurre si, y sólo si, el codominio es un campo trivial), siempre son inyectivos. En consecuencia, ningún par de campos no triviales tiene un producto cartesiano porque lo contrario implicaría que ambas proyecciones sean inyectivas, lo que es falso. [✓]

Ejercicio 11.2 *Sea* $(M_\lambda)_\Lambda$ *una familia arbitraria de espacios métricos,* $M_\lambda = (X_\lambda, d_\lambda)$, *y, para cualesquiera* $f_1, f_2 \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, *defínase*

$$d(f_1,f_2) = \sup\{d_\lambda(f_1(\lambda), f_2(\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}$$

Pruebe que:

(a) Si $d(f_1,f_2) \in \mathbb{R}$, para cualesquiera $f_1, f_2 \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, entonces d es una métrica para $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ y

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, d\right) = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$$

(b) Si existen $f_1, f_2 \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ para los cuales $d(f_1, f_2) = \infty$, entonces no existe $\delta \in \mathfrak{Met}\left[\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right]$ con la cual $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \delta\right)$ sea un producto cartesiano de $(M_\lambda)_\Lambda$.

11.2. $\underline{K}$-Coproductos Cartesianos

Para poder referirse al concepto dual correspondiente al de $\underline{K}$-producto cartesiano en una categoría concreta $\underline{K}$, es conveniente recordar la definición conjuntista de *coproducto cartesiano.*

Definition 2 *Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia de conjuntos arbitraria. Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea*

$$X'_\lambda = X_\lambda \times \{\lambda\}$$

Entonces:

(a) El conjunto $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X'_\lambda$ es la **unión ajena** de la familia $(X_\lambda)_\Lambda$; para designarla se empleará la notación $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

(b) Un **coproducto cartesiano** de la familia $(X_\lambda)_\Lambda$ es su unión ajena. La notación empleada para designarlo es $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Entonces se habala de los conjuntos X_λ como de los **cofactores** del coproducto.

(c) Para toda $\lambda \in \Lambda$ considérense, la biyección

$$\begin{array}{rccc} h: & X_\lambda & \to & X'_\lambda \\ & x & \mapsto & (x,\lambda) \end{array}$$

y la inclusión

$$\iota_\lambda : X'_\lambda \hookrightarrow \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Entonces, se llamará λ**-coproyección** a la composición

$$\varepsilon_\lambda : X_\lambda \xrightarrow{h} X'_\lambda \hookrightarrow \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Observación 11.2 *(a) Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia de conjuntos arbitraria y para cada $\lambda \in \Lambda$ sea $X'_\lambda = X_\lambda \times \{\lambda\}$. Si ahora se construye la unión ajena de la familia $(X'_\lambda)_\Lambda$ considerando los conjuntos*

$$X''_\lambda = X'_\lambda \times \{\lambda\}$$

es obvio que la relación

$$(x,\lambda) \mapsto ((x,\lambda),\lambda)$$

define una correspondencia biunívoca entre los conjuntos

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X'_\lambda \quad y \quad \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X''_\lambda$$

lo cual permite definir al coproducto de la familia $(X'_\lambda)_\Lambda$ simplemente como la unión de sus miembros.

(b) Por análogas razones, cuando los miembros de una familia $(X_\lambda)_\Lambda$ son conjuntos ajenos entre sí, entonces la unión de todos ellos puede considerarse un coproducto de la familia $(X_\lambda)_\Lambda$, ya que tal unión es un $\mathfrak{Set}$-objeto isomorfo al objeto $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ de la definición precedente. Si tal es el caso, las λ-coproyecciones ε_λ son, simplemente, las inclusiones ι_λ de los uniendos en la unión.

Antes de considerar el concepto de coproducto en una categoría concreta cualquiera, recuérdese, de los cursos de Topología General, que cuando cada conjunto X_λ está topologizado, entonces el *coproducto topológico de la familia* $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es el espacio topológico

$$\left(\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \tau\right)$$

en el cual

$$\tau = \left\{ U \subseteq \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : \forall \lambda \in \Lambda, \varepsilon_\lambda^{-1}(U) \in \tau_\lambda \right\}$$

Recuérdese que esta τ es la topología fuerte para $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ correspondiente a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y a $(\varepsilon_\lambda)_\Lambda$. Consecuentemente, tal topología es una $\mathfrak{Top}$-estructura final para $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ con respecto al sumidero de λ-coproyecciones

$$\left(\varepsilon_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right)_\Lambda$$

De aquí la generalización es inmediata.

Definición 11.2 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta y sea $(A_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de $\underline{K}$-objetos, $A_\lambda = (X_\lambda, \xi_\lambda)$. Un* ***$\underline{K}$-coproducto cartesiano*** *de esta familia es un $\underline{K}$-objeto*

$$A = \left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \xi \right)$$

en el que la $\underline{K}$-estructura ξ es final para $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ con respecto al sumidero de λ-coproyecciones

$$\left(\varepsilon_\lambda : A_\lambda \to \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right)_\Lambda$$

En tal caso se emplea la notación $\coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ para designar al objeto A. Cuando para toda familia de $\underline{K}$-objetos hay un $\underline{K}$-coproducto cartesiano se dice que $\underline{K}$ ***tiene $\underline{K}$-coproductos cartesianos*** *o, simplemente, que* ***tiene coproductos cartesianos*** *(en tanto que la omisión de $\underline{K}$ no dé lugar a equívocos). Cuando los conjuntos subyacentes sean ajenos dos a dos, se tomará*

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

y ξ será una $\underline{K}$-estructura final para $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ con respecto al sumidero de inclusiones

$$\left(\iota_\lambda : (X_\lambda, \xi_\lambda) \hookrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right)_\Lambda$$

Ejemplo 11.8 *Por lo mensionado arriba, $\mathfrak{Top}$ tiene coproductos cartesianos.*

Ejemplo 11.9 *Toda categoría concreta topológica tiene coproductos cartesianos.*

Ejemplo 11.10 *$\mathfrak{Pos}$ tiene coproductos cartesianos.*

Para argumentar en favor de esta última afirmación se considerará una familia arbitraria de copos ajenos entre sí; los cambios que requiere la consideración de una familia de copos que comparten elementos en común son sencillos.

Sea $(X_\lambda, \leq_\lambda)_\Lambda$ una familia de copos ajenos dos a dos y defínase la relación $\leq$ en $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ haciendo, para cualesquiera $x_1, x_2 \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \text{p.a.}\lambda \in \Lambda, x_1, x_2 \in X_\lambda \text{ y } x_1 \leq_\lambda x_2$$

Es claro que $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \leq \right) \in \mathfrak{Pos}$. Además:

(i) Para toda $\lambda \in \Lambda$ y para cualesquiera $x_1, x_2 \in X_\lambda$ tales que $x_1 \leq_\lambda x_2$, es obvio que

$$\iota_\lambda(x_1) = x_1 \leq_\lambda x_2 = \iota_\lambda(x_2)$$

En conformidad con la definición anterior de $\leq$, esto significa que para toda $\lambda \in \Lambda$

$$\iota_\lambda : (X_\lambda, \leq_\lambda) \hookrightarrow \left(\underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} X_\lambda, \leq \right)$$

es monótona.

(ii) Si un copo $(Y, \preceq)$ y una función $g : \underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} X_\lambda \to Y$ son tales que, para toda $\lambda \in \Lambda$, la composición

$$g\iota_\lambda : (X_\lambda, \leq_\lambda) \to (Y, \preceq)$$

es monótona, entonces también

$$g : \left(\underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} X_\lambda, \leq \right) \to (Y, \preceq)$$

es una función monótona. En efecto, al ser $x_1, x_2 \in \underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} X_\lambda$ tales que $x_1 \leq x_2$, entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x_1, x_2 \in X_\lambda$ y $x_1 \leq_\lambda x_2$; consecuentemente,

$$g(x_1) = g(\iota_\lambda(x_1)) \preceq g(\iota_\lambda(x_2)) = g(x_2)$$

Esto demuestra que $\left(\underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} X_\lambda, \leq \right)$ es un $\mathfrak{Pos}$-coproducto cartesiano de la familia $(X_\lambda, \leq_\lambda)_\Lambda$. [✓]

Cualquiera que sea $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathfrak{Met}_k$ denotará a la **categoría de los espacios métricos de diámetro $\leq k$ y de las contracciones**. Para comprender de qué categoría se trata baste decir que los espacios métricos elementos de $\mathfrak{Met}_k$ son aquéllos cuya métrica esté acotada por el número k. Como se ve, $\mathfrak{Met}_k$ es una subcategoría de $\mathfrak{Met}$ y, por lo tanto, es una categoría concreta.

Ejemplo 11.11 $\mathfrak{Met}_k$ *tiene coproductos cartesianos.*

Como en el caso anterior, se considerará que los miembros de una familia $(X_\lambda, d_\lambda)_\Lambda$ de $\mathfrak{Met}_k$-objetos son ajenos dos a dos. Sea

$$d : \underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} X_\lambda \times \underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} X_\lambda \to [0, \infty)$$

la función definida, para cualesquiera $x_1, x_2 \in \underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} X_\lambda$ como

$$d(x_1, x_2) = \begin{cases} d_\lambda(x_1, x_2), \text{ si p.a. } \lambda \in \Lambda,\ x_1, x_2 \in X_\lambda \\ k, \text{ si } x_1 \in X_\lambda,\ x_2 \in X_{\lambda'} \text{ y } \lambda \neq \lambda' \end{cases}$$

Entonces $d \in \mathfrak{Met}_k \left[\underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} X_\lambda \right]$, lo que se comprueba fácilmente. Además:

(i) Para toda $\lambda \in \Lambda$ y para cualesquiera $x_1, x_2 \in X_\lambda$

$$d(\iota_\lambda(x_1), \iota_\lambda(x_2)) = d(x_1, x_2) = d_\lambda(x_1, x_2)$$

lo cual permite asegurar que para toda $\lambda \in \Lambda$

$$\iota_\lambda : (X_\lambda, d_\lambda) \hookrightarrow \left(\underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} X_\lambda, d \right)$$

es una contracción.

(ii) Si un $\mathfrak{Met}_k$-objeto (Y, δ) y una función $g : \underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} X_\lambda \to Y$ son tales que, para toda $\lambda \in \Lambda$, la composición

$$g\iota_\lambda : (X_\lambda, d_\lambda) \to (Y, \delta)$$

es una contracción, entonces también lo es

$$g : \left(\underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} X_\lambda, d \right) \to (Y, \delta)$$

En efecto, sean $x_1, x_2 \in \underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} X_\lambda$. Si $d(x_1, x_2) = k$, entonces

$$\delta(g(x_1), g(x_2)) \leq d(x_1, x_2)$$

porque δ está acotada por k. Si para alguna $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $d(x_1, x_2) = d_\lambda(x_1, x_2)$, entonces para esa λ se tiene que

$$\delta(g(x_1), g(x_2)) = \delta(g(\iota_\lambda(x_1)), g(\iota_\lambda(x_2))) \leq d_\lambda(x_1, x_2) = d(x_1, x_2)$$

Esto demuestra que d es una $\mathfrak{Met}_k$-estructura final para $\underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} X_\lambda$ con respecto al sumidero de inclusiones

$$\left(\iota_\lambda : (X_\lambda, d_\lambda) \hookrightarrow \underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} X_\lambda\right)_\Lambda$$

Por lo tanto, $\left(\underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} X_\lambda, d\right)$ es un $\mathfrak{Met}_k$-coproducto de la familia $(X_\lambda, d_\lambda)_\Lambda$. [✓]

11.3. Propiedades universales del $\underline{K}$-producto y del $\underline{K}$-coproducto cartesianos.

A continuación se mostrará que los $\underline{K}$-productos y $\underline{K}$-coproductos cartesianos poseen propiedades que los caracterizan. A estas propiedades se les da el nombre de *universales* porque su cumplimiento en cualquier categoría (no necesariamente de conjuntos estructurados ni siquiera concreta) da lugar a que en ella se pueda hablar de productos o de coproductos.

Observación 11.3 *Si $\underline{K}$ es una categoría concreta que tiene $\underline{K}$-productos cartesianos y $(X_\lambda, \xi_\lambda)_\Lambda$ es cualquier familia de $\underline{K}$-objetos, entonces la $\underline{K}$-fuente de λ-proyecciones*

$$\left(\pi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda) \to (X_\lambda, \xi_\lambda)\right)_\Lambda$$

es una $\underline{K}$-monofuente.

En efecto, sean

$$h, k : (W, \omega) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda)$$

dos $\underline{K}$-morfismos cualesquiera, y supóngase que para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene

$$\pi_\lambda h = \pi_\lambda k$$

Entonces, para toda $w \in W$,

$$\pi_\lambda(h(w)) = \pi_\lambda(k(w))$$

Quiere decir que, para toda $w \in W$, los puntos $h(w)$ y $k(w)$ de $\prod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda)$ son iguales coordenada a coordenada. De aquí que, para toda $w \in W$,

$$h(w) = k(w)$$

Por lo tanto

$$h = k$$

Esto demuestra que $\left(\pi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda) \to (X_\lambda, \xi_\lambda)\right)_\Lambda$ es una $\underline{K}$-monofuente. [✓]

Desde luego, con el sumidero de λ-coproyecciones ocurre la situación dual:

Ejercicio 11.3 *Si $\underline{K}$ es una categoría concreta que tiene $\underline{K}$-coproductos cartesianos y $(X_\lambda, \xi_\lambda)_\Lambda$ es cualquier familia de $\underline{K}$-objetos, demuestre que el $\underline{K}$-sumidero de λ-coproyecciones*

$$\left(\varepsilon_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)\right)_\Lambda$$

es un $\underline{K}$-episumidero.

Hay que destacar que el que la $\underline{K}$-fuente de λ-proyecciones $(\pi_\lambda)_\Lambda$ sea una $\underline{K}$-monofuente (o el que el $\underline{K}$-sumidero de λ-coproyecciones $(\varepsilon_\lambda)_\Lambda$sea un $\underline{K}$-episumidero) es un hecho que se demuestra sin tomar en cuenta a $\underline{K}$. Más todavía: aun cuando $\underline{K}$ no tenga $\underline{K}$-productos (o $\underline{K}$-coproductos) cartesianos, se puede demostrar que la $\mathfrak{Set}$-fuente $(\pi_\lambda)_\Lambda$ (o el $\mathfrak{Set}$-sumidero $(\varepsilon_\lambda)_\Lambda$) correspondiente a cualquier familia de $\underline{K}$-objetos $(X_\lambda, \xi_\lambda)_\Lambda$ es una $\mathfrak{Set}$-monofuente (o un $\mathfrak{Set}$-episumidero). Haciendo apoyo en estas observaciones se demostrará lo siguiente.

Proposición 11.1 *Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta y $(X_\lambda, \xi_\lambda)_\Lambda$ una familia de $\underline{K}$-objetos, arbitrarias. Si $\underline{K}$ tiene $\underline{K}$-productos cartesianos, entonces para toda $\underline{K}$-fuente*

$$F = (p_\lambda : (W, \omega) \to (X_\lambda, \xi_\lambda))_\Lambda$$

existe un único $\underline{K}$-morfismo

$$p : (W, \omega) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda)$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\pi_\lambda p = p_\lambda$$

donde $(\pi_\lambda)_\Lambda$ es la fuente de λ-proyecciones de la familia $(X_\lambda, \xi_\lambda)_\Lambda$.

Demostración de la existencia. Sea

$$F = (p_\lambda : (W, \omega) \to (X_\lambda, \xi_\lambda))_\Lambda$$

una $\underline{K}$-fuente arbitraria. Obsérvese que para toda $w \in W$ se puede definir una función

$$f_w : \Lambda \to \underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} X_\lambda$$

que asocia a cada $\lambda \in \Lambda$ un elemento de X_λ. En efecto, empleando las flechas de F, para toda $\lambda \in \Lambda$, se puede hacer

$$f_w(\lambda) = p_\lambda(w) \in X_\lambda$$

lo cual, claramente, da lugar a una función bien definida. Consecuentemente, también

$$\begin{array}{rccc} p: & W & \to & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \\ & w & \mapsto & f_w \end{array}$$

es una función bien definida. Además, cualesquiera que sean $w \in W$ y $\lambda \in \Lambda$, se tiene:

$$\pi_\lambda p(w) = \pi_\lambda(f_w) = f_w(\lambda) = p_\lambda(w)$$

o sea que

$$\pi_\lambda p = p_\lambda$$

Por otra parte, puesto que F es una $\underline{K}$-fuente, se tiene, para toda $\lambda \in \Lambda$, que la composición $\pi_\lambda p$ es un $\underline{K}$-morfismo; debido a la inicialidad de la fuente de λ-proyecciones $(\pi_\lambda)_\Lambda$, esto implica que también

$$p : (W, \omega) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda)$$

es un $\underline{K}$-morfismo.

Demostración de la unicidad. Sea

$$p' : (W, \omega) \to \prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda)$$

otro $\underline{K}$-morfismo tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\pi_\lambda p' = p_\lambda$$

Entonces los $\underline{K}$-morfismos

$$p, p' : (W, \omega) \to \prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda)$$

satisfacen, para toda $\lambda \in \Lambda$, la igualdad

$$\pi_\lambda p = \pi_\lambda p'$$

Puesto que la $\underline{K}$-fuente de λ-proyecciones $(\pi_\lambda)_\Lambda$ es una monofuente, la igualdad anterior implica que $p = p'$, que es a lo que se quería llegar. [✓]

Proposición 11.2 *Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta y $(X_\lambda, \xi_\lambda)_\Lambda$ una familia de $\underline{K}$-objetos, arbitrarias. Si $\underline{K}$ tiene $\underline{K}$-coproductos cartesianos, entonces para todo $\underline{K}$-sumidero*

$$S = (e_\lambda : (X_\lambda, \xi_\lambda) \to (Y, \eta))_\Lambda$$

existe un único $\underline{K}$-morfismo

$$\mathsf{e} : \coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda) \to (Y, \eta)$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\mathsf{e}\varepsilon_\lambda = e_\lambda$$

siendo $(\varepsilon_\lambda)_\Lambda$ el sumidero de λ-coproyecciones de la familia $(X_\lambda, \xi_\lambda)_\Lambda$.

Demostración de la existencia. Sea

$$S = (e_\lambda : (X_\lambda, \xi_\lambda) \to (Y, \eta))_\Lambda$$

un $\underline{K}$-sumidero arbitrario y sea

$$\mathsf{e} : \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to Y$$

la función definida para todo $(x, \lambda) \in \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ por

$$\mathsf{e}(x, \lambda) = e_\lambda (x) \in Y$$

e es una función bien definida porque se está definiendo a través de funciones e_λ bien definidas. Además, cualesquiera que sean $\lambda \in \Lambda$ y $x \in X_\lambda$, se tiene:

$$\mathsf{e}\varepsilon_\lambda (x) = \mathsf{e}(x, \lambda) = e_\lambda (x)$$

o sea que

$$\mathsf{e}\varepsilon_\lambda = e_\lambda$$

Por otra parte, puesto que S es un $\underline{K}$-sumidero, se tiene, para toda $\lambda \in \Lambda$, que la composición $\mathsf{e}\varepsilon_\lambda$ es un $\underline{K}$-morfismo; debido a la finalidad del sumidero de λ-coproyecciones $(\varepsilon_\lambda)_\Lambda$, esto implica que también

$$\mathsf{e} : \coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda) \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo.

Demostración de la unicidad. Sea

$$\mathsf{e}' : \coprod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda) \to (Y, \eta)$$

otro $\underline{K}$-morfismo tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\mathsf{e}'\varepsilon_\lambda = e_\lambda$$

Entonces los $\underline{K}$-morfismos

$$\mathsf{e}, \mathsf{e}' : \coprod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda) \to (Y, \eta)$$

satisfacen, para toda $\lambda \in \Lambda$, la igualdad

$$\mathsf{e}\varepsilon_\lambda = \mathsf{e}'\varepsilon_\lambda$$

Puesto que el $\underline{K}$-sumidero de λ-coproyecciones $(\pi_\lambda)_\Lambda$ es un episumidero, la igualdad anterior implica que $\mathsf{e} = \mathsf{e}'$, que es a lo que se quería llegar. [✓]

Definición 11.3 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta y sea*

$$F = (p_\lambda : (X, \xi) \to (X_\lambda, \xi_\lambda))_\Lambda$$

una $\underline{K}$-fuente arbitraria. Se dice que F ***tiene la propiedad universal del $\underline{K}$-producto*** *si para toda $\underline{K}$-fuente*

$$F' = \left(p'_\lambda : \left(X', \xi'\right) \to (X_\lambda, \xi_\lambda)\right)_\Lambda$$

existe un $\underline{K}$-morfismo, y solamente uno,

$$p : \left(X', \xi'\right) \to (X, \xi)$$

tal que para toda $\lambda \in \Lambda$

$$p_\lambda p = p'_\lambda$$

En tal caso se dice que (X, ξ) ***es un $\underline{K}$-producto de la familia*** *$(X_\lambda, \xi_\lambda)_\Lambda$* ***con λ-proyecciones*** *p_λ. Si en $\underline{K}$ cualquier familia de $\underline{K}$-objetos puede ponerse como codominio de una $\underline{K}$-fuente que tenga la propiedad universal del $\underline{K}$-producto, entonces se dice que $\underline{K}$* ***tiene $\underline{K}$-productos****.*

Ejemplo 11.12 *A consecuencia de la primera de las dos proposiciones anteriores, si $\underline{K}$ tiene $\underline{K}$-productos cartesianos entonces $\underline{K}$ tiene $\underline{K}$-productos, ya que la fuente de λ-proyecciones*

$$\left(\pi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda) \to (X_\lambda, \xi_\lambda)\right)_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del $\underline{K}$-producto. De aquí que un $\underline{K}$-producto cartesiano sea un $\underline{K}$-producto cuyas λ-proyecciones son las λ-proyecciones usuales.

Ejemplo 11.13 *Se ha visto que $\mathfrak{Nor}$ es una categoría concreta carente de productos cartesianos. Ahora se verá que, pese a esto, $\mathfrak{Nor}$ sí tiene productos (aunque no cartesianos). Sea $(N_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de espacios normados*

$$N_\lambda = \left(X_\lambda, \left(+_\lambda, \cdot_\lambda, \|\quad\|_\lambda\right)\right)$$

y considérese al espacio vectorial

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, (+, \cdot)\right)$$

Ahora defínase, para cualquier $f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$,

$$\|f\| = \sup\left\{\|f(\lambda)\|_\lambda : \lambda \in \Lambda\right\}$$

y considérese al conjunto

$$\overline{X} = \left\{ f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : \|f\| < \infty \right\}$$

Entonces

$$\left(\overline{X}, \left(+, \cdot, \| \quad \|\right)\right) \in \mathfrak{Nor}$$

(lo cual no es difícil de comprobar) y las funciones

$$\overline{\pi}_\lambda = \pi_\lambda \mid_{\overline{X}}: \left(\overline{X}, \left(+, \cdot, \| \quad \|\right)\right) \to N_\lambda \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

son contracciones normadas porque son transformaciones lineales (lo que se comprueba con facilidad) y para toda $f \in \overline{X}$

$$\|\overline{\pi}_\lambda (f)\|_\lambda = \|f(\lambda)\|_\lambda \leq \sup \{\|f(\lambda)\|_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = \|f\|$$

Ahora se verá que la $\mathfrak{Nor}$*-fuente*

$$\left(\overline{\pi}_\lambda : \left(\overline{X}, \left(+, \cdot, \| \quad \|\right)\right) \to N_\lambda\right)_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del $\mathfrak{Nor}$*-producto. Sea*

$$F = \left(p_\lambda : \left(X, \left(\oplus, \circ, | \quad |\right)\right) \to N_\lambda\right)_\Lambda$$

una $\mathfrak{Nor}$*-fuente arbitraria. Hay que probar que existe un único* $\mathfrak{Nor}$*-morfismo*

$$\overline{p} : \left(X, \left(\oplus, \circ, | \quad |\right)\right) \to \left(\overline{X}, \left(+, \cdot, \| \quad \|\right)\right)$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\overline{\pi}_\lambda \overline{p} = p_\lambda$$

Para demostrar su existencia, considérese a la función

$$\begin{array}{rccc} p: & X & \to & \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \\ & x & \mapsto & f_x \end{array}$$

en la que f_x *se define, para toda* $\lambda \in \Lambda$, *como*

$$f_x(\lambda) = p_\lambda(x) \in X_\lambda$$

Puesto que, para toda $\lambda \in \Lambda$, p_λ *es una contracción normada, entonces, para toda* $x \in X$, *el conjunto*

$$\{\|p_\lambda(x)\|_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

está acotado por el número $|x|$. *Como consecuencia de la igualdad anterior, esto implica que*

$$\|f_x\| = \sup\{\|f_x \ (\lambda)\|_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \leq |x| < \infty \qquad ...(*)$$

de modo que $f_x \in \overline{X}$ *y puede hablarse de la restricción*

$$\overline{p} = p \mid^{\overline{X}}: X \to \overline{X}$$

Por otro lado, a consecuencia de la linealidad de las flechas de F *y de la definición de las operaciones* $+$ *y* $\cdot$ *en* $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *("coordenada a coordenada") que hereda* $\overline{X}$, *se tiene que para cualesquiera* $x, x_1, x_2 \in X, r \in \mathbb{R}$ *y* $\lambda \in \Lambda$:

$$\begin{array}{lcl} f_{x_1 \oplus x_2}(\lambda) = p_\lambda(x_1 \oplus x_2) & & f_{r \circ x}(\lambda) = p_\lambda(r \circ x) \\ = p_\lambda(x_1) +_\lambda p_\lambda(x_2) & y & = r \cdot_\lambda p_\lambda(x) \\ = f_{x_1}(\lambda) +_\lambda f_{x_2}(\lambda) & & = r \cdot_\lambda f_x(\lambda) \\ = [f_{x_1} + f_{x_2}](\lambda) & & = [r \cdot f_x](\lambda) \end{array}$$

Estas igualdades implican la linealidad de $\overline{p}$, *pues por ellas se tiene que*

$$\begin{array}{lcl} \overline{p}\,(x_1 \oplus x_2) = f_{x_1 \oplus x_2} & & \overline{p}\,(r \circ x) = f_{r \circ x} \\ = f_{x_1} + f_{x_2} & y & = r \cdot f_x \\ = \overline{p}\,(x_1) + \overline{p}\,(x_2) & & = r \cdot \overline{p}\,(x) \end{array}$$

Además, de $(*)$ *se sigue que*

$$\|\overline{p}\,(x)\| = \|f_x\| \leq |x|$$

Todo esto es prueba de que

$$\overline{p} : \left(X, \left(\oplus, \circ, | \quad |\right)\right) \to \left(\overline{X}, \left(+, \cdot, \| \quad \|\right)\right)$$

es una contracción normada. Aplicándola a cualquier $x \in X$ *y componiéndola con cualquier* $\overline{\pi}_\lambda$ *se obtiene*

$$\overline{\pi}_\lambda \overline{p}\,(x) = \overline{\pi}_\lambda\,(f_x) = f_x\,(\lambda) = p_\lambda\,(x)$$

lo cual significa que $\overline{p}$ *es un* $\mathfrak{Nor}$*-morfismo con la propiedad deseada; es decir, que para toda* $\lambda \in \Lambda$

$$\overline{\pi}_\lambda \overline{p} = p_\lambda$$

Sólo resta demostrar que $\overline{p}$ *es la única contracción normada que posee esta propiedad. Supóngase que también*

$$\overline{q} : \left(X, \left(\oplus, \circ, | \quad |\right)\right) \to \left(\overline{X}, \left(+, \cdot, \| \quad \|\right)\right)$$

es una contracción normada tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\overline{\pi}_\lambda \overline{q} = p_\lambda$$

Sea

$$\begin{array}{rccl} q: & X & \to & \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \\ & x & \mapsto & \overline{q}\,(x) \end{array}$$

Ahora obsérvese que coinciden las composiciones de las funciones

$$p : X \to \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \qquad y \qquad q : X \to \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

con las flechas de la $\mathfrak{Set}$*-fuente*

$$\left(\pi_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\lambda\right)_\Lambda$$

es decir, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\pi_\lambda p = \pi_\lambda q$$

Puesto que esta $\mathfrak{Set}$*-fuente es una* $\mathfrak{Set}$*-monofuente, esta igualdad implica que*

$$p = q$$

lo cual permite asegurar que también los $\mathfrak{Nor}$*-morfismos* $\overline{p}$ *y* $\overline{q}$ *son iguales. Con esto queda demostrado que*

$$\left(\overline{\pi}_\lambda : \left(\overline{X}, \left(+, \cdot, \| \quad \|\right)\right) \to N_\lambda\right)_\Lambda$$

es una $\mathfrak{Nor}$*-fuente que tiene la propiedad universal del* $\mathfrak{Nor}$*-producto. Por lo tanto,*

$$\left(\overline{X}, \left(+, \cdot, \| \quad \|\right)\right)$$

es un $\mathfrak{Nor}$*-producto de la familia de espacios normados* $(N_\lambda)_\Lambda$*; puesto que ésta se escogió arbitrariamente,* $\mathfrak{Nor}$ *tiene* $\mathfrak{Nor}$*-productos.* [✓]

Ejercicio 11.4 *¿Es cierto que* $\mathfrak{Met}$ *tiene productos que no son cartesianos? Justifique su respuesta.*

Definición 11.4 *Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta y sea*

$$S = (e_\lambda : (X_\lambda, \xi_\lambda) \to (X, \xi))_\Lambda$$

un $\underline{K}$-sumidero arbitrario. Se dice que S ***tiene la propiedad universal del $\underline{K}$-coproducto*** *si para todo $\underline{K}$-sumidero*

$$S' = \left(e'_\lambda : (X_\lambda, \xi_\lambda) \to \left(X', \xi'\right)\right)_\Lambda$$

existe un $\underline{K}$-morfismo, y solamente uno,

$$\mathsf{e} : \left(X', \xi'\right) \to (X, \xi)$$

tal que para toda $\lambda \in \Lambda$

$$e_\lambda \mathsf{e} = e'_\lambda$$

En tal caso se dice que (X, ξ) ***es un $\underline{K}$-coproducto de la familia*** *$(X_\lambda, \xi_\lambda)_\Lambda$* ***con λ-coproyecciones*** *e_λ. Si en $\underline{K}$ cualquier familia de $\underline{K}$-objetos puede ponerse como dominio de un $\underline{K}$-sumidero que tenga la propiedad universal del $\underline{K}$-coproducto, entonces se dice que $\underline{K}$* ***tiene $\underline{K}$-coproductos****.*

Ejemplo 11.14 *Debido a la proposición anterior, si $\underline{K}$ tiene $\underline{K}$-coproductos cartesianos entonces $\underline{K}$ tiene $\underline{K}$-coproductos, ya que el sumidero de λ-coproyecciones*

$$\left(\varepsilon_\lambda : (X_\lambda, \xi_\lambda) \to \coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \xi_\lambda)\right)_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del $\underline{K}$-coproducto. De aquí que un $\underline{K}$-coproducto cartesiano sea un $\underline{K}$-coproducto cuyas λ-coproyecciones son las λ-coproyecciones usuales.

Ejemplo 11.15 *Ahora se verá que existen categorías concretas en las que se puede hablar de coproductos sin que éstos tengan por conjuntos subyacentes a las uniones ajenas de los conjuntos subyacentes de los cofactores correspondientes. Sea $(V_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de espacios vectoriales (sobre $\mathbb{R}$)*

$$V_\lambda = (X_\lambda, (+_\lambda, \cdot_\lambda))$$

y sea $V = \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, (+, \cdot)\right)$ su $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$-producto cartesiano. Para toda $\lambda \in \Lambda$, defínase a la función

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon_\lambda : & X_\lambda & \to & \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \\ & x & \mapsto & \varepsilon_\lambda(x) \end{array}$$

en la que

$$\varepsilon_\lambda(x) : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

viene dada por

$$\varepsilon_\lambda(x)\left(\lambda'\right) = \begin{cases} 0_{\lambda'}, \text{ si } \lambda' \neq \lambda \\ x, \text{ si } \lambda' = \lambda \end{cases}$$

donde $0_{\lambda'}$ denota al vector cero de $V_{\lambda'}$. Siendo así y teniendo presentes las definiciones de $+$ y $\cdot$ en $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, obsérvese que para cualesquiera $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $x, x_1, x_2 \in X$ y $r \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \left[\varepsilon_\lambda(x_1) + \varepsilon_\lambda(x_2)\right]\left(\lambda'\right) &= \varepsilon_\lambda(x_1)\left(\lambda'\right) +_{\lambda'} \varepsilon_\lambda(x_2)\left(\lambda'\right) \\ &= \begin{cases} 0_{\lambda'} +_{\lambda'} 0_{\lambda'}, \text{ si } \lambda' \neq \lambda \\ x_1 +_\lambda x_2, \text{ si } \lambda' = \lambda \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0_{\lambda'}, \text{ si } \lambda' \neq \lambda \\ x_1 +_\lambda x_2, \text{ si } \lambda' = \lambda \end{cases} \\ &= \varepsilon_\lambda(x_1 +_\lambda x_2)\left(\lambda'\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left[r\cdot\varepsilon_{\lambda}(x)\right](\lambda') &= r\cdot_{\lambda'}\left[\varepsilon_{\lambda}(x)(\lambda')\right]\\
&= \begin{cases} r\cdot_{\lambda'}0_{\lambda'},\ si\ \lambda'\neq\lambda\\ r\cdot_{\lambda}x,\ si\ \lambda'=\lambda\end{cases}\\
&= \begin{cases} 0_{\lambda'},\ si\ \lambda'\neq\lambda\\ r\cdot_{\lambda}x,\ si\ \lambda'=\lambda\end{cases}\\
&= \varepsilon_{\lambda}(r\cdot_{\lambda}x)(\lambda')
\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\varepsilon_{\lambda}(x_1+_{\lambda}x_2)=\varepsilon_{\lambda}(x_1)+\varepsilon_{\lambda}(x_2)$$

y

$$\varepsilon_{\lambda}(r\cdot_{\lambda}x)=r\cdot\varepsilon_{\lambda}(x)$$

lo cual significa que para toda $\lambda\in\Lambda$

$$\varepsilon_{\lambda}:V_{\lambda}\to V$$

es una transformación lineal. Ahora se probará que el $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$*-sumidero*

$$(\varepsilon_{\lambda}:V_{\lambda}\to V)_{\Lambda}$$

tiene la propiedad universal del $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$*-coproducto. Sea*

$$S=(e_{\lambda}:V_{\lambda}\to B)_{\Lambda}$$

un sumidero arbitrario de transformaciones lineales cuyo codominio es un espacio vectorial

$$B=(Y,(\oplus,\circ))$$

arbitrario. Hay que demostrar que existe un único $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$*-morfismo*

$$\mathsf{e}:V\to B$$

tal que para toda $\lambda\in\Lambda$

$$\mathsf{e}\varepsilon_{\lambda}=e_{\lambda}$$

Para probar su existencia considérese a la función

$$\mathsf{e}:\prod_{\lambda\in\Lambda}X_{\lambda}\to Y$$

definida para toda $f\in\prod_{\lambda\in\Lambda}X_{\lambda}$ *mediante*

$$\mathsf{e}(f)=\sum_{\lambda\in\Lambda}e_{\lambda}(f(\lambda))$$

A consecuencia de la linealidad de las flechas del sumidero S*, de la definición de* $+$ *y* $\cdot$ *en* $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_{\lambda}$ *y de la distributividad sobre la suma de vectores del producto por escalares en todo* $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$*-objeto, se tiene que para cualesquiera* $\lambda\in\Lambda$*,* $f,f_1,f_2\in X$ *y* $r\in\mathbb{R}$ *se tiene:*

$$\begin{aligned}
\mathsf{e}(f_1+f_2) &= \sum_{\lambda\in\Lambda}e_{\lambda}((f_1+f_2)(\lambda))\\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda}e_{\lambda}(f_1(\lambda)+_{\lambda}f_2(\lambda))\\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda}(e_{\lambda}(f_1(\lambda))\oplus e_{\lambda}(f_2(\lambda)))\\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda}e_{\lambda}(f_1(\lambda))\oplus\sum_{\lambda\in\Lambda}e_{\lambda}(f_2(\lambda))\\
&= \mathsf{e}(f_1)\oplus\mathsf{e}(f_2)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathsf{e}(r\cdot f) &= \sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda\left(\left(r\cdot f\right)(\lambda)\right)\\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda\left(r\cdot_\lambda f(\lambda)\right)\\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda} r\circ e_\lambda\left(f(\lambda)\right)\\ &= r\circ\sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda\left(f(\lambda)\right)\\ &= r\circ\mathsf{e}(f)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathsf{e}: V\to B$ *es una transformación lineal. Además, de acuerdo con la regla que (para toda* $\lambda\in\Lambda$ *y para toda* $x\in X_\lambda$*) define a* $\varepsilon_\lambda(x)$*, se tiene que*

$$e_{\lambda'}\left(\varepsilon_\lambda(x)\left(\lambda'\right)\right) = \begin{cases} e_{\lambda'}\left(0_{\lambda'}\right) = 0_Y,\ si\ \lambda'\neq\lambda\\ e_\lambda(x),\ si\ \lambda'=\lambda\end{cases}$$

Por consiguiente, para toda $\lambda\in\Lambda$ *y para toda* $x\in X_\lambda$*, se tiene:*

$$\begin{aligned}\mathsf{e}\varepsilon_\lambda(x) &= \mathsf{e}\left(\varepsilon_\lambda(x)\right)\\ &= \sum_{\lambda'\in\Lambda} e_{\lambda'}\left(\varepsilon_\lambda(x)\left(\lambda'\right)\right)\\ &= \ldots\oplus 0_Y\oplus 0_Y\oplus e_\lambda(x)\oplus 0_Y\oplus 0_Y\oplus\ldots\\ &= e_\lambda(x)\end{aligned}$$

Es decir, que para toda $\lambda\in\Lambda$

$$\mathsf{e}\varepsilon_\lambda = e_\lambda$$

Sólo resta probar que e *es el único* $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$*-morfismo con esta propiedad. Supóngase que también*

$$\epsilon: V\to B$$

es una transformación lineal tal que para toda $\lambda\in\Lambda$

$$\epsilon\varepsilon_\lambda = e_\lambda$$

Para toda $f\in\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *y para toda* $\lambda\in\Lambda$*, sea*

$$f_\lambda:\Lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

el elemento de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *definido para toda* $\lambda'\in\Lambda$ *por*

$$f_\lambda\left(\lambda'\right) = \begin{cases} 0_{\lambda'},\ si\ \lambda'\neq\lambda\\ f(\lambda),\ si\ \lambda'=\lambda\end{cases}$$

Es claro que

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$$

y que

$$f_\lambda = \varepsilon_\lambda\left(f(\lambda)\right)$$

Luego, aplicando la linealidad de ϵ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\epsilon(f) &= \epsilon\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\right)\\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda}\epsilon(f_\lambda)\\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda}\epsilon\varepsilon_\lambda(f(\lambda))\\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda(f(\lambda))\\
&= \mathsf{e}(f)
\end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que el $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$-sumidero

$$(\varepsilon_\lambda : V_\lambda \to V)_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$-coproducto. Por lo tanto, también[1]

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, (+,\cdot)\right)$$

es un $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$-coproducto de la familia de espacios vectoriales $(V_\lambda)_\Lambda$. [✓]

Ejercicio 11.5 *¿Es cierto que $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$ tiene coproductos cartesianos? Justifique su respuesta.*

En adelante, cada vez que alguna afirmación concierna tanto a productos como a coproductos, para evitar el ser repetitivo, se hará referencia a ambos conceptos escribiendo (co)productos.

Se ha señalado que, en conformidad con las definiciones precedentes, en una categoría concreta $\underline{K}$ todo $\underline{K}$-(co)producto cartesiano es un $\underline{K}$-(co)producto. En cuanto a lo recíproco, dos ejemplos anteriores han mostrado que es falso; es decir, que hay categorías concretas que tienen $\underline{K}$-(co)productos que no son cartesianos. Ahora se verá que si una categoría concreta $\underline{K}$ tiene $\underline{K}$-(co)productos cartesianos, entonces todo $\underline{K}$-(co)producto es esencialmente un $\underline{K}$-(co)producto cartesiano.

Proposición 11.3 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta que tienen $\underline{K}$-productos cartesianos. Si*

$$F = (p_\lambda : (X,\xi) \to (X_\lambda,\xi_\lambda))_\Lambda$$

es una $\underline{K}$-fuente con la propiedad universal del $\underline{K}$-producto, entonces el $\underline{K}$-objeto (X,ξ) es $\underline{K}$-isomorfo al $\underline{K}$-producto cartesiano de la familia de $\underline{K}$-objetos $(X_\lambda,\xi_\lambda)_\Lambda$.

Demostración. Sea $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \pi\right)$ el $\underline{K}$-producto cartesiano de la familia $(X_\lambda,\xi_\lambda)_\Lambda$ y considérese la $\underline{K}$-fuente de λ-proyecciones

$$\Pi = \left(\pi_\lambda : \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \pi\right) \to (X_\lambda,\xi_\lambda)\right)_\Lambda$$

Por la propiedad universal que posee F, existe un $\underline{K}$-morfismo (único)

$$h : \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \pi\right) \to (X,\xi)$$

tal que, para toda λ,

$$p_\lambda h = \pi_\lambda$$

[1] *"También"* en el sentido de que además de ser un $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$-producto (cartesiano), el mismo objeto es un $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$-coproducto.

Se sabe que también Π tiene la propiedad universal del $\underline{K}$-producto; por lo tanto, también existe un (único) $\underline{K}$-morfismo

$$h' : (X, \xi) \to \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \pi \right)$$

tal que, para toda λ,

$$\pi_\lambda h' = p_\lambda$$

Considérese la composición

$$g' : (X, \xi) \xrightarrow{h'} \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \pi \right) \xrightarrow{h} (X, \xi)$$

Entonces, para toda λ, se tiene:

$$p_\lambda g' = p_\lambda h h' = \pi_\lambda h' = p_\lambda$$

La propiedad universal que posee F exige que 1_X sea el único $\underline{K}$-morfismo para el cual se tenga que

$$p_\lambda 1_X = p_\lambda$$

En consecuencia

$$hh' = 1_X$$

Análogamente, pero haciendo $g = h'h$ y aplicando la propiedad universal que posee Π, se tiene que

$$h'h = 1_{\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda}$$

Esto prueba que

$$h : \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \pi \right) \to (X, \xi)$$

es un $\underline{K}$-isomorfismo (y que $h^{-1} = h'$), con lo que la proposición queda demostrada. [✓]

Corolario 11.1 *Si $\underline{K}$ es una categoría concreta que tienen $\underline{K}$-productos cartesianos, entonces toda $\underline{K}$-fuente con la propiedad universal del $\underline{K}$-producto es una $\underline{K}$-fuente inicial.*

Demostración. Se sigue de la inicialidad de la fuente de λ-proyecciones y de la existencia del $\underline{K}$-isomorfismo h anterior. [✓]

Proposición 11.4 *Sea $\underline{K}$ una categoría concreta que tienen $\underline{K}$-coproductos cartesianos. Si*

$$S = (q_\lambda : (X_\lambda, \xi_\lambda) \to (X, \xi))_\Lambda$$

es un $\underline{K}$-sumidero con la propiedad universal del $\underline{K}$-coproducto, entonces el $\underline{K}$-objeto (X, ξ) es $\underline{K}$-isomorfo al $\underline{K}$-coproducto cartesiano de la familia de $\underline{K}$-objetos $(X_\lambda, \xi_\lambda)_\Lambda$. [✓]

Corolario 11.2 *En una categoría concreta que tenga $\underline{K}$-coproductos cartesianos, todo $\underline{K}$-sumidero con la propiedad universal del $\underline{K}$-coproducto es un $\underline{K}$-sumidero final.* [✓]

11.4. Productos y coproductos en categorías arbitrarias

Del mismo modo en que se han definido a los (co)productos (a secas) en una categoría concreta $\underline{K}$, se pueden definir a los $\mathfrak{R}$-(co)productos en una categoría $\mathfrak{R}$ arbitraria. Una vez que se hayan elevado a ese nivel abstracto, habrá una distinción en estos conceptos en comparación consigo mismos tal cual se han venido trabajando en las categorías concretas, y es que ahora el $\mathfrak{R}$-(co)producto de una familia $(A_\lambda)_\Lambda$ de $\mathfrak{R}$-objetos no sólo será un $\mathfrak{R}$-objeto sino un $\mathfrak{R}$-objeto y una familia de flechas: (I) que salen de él, si es un $\mathfrak{R}$-producto; (II) que entran a él, si es un $\mathfrak{R}$-coproducto. Ya se venía viendo que en la medida que se iba elevando el grado de abstracción en el lenguaje al hablar de un $\underline{K}$-(co)producto, resultaba inevitable la referencia a la familia de sus λ-(co)proyecciones. Ahora esta mancuerna será explícitamente inseparable desde la definición misma.

Definición 11.5 *Sea $\Re$ una categoría arbitraria y sea $(A_\lambda)_\Lambda$ una familia de $\Re$-objetos.* ***Un $\Re$-producto*** *de $(A_\lambda)_\Lambda$ es una $\Re$-fuente*

$$\left(A \overset{\pi_\lambda}{\to} A_\lambda\right)_\Lambda$$

que posee la siguiente propiedad universal: Para toda $\Re$-fuente

$$\left(B \overset{p_\lambda}{\to} A_\lambda\right)_\Lambda$$

existe un $\Re$-morfismo, y solamante uno,

$$p : B \to A$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\pi_\lambda p = p_\lambda$$

Definición 11.6 *Sea $\Re$ una categoría arbitraria y sea $(A_\lambda)_\Lambda$ una familia de $\Re$-objetos.* ***Un $\Re$-coproducto*** *de $(A_\lambda)_\Lambda$ es un $\Re$-sumidero*

$$\left(A_\lambda \overset{\varepsilon_\lambda}{\to} A\right)_\Lambda$$

que posee la siguiente propiedad universal: Para toda $\Re$-sumidero

$$\left(A_\lambda \overset{q_\lambda}{\to} B\right)_\Lambda$$

existe un $\Re$-morfismo, y solamante uno,

$$q : A \to B$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$q\varepsilon_\lambda = q_\lambda$$

Definición 11.7 *Se dice que la categoría $\Re$* ***tiene $\Re$-(co)productos*** *si cualquier familia de $\Re$-objetos tiene un $\Re$-(co)producto.*

Observación 11.4 *Se conservan los nombres de* ***λ-(co)proyecciones*** *y de* ***λ-(co)factores*** *al referirse a las flechas de $(\pi_\lambda)_\Lambda$ ($(\varepsilon_\lambda)_\Lambda$) y a los objetos A_λ de su (co)dominio, (respectivamente).*

Observación 11.5 *Se denotará al $\Re$-objeto A mediante $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ ó $\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, según sea dominio de la fuente $(\pi_\lambda)_\Lambda$ ó codominio del sumidero $(\varepsilon_\lambda)_\Lambda$, respectivamente.*

Observación 11.6 *Cuando esté suficientemente claro cuál es la familia de λ-(co)proyecciones en cuestión, se abusará del lenguaje hablando del $\Re$-objeto A como de un* ***$\Re$-(co)producto de la familia*** *$(A_\lambda)_\Lambda$.*

Observación 11.7 *Cuando sea $\Lambda = \{1, 2\}$, $\Lambda = \{1, 2, 3\}$, etcétera, se usará la notación:*

$$A_1 \times A_2, A_1 \times A_2 \times A_3, ...$$

para el caso del $\Re$-producto, y

$$A_1 + A_2, A_1 + A_2 + A_3, ...$$

para el $\Re$-coproducto de $(A_\lambda)_\Lambda$.

De estas definiciones resulta claro que cuando $\Re$ es una categoría concreta $\underline{K}$, el concepto de $\Re$-(co)producto coincide con el de $\underline{K}$-(co)producto definido anteriormente.

Ejemplo 11.16 *Mírese al copro $\mathcal{X} = (X, \leq)$ como a una categoría. Sea $(x_\lambda)_\Lambda$ una familia cualquiera de $\mathcal{X}$-objetos (es decir, un subconjunto cualquiera de X) y supóngase que la fuente*

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda, \pi_\lambda\right)_\Lambda$$

es un $\mathcal{X}$-producto de $(x_\lambda)_\Lambda$. Ahorá se verá que el $\mathcal{X}$-objeto $\prod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ es un ínfimo de $(x_\lambda)_\Lambda$. En efecto, puesto que están dadas las λ-proyecciones

$$\pi_\lambda \in \mathcal{X}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda, x_\lambda\right)$$

este conjunto de $\mathcal{X}$-morfismos no es vacío, cualquiera que sea $\lambda \in \Lambda$; esto implica que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \leq x_\lambda$$

es decir, que $\prod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ es una cota inferior de $(x_\lambda)_\Lambda$. Y si para algún $x \in \mathcal{X}$ y para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene

$$x \leq x_\lambda$$

entonces

$$\mathcal{X}(x, x_\lambda) \neq \varnothing$$

lo cual quiere decir que se tiene una $\mathcal{X}$-fuente

$$\left(x \xrightarrow{p_\lambda} x_\lambda\right)_\Lambda$$

Debido a la propiedad universal que posee al fuente de las λ-proyecciones, existe un $\mathcal{X}$-morfismo (único)

$$x \xrightarrow{p} \prod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\pi_\lambda p = p_\lambda$$

La existencia de este $\mathcal{X}$-morfismo implica que

$$x \leq \prod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$$

que es a lo que se quería llegar. Por lo tanto

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = \text{ínf}\{x_\lambda \in X : \lambda \in \Lambda\}$$

Recíprocamente, supóngase que $\mathtt{x} \in X$ es un $\mathcal{X}$-objeto tal que

$$\mathtt{x} = \text{ínf}\{x_\lambda \in X : \lambda \in \Lambda\}$$

Entonces, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\mathtt{x} \leq x_\lambda$$

lo cual significa que se tiene una $\mathcal{X}$-fuente

$$\Pi = \left(\mathtt{x} \xrightarrow{\chi_\lambda} x_\lambda\right)_\Lambda$$

Sea

$$F = \left(y \xrightarrow{q_\lambda} x_\lambda\right)_\Lambda$$

cualquier otra $\mathcal{X}$-fuente de codominio $(x_\lambda)_\Lambda$; entonces, para toda $\lambda \in \Lambda$, se tiene que

$$y \leq x_\lambda$$

Por la condición de ínfimo que posee $\mathtt{x}$*, se tiene que*

$$y \leq \mathtt{x}$$

de manera que existe un $\mathcal{X}$*-morfismo (único, porque sólo puede haber uno)*

$$q : y \to \mathtt{x}$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$*,*

$$\chi_\lambda q = q_\lambda$$

Quiere decir que Π *es una* $\mathcal{X}$*-fuente que tiene la propiedad universal del producto; es decir,* Π *es un* $\mathcal{X}$*-producto de la familia* $(x_\lambda)_\Lambda$*.*

Ejercicio 11.6 *Mírese al copro* $\mathcal{X} = (X, \leq)$ *como a una categoría. Sea* $(x_\lambda)_\Lambda$ *una familia cualquiera de* $\mathcal{X}$*-objetos. Demuestre que un* $\mathcal{X}$*-sumidero*

$$\left(x_\lambda \stackrel{\sigma_\lambda}{\to} \mathtt{s}\right)_\Lambda$$

es un $\mathcal{X}$*-coproducto de* $(x_\lambda)_\Lambda$ *si, y sólo si,* $\mathtt{s}$ *es un supremo de* $(x_\lambda)_\Lambda$*.*

En vista del ejemplo y del ejercicio anteriores se puede afirmar que una condición necesaria y suficiente para que el copro $\mathcal{X} = (X, \leq)$ tenga $\mathcal{X}$-(co)productos es que todo subconjunto de X tenga ínfimo (supremo).

Ejercicio 11.7 *Mírese al copro* $\mathcal{X} = (X, \leq)$ *como a una categoría e indique si son verdaderas ó falsas las siguientes proposiciones:*

Si $\mathcal{X}$ tiene $\mathcal{X}$-productos, entonces $\mathcal{X}$ tiene $\mathcal{X}$-coproductos.
Si $\mathcal{X}$ tiene $\mathcal{X}$-coproductos, entonces $\mathcal{X}$ tiene $\mathcal{X}$-productos.
Justifique sus respuestas.

La parte que sigue trata de la esencial unicidad que posee todo $\mathfrak{K}$-(co)producto.

Sea $(A_\lambda)_\Lambda$ una familia cualquiera de $\mathfrak{K}$-objetos de una categoría $\mathfrak{K}$ arbitraria. Hasta ahora se ha tenido el cuidado de hablar de <u>un</u> $\mathfrak{K}$-(co)producto de $(A_\lambda)_\Lambda$ desde la definición misma. Enseguida se verá que dos $\mathfrak{K}$-(co)productos de $(A_\lambda)_\Lambda$ "difieren" entre sí por un $\mathfrak{K}$-isomorfismo; esto justificará el abuso en el lenguaje que se cometerá al hablar de un $\mathfrak{K}$-(co)producto de $(A_\lambda)_\Lambda$ como de <u>*el*</u> $\mathfrak{K}$-(co)producto de $(A_\lambda)_\Lambda$. También justifica el abuso de notación que consiste en designar mediante un mismo símbolo ($\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ o $\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$) al (co)dominio de la familia de λ-(co)proyecciones.

Ejercicio 11.8 *Enuncie y pruebe la proposición dual de la siguiente:*

Proposición 11.5 *Sea* $\mathfrak{K}$ *una categoría arbitraria y sea* $(A_\lambda)_\Lambda$ *una familia cualquiera de* $\mathfrak{K}$*-objetos.*

(a) Si

$$\left(A \stackrel{\pi_\lambda}{\to} A_\lambda\right)_\Lambda$$

es un $\mathfrak{K}$-producto de $(A_\lambda)_\Lambda$ y

$$h : B \to A$$

es un $\mathfrak{K}$-isomorfismo, entonces

$$\left(B \stackrel{\pi_\lambda h}{\to} A_\lambda\right)_\Lambda$$

también es un $\mathfrak{K}$-producto de $(A_\lambda)_\Lambda$.

(b) Si

$$\left(A \stackrel{\pi_\lambda}{\to} A_\lambda\right)_\Lambda \quad \text{y} \quad \left(A' \stackrel{\pi'_\lambda}{\to} A_\lambda\right)_\Lambda$$

son $\mathfrak{K}$-productos de $(A_\lambda)_\Lambda$, entonces existe un único $\mathfrak{K}$-morfismo

$$h : A' \to A$$

que es un $\Re$-isomorfismo y que, para toda $\lambda \in \Lambda$, hace

$$\pi_\lambda h = \pi'_\lambda$$

Demostración. Es totalmente dual a la que se pide en el ejercicio anterior. [✓]

Ejercicio 11.9 *Enuncie, pruebe e interprete la coproposición correspondiente a la siguiente:*

Proposición 11.6 *Sea $\Re$ una categoría arbitraria y considérense tres $\Re$-objetos A_1, A_2, A_3.*

(a) Si

$$\overline{A} = A_1 \times A_2$$

con λ-proyecciones $\overline{\pi}_1$ y $\overline{\pi}_2$, y

$$A = \overline{A} \times A_3$$

con λ-proyecciones $\overline{\pi}$ y π_3, entonces

$$A = A_1 \times A_2 \times A_3$$

con λ-proyecciones $\overline{\pi}_1\overline{\pi}$ y $\overline{\pi}_2\overline{\pi}$ y π_3.

(b) Si

$$\overline{\overline{A}} = A_2 \times A_3$$

con λ-proyecciones $\overline{\overline{\pi}}_2$ y $\overline{\overline{\pi}}_3$, y

$$B = A_1 \times \overline{\overline{A}}$$

con λ-proyecciones π_1 y $\overline{\overline{\pi}}$, entonces

$$B = A_1 \times A_2 \times A_3$$

con λ-proyecciones $\pi_1, \overline{\overline{\pi}}_2\overline{\overline{\pi}}$ y $\overline{\overline{\pi}}_3\overline{\overline{\pi}}$.

Demostración. Es totalmente dual a la que se pide en el ejercicio anterior. [✓]

11.5. $\Re$-(co)productos de $\Re$-morfismos

Definición 11.8 *Sean, $\Re$ una categoría arbitraria, $(A_\lambda)_\Lambda$ y $(B_\lambda)_\Lambda$ dos familias cualesquiera de $\Re$-objetos,*

$$\left(\pi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to A_\lambda\right)_\Lambda \qquad y \qquad \left(p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \to B_\lambda\right)_\Lambda$$

$\Re$-productos de $(A_\lambda)_\Lambda$ y de $(B_\lambda)_\Lambda$, y

$$\left(\varepsilon_\lambda : A_\lambda \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)_\Lambda \qquad y \qquad \left(q_\lambda : B_\lambda \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)_\Lambda$$

$\Re$-coproductos de $(A_\lambda)_\Lambda$ y de $(B_\lambda)_\Lambda$, respectivamente. Si para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene definido un $\Re$-morfismo

$$f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda$$

entonces, se llama:

(a) $\Re$-**producto** de $(f_\lambda)_\Lambda$ a un $\Re$-morfismo

$$f : \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$$

que para toda $\lambda \in \Lambda$ satisfaga

$$f_\lambda \pi_\lambda = p_\lambda f$$

(b) $\Re$-**coproducto** de $(f_\lambda)_\Lambda$ a un $\Re$-morfismo

$$g : \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$$

que para toda $\lambda \in \Lambda$ satisfaga

$$g\varepsilon_\lambda = q_\lambda f_\lambda$$

La notación empleada para designar a estos $\Re$-morfismos es:

$$f = \prod f_\lambda \quad \text{y} \quad g = \coprod f_\lambda$$

Obsérvese que cuando $\Re$ tiene $\Re$-productos, entonces para toda familia de $\Re$-morfismos

$$(f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda)_\Lambda$$

existe su $\Re$-producto y es único.

En efecto, considérense los $\Re$-productos de las familias $(A_\lambda)_\Lambda$ y de $(B_\lambda)_\Lambda$

$$\Pi = \left(\pi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to A_\lambda\right)_\Lambda \quad \text{y} \quad P = \left(p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \to B_\lambda\right)_\Lambda$$

así como la $\Re$-fuente

$$\left(f_\lambda\pi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to B_\lambda\right)_\Lambda$$

Por la propiedad universal que posee P, existe un $\Re$-morfismo, y solamente uno,

$$f : \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$p_\lambda f = f_\lambda \pi_\lambda$$

Este $\Re$-morfismo es, por lo tanto, el único $\Re$-producto de $(f_\lambda)_\Lambda$.

Similarmente, cuando $\Re$ tiene $\Re$-coproductos, existe <u>*el*</u> $\Re$-coproducto de toda familia de $\Re$-morfismos $(f_\lambda)_\Lambda$.

Ejercicio 11.10 *Enuncie y demuestre la coproposición correspondiente a la siguiente:*

Proposición 11.7 *Sea $\Re$ una categoría con $\Re$-productos y sea $(f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de $\Re$-morfismos. Si para toda $\lambda \in \Lambda$:*

(a) f_λ es un $\Re$-monomorfismo, entonces también Πf_λ lo es.
(b) f_λ es un $\Re$-retracción, entonces también lo es Πf_λ.
Demostración. Es totalmente dual a la que se pide en el ejercicio anterior. [✓]